Modelování systémů a procesů (611MSP)

Děčín – přednáška 1

Vlček, Kovář, Přikryl

26. února 2013

Obsah

1 Organizace

1.1 Přednášející

Kontakty

Přednášející Praha:

- prof. RNDr. Miroslav Vlček, DrSc. (vlcek@fd.cvut.cz)

Přednášející Děčín

- Ing. Bohumil Kovář, Ph.D. (kovar@utia.cas.cz) (26.2. 2013 - 9.4. 2013)
- Dr. Ing. Jan Přikryl (prikryl@fd.cvut.cz) (23.4. 2013 - 21.5. 2013)

Domovská stránka předmětu

- http://zolotarev.fd.cvut.cz/msp/

1.2 Literatura

Literatura

1. G. E. Carlson: Signal and Linear System Analysis with MATLAB, John Wileys and Sons. Inc., 1998.
2. Davendra K. Chaturvedi: Modeling and Simulation of Systems Using MATLAB and Simulink, CRC Press, Taylor& Francis Group, NW, 2010.
3. R. G. D. Allen: Matematická ekonomie, ACADEMIA, Praha, 1971.
4. Informace o prostředí MATLAB http://zolotarev.fd.cvut.cz/mni/ http://www.fd.cvut.cz/personal/nagyivan/PrpStat/Prp/MatIntro.pdf
5. Matematika-opakování http://euler.fd.cvut.cz/predmety/ml1/

1.3 Zápočet a zkouška

Zápočet a zkouška

Celkový počet bodů, které studenti mohou během semestru získat, je 40 z toho se ke zkoušce započítá maximálně 30.

Zápočet udělujeme od 25 bodů výše.

Body jsou rozděleny následovně:

- 10 bodů za domácí úkoly a jim příslušející testy,
- 4 body za tři automaticky hodnocené domácí úkoly,
- 12 bodů za dva praktické testy z Matlabu a Simulinku,
- 14 bodů za závěrečný test (dva početní příklady po pěti bodech a dvě doplňkové otázky za dva body).

Zápočet a zkouška

V průběhu semestru bude vyhlášeno několik bonusových úloh, jejichž úspěšní a nejrychlejší řešitelé budou odměněni až dvěma bonusovými body. Bonusové body se přičítají k celkovému bodovému zisku v semestru.

Bodování zaručuje, že v případě získání zápočtu (25 bodů a výše) můžete automaticky předmět absolvovat s klasifikací dostatečně, případně uspokojivě.

V případě, že máte zájem o lepší hodnocení, můžete zbylých 20 bodů získat u zkoušky.

Zápočet a zkouška – shrnutí

Celkem bodů (cvičení + zkouška)	50 bodů
Cvičení	40 bodů (30 bodů ke zkoušce)
Požadované minimum pro zápočet	25 bodů ze 40

Počet bodů	Známka	ECTS
45 až 50	výborně	A
40 až 44	velmi dobře	B
35 až 39	dobře	C
30 až 34	uspokojivě	D
25 až 30	dostatečně	E
0 až 24	nedostatečně	F

Domácí přípravy

	Téma domácího úkolu
1.	Typy systémů
2.	Laplaceova transformace
3.	Zpětná Laplaceova transformace a řešení diferenciálních rovnic
4.	Z-transformace
5.	Zpětná z-transformace a řešení diferenčních rovnic

Požadované vstupní znalosti

1. Znalost základních pojmů a operací s vektory a maticemi
2. Znalost práce s komplexními čísly a základů funkcí komplexní proměnné
3. Znalost vlastností trigonometrických, hyperbolických, exponenciálních funkcí
4. Znalost výpočtu součtů nekonečné řady, derivace a integrálů funkce jedné proměnné

5. Znalost práce se zlomky, algebraickými výrazy a běžné středoškolské matematiky
6. Základní znalosti prostředí MATLAB (viz statistika a pravděpodobnost)

Výstupní znalosti

1. Znalost použití Laplaceovy transformace pro řešení diferenciálních rovnic popisujících spojité lineární časově invariantní systémy
2. Znalost použití $\mathcal{Z}$-transformace pro řešení diferenčních rovnic popisujících diskrétní lineární časově invariantní systémy
3. Znalost nalezení stavového popisu ze slovního zadání dynamického systému
4. Znalost použití pojmu stabilita řešení a metody ověření stability dynamického systému
5. Znalost prostředí MATLAB/SIMULINK pro modelování dynamických systémů a řešení soustav nelineárních diferenciálních a diferenčních rovnic

2 Úvod

2.1 Motivace

Systém

Charakteristické vlastnosti, se kterými vystačíme při modelování:

- systém považujeme za část prostředí, kterou lze od jejího okolí oddělit fyzickou nebo myšlenkovou hranicí,
- systém se skládá z podsystémů, vzájemně propojených součástí.

Je to část našeho světa, která se svým okolím nějak interaguje, například prostřednictvím vstupu a výstupu.

Proč modelování systémů?

Otázky:

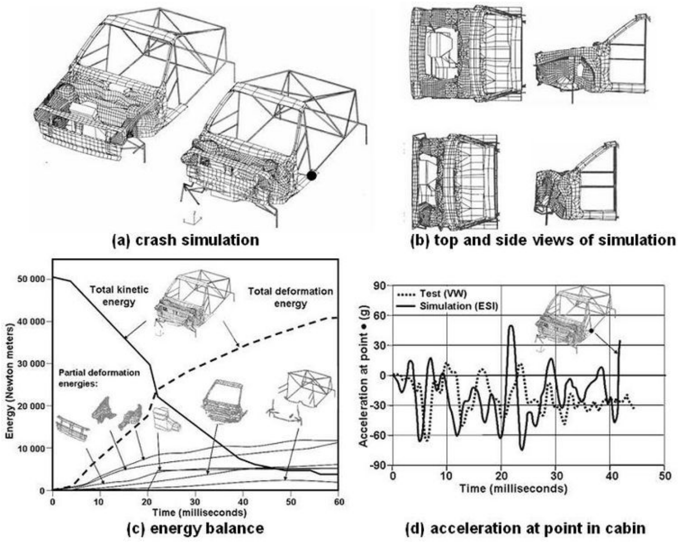
- Jak ověříme správnost výpočtu rychlosti šíření ptačí chřipky?
- Jak ověříme pevnost nového mostu?
- Jak ověříme bezpečnost sofwaru?

Pokud nemůžeme předem prokázat určité vlastnosti na samotného systému, prokážeme hledané vlastnosti na jeho modelu!

Antoni Gaudí

Antoni Gaudí

VW Polo crash test



2.2 Co je modelování?

Co je modelování?

Model

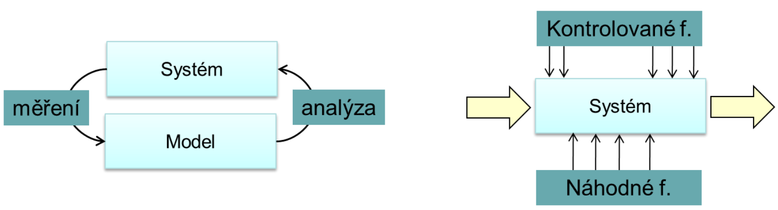
Za model můžeme pokládat náhradu nebo zjednodušení **skutečného objektu reálného světa** z hlediska jeho vlastností a funkčnosti.

Modelování je možné pouze pokud zavedeme **určitý stupeň** abstrakce a aproximace

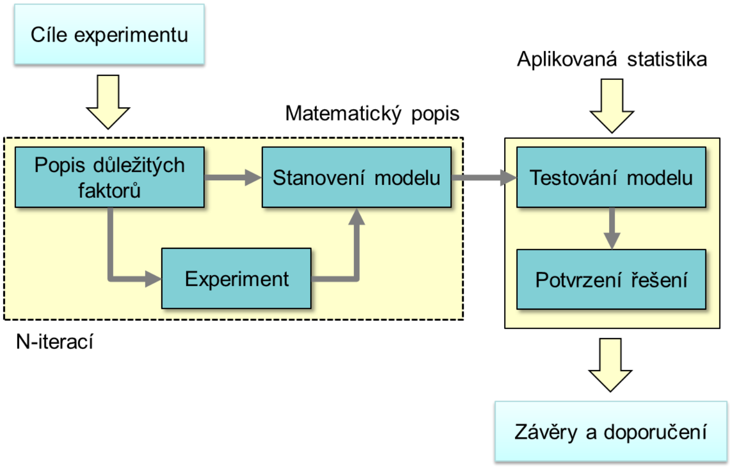
Tvorba modelu

Při analýze navrženého modelu chceme učinit co možná nejsilnější rozhodnutí na základě malého množství dat. Správnost našeho návrhu je nutné statisticky vyhodnotit. **Problémy:**

1. Významné diference ve sledovaných parametrech mohou být způsobeny špatným návrhem modelu, případně měřením dat
2. Je těžké rozlišit, zda diference v datech jsou skutečné nebo způsobené „náhodným vlivem“.



Tvorba modelu



2.3 Role matematiky

Role matematiky

Modelování není samospasitelné:

- výstupy modelu je vždy třeba ověřovat,
- možné chyby jsou jak v modelu tak i v jeho výpočtu.

Verifikace: Počítáme správný model.

Validace: Model počítá správně.

Role matematiky

- Příběh párových prvočísel (např. 17 a 19,...), největší dosud známé prvočíselné páry jsou

$$16869987339975 \quad \times \quad 2^{171960} \pm 1$$

$$100314512544015 \quad \times \quad 2^{171960} \pm 1$$

- Příběh, ve kterém pošetilý matematik nachytal firmu INTEL při předstírání, že chyba Pentia neexistuje (1995)
- Thomas Nicely, Lynchburg College, Virginia

$$\text{harmonická řada} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \quad \to \quad \infty$$

$$\text{prvočíselná harmonická řada} \sum_{\forall p}^{\infty} \frac{1}{p} \quad \to \quad \infty$$

divergují

Role matematiky

- avšak harmonická řada s párovými prvočísly

$$\sum_{\forall p_2}^{\infty} \frac{1}{p_2} = \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \quad \ldots \quad + \frac{1}{29} + \frac{1}{31} + \ldots$$

$$\text{konverguje} \quad \rightarrow \quad 1.902160583104$$

- Zde nastupuje experimentální matematika
- Thomas Nicely (1996) obdržel hodnotu

$$\rightarrow \quad 1.9021605778$$

  a objevil chybu v CPU Pentia
- rozšířil svoje podezření pomocí internetu a odezva byla jednoznačná, aritmetická jednotka Pentia je chybné

Role matematiky

- Tim Coe, Vitesse Semiconductor, Southern California

$$c = \frac{4195835}{3145727} = \frac{5 \times 7 \times (2^3 \times 3^4 \times 5 \times 37 + 1)}{3 \times 2^{20} - 1} =$$

$$= 1.33382044\ldots$$

- Pentium procesor však dával hodnotu

$$c = \frac{4195835}{3145727} = \frac{5 \times 7 \times 119881}{13 \times 241979} = 1.33373906\ldots$$

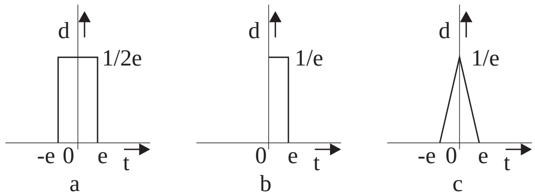
- chyba při reprezentaci čísel typu

$$M_n = 2^n - 1$$

  tzv. Mersenneova čísla

3 Vstupní signály

BlackBox model – vstupy a výstupy



Obrázek 1: Konečná reprezentace $\delta_\epsilon(t)$ pro $\epsilon > 0$.

3.1 Základní spojité signály

Spojité signály – Jednotkové impulsy

Tyto funkce jsou definovány na časovém intervalu pro všechna t a jejich nenulovou hodnotu předpokládáme pouze v okolí bodu $t = 0$. Plocha těchto funkcí je rovna 1 pro každé $\varepsilon > 0$.

Definujme funkci $\delta(t)$ jako $\delta(t) = \lim_{\epsilon\to 0} \delta_\epsilon(t)$.

Spojité signály – Jednotkový impuls

Funkce $\delta(t)$ se nazývá Diracův impuls, Diracova δ-funkce nebo jednotkový impuls. Hodnota δ-funkce pro $t \neq 0$ je $\delta(t) = 0$. Její hodnota v $t = 0$ není definována jako funkce, a proto se používá integrální definice

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)dt = \int_{-\epsilon}^{\epsilon} \delta(t)dt = \int_{0-}^{0+} \delta(t)dt = 1$$

pro každé $\epsilon > 0$.

Spojité signály – Jednotkový skok

Funkce jednotkového skoku bývá obvykle značena $\mathbb{1}(t)$ a je definována jako

$$\mathbb{1}(t) = \begin{cases} 1 & \text{pro } t \geq 0 \\ 0 & \text{pro } t < 0\,. \end{cases}$$

Spojité signály – Reálná exponenciála

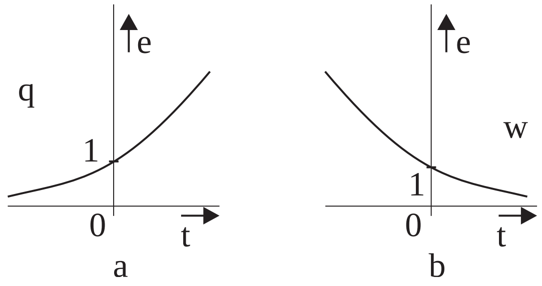
Uvažujme exponenciální funkci $f(t) = e^{\alpha t}$, kde α je reálná konstanta, podle následujícího obrázku.

Spojité signály – Periodická funkce

O spojitém signálu $f(t)$ říkáme, že je periodický s periodou T_P, jestliže platí

$$f(t + T_P) = f(t)$$

pro všechna T_P a platí



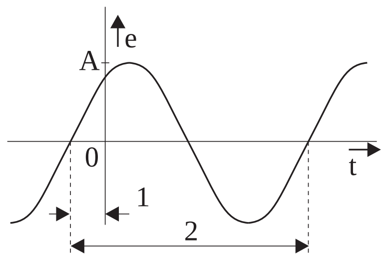
Obrázek 2: Reálná exponenciála a) pro $\alpha > 0$, b) pro $\alpha < 0$.

$$f(t) = f(t + T_P) = f(t + 2T_P) = \cdots = f(t + kT_P)$$

pro všechna k celá čísla.

Spojité signály – Sinusová funkce

$$f(t) = A \sin(\omega t + \Phi),$$



Obrázek 3: Sinusový signál.

Konstanty A, ω a Φ se nazývají amplituda, úhlová frekvence a fázový posuv. Sinusovka je periodická se základní periodou $T_P = 2\pi/\omega$.

3.2 Základní diskrétní signály

Vznik diskrétních signálů

Přirozeně

- např. průměrné denní teploty,
- denní kurzy,
- počty studentů.

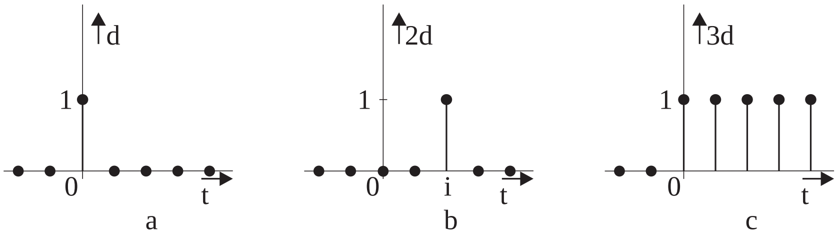
Vzorkováním spojitých signálů

- naměření teploty každou hodinu,
- měřením průtoku.

Diskrétní signály – Jednotkový impuls

Diskrétní jednotkový impuls $\delta(n)$ je definován vztahem

$$\delta(n) = \begin{cases} 1 & \text{pro } n = 0 \\ 0 & \text{pro } n \neq 0 \,. \end{cases}$$



Obrázek 4: Diskrétní signály a) jednotkový impuls, b) posunutý jednotkový impuls, c) jednotkový skok.

Diskrétní signály – Jednotkový skok

Diskrétní jednotkový skok $\mathbb{1}(n)$ je definován vztahem

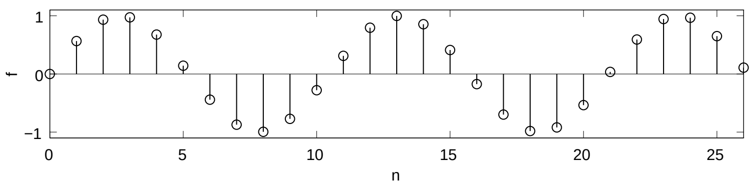
$$\mathbb{1}(n) = \begin{cases} 1 & \text{pro } n \geq 0 \\ 0 & \text{pro } n < 0 \end{cases}$$

Diskrétní signály – Sinusová posloupnost

Mějme sinusový signál $f(t) = \sin \omega_0 t$ s periodou $T_P = 2\pi/\omega_0$. Pokud tento signál vzorkujeme s periodou $T > 0$, získáme diskrétní sinusový signál

$$f(nT) = \sin \omega_0 nT \,,$$

kde $n = 0, \ \pm 1, \ \pm 2, \ldots$. Pokud není nutné uvádět periodou T, píšeme pouze $f(n)$.



Diskrétní signály – Sinusová posloupnost

Diskrétní signál $f(n)$ je periodický, jestliže existuje kladné celé číslo N takové, že platí

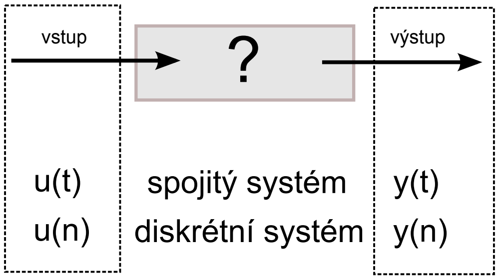
$$f(n) = f(n + N) = f(n + 2N) = \cdots = f(n + kN)$$

pro všechna n z intervalu $(-\infty, \ \infty)$ a pro libovolné celé k. N se nazývá perioda diskrétního signálu.

4 Výstupní signály

4.1 Spojitý a diskrétní systém

Spojitý a diskrétní systém



Diskrétní systém

Odezva na jednotkový impuls $\delta(n)$

se nazývá *impulsní odezva* $h(n)$

$$h(n) = \mathcal{T}\left\{\delta(n)\right\} \& h(n,m) = \mathcal{T}\left\{\delta(n-m)\right\}.$$

Odezvu na jednotkový skok $\mathbb{1}(n)$

$$\mathbb{1}(n) = \sum_{m=0}^{n} \delta(n-m) = \\ \delta(n) + \delta(n-1) + \cdots + \delta(1) + \delta(0)\,,$$

nazveme *přechodovou odezvou* $s(n)$.

Konvoluce

Konvoluční suma

$$y(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} h(n-m)u(m) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)u(n-k),$$

která bývá občas značená

$$y(n) = h(n) * u(n)\,.$$

5 Charakteristiky

5.1 Lineární a nelineární systém

Lineární systém

Řekli jsme si, že systém není nic jiného, než černá skříňka, *black box*, kterou se pokoušíme nejprve identifikovat a poté reprodukovat. Při identifikaci se nejprve ptáme, zda se jedná o systém *lineární*.

Linearita

V matematice označujeme funkci $f(x)$ jako lineární v případě, že je

1. aditivní $f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2)$ a
2. homogenní, $f(\alpha x) = \alpha f(x)$.

Princip superpozice

Nechť $u(n)$ je vstupní a $y(n)$ výstupní signál systému. Funkce $\mathcal{T}$ definuje vztah mezi vstupem a výstupem. Pro lineární systém pak platí tak zvaný *princip superpozice*.

Princip superpozice

Mějme dva různé vstupní signály $u_1(n)$ a $u_2(n)$. Výstupy systému jsou

$$
\begin{aligned}
y_1(n) &= \mathcal{T}\left\{u_1(n)\right\} \\
y_2(n) &= \mathcal{T}\left\{u_2(n)\right\}
\end{aligned}
$$

a pro lineární systém pak musí pro $u(n) = \alpha u_1(n) + \beta u_2(n)$ platit

$$\alpha y_1(n) + \beta y_2(n) = \mathcal{T}\left\{\alpha u_1(n) + \beta u_2(n)\right\}$$

Příklad lineárního systému $y(n) + a\,y(n-1) = u(n)$

Kombinací dvou různých vstupních signálů $u(n) = a_1 u_1(n) + a_2 u_2(n)$

$$
\begin{aligned}
a_1\left[y_1(n) + a y_1(n-1)\right] &= a_1 u_1(n) \\
a_2\left[y_2(n) + a y_2(n-1)\right] &= a_2 u_2(n)
\end{aligned}
$$

dostaneme lineární kombinaci výstupních signálů a pro $y(n) = a_1 y_1(n) + a_2 y_2(n)$ platí

$$y(n) + a\,y(n-1) = u(n)$$

5.2 Časově invariantní, resp. stacionární systém

Časově invariantní systém

Systém se nazývá *časově invariantní*, jestliže jsou všechny události závislé pouze na časovém intervalu (rozdílu časových událostí) $n - m$ nikoliv na každém časovém okamžiku n a m samostatně.

$$
\begin{array}{lrcl}
\text{dnes} \ldots & y(n) & = & \mathcal{T}\{x(n)\} \\
\text{včera} \ldots & y(n-1) & = & \mathcal{T}\{x(n-1)\} \\
& \vdots & & \\
& y(n-m) & = & \mathcal{T}\{x(n-m)\}
\end{array}
$$

Časově invariantní systém

Mějme mikroekonomický model variace ceny popsaný diferenční rovnicí

$$y(n) + a\,y(n-1) = u(n).$$

Vzhledem k tomu, že koeficient a u $y(n-1)$ není funkcí času, pak rovnice při změně z $n \to n-m$ zachovává tvar a jedná se tedy o časově invariantní systém.

Mějme diferenční rovnici

$$y(n) + n \cdot y(n-1) = x(n).$$

V tomto případě je koeficient n u $y(n-1)$ funkcí času a systém je tedy časově proměný.

5.3 Kauzální systém

Kauzální systém

Výstupní signál $y(n)$ kauzálních systémů závisí pouze na současných a minulých hodnotách vstupního signálu $x(x), x(n-1), \ldots, x(n-m)$.

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)\,u(n-k) = \sum_{k=-\infty}^{-1} h(k)\,u(n-k) + \sum_{k=0}^{\infty} h(k)\,x(n-k)$$

Konvoluční suma pro lineární, časově invariantní a *kauzální* systém má tvar

$$y(n) = \sum_{k=0}^{\infty} h(k)\,u(n-k)$$

5.4 Autonomní systém

Autonomní systém

Za autonomní systém považujeme takový, který nemá vstup. Je tedy popsán například rovnicí

$$y(n) + a\,y(n-1) = 0$$

V případě, že systém má vstup $u(n)$

$$y(n) + ay(n-1) = u(n),$$

systém pokládáme za neautonomní.

6 Popis systémů

6.1 Vnější popis

Vnější popis

Používáme

- černá skříňka, neznámé vlastnosti
- vektor vstupu u, vektor výstupních veličin y

Popisujeme

- diferenciální rovnicí řádu > 1 pro systémy se spojitým časem
- diferenční rovnicí řádu > 1 pro systémy s diskrétním časem

Když na vstup systému přivedeme definovaný signál, obdržíme na opačném konci výstupní odezvu.

Analýzou vstupního a výstupního signálu můžeme systém identifikovat.

6.2 Vnitřní popis

Vnitřní popis

Používáme

- stavové modely
- transformují vektor vstupů u na vektor vnitřních stavů x a ten na vektor výstupních veličin y

Popis

- soustavou diferenciálních rovnic prvního řádu pro systémy se spojitým časem
- soustavou diferenčních rovnic prvního řádu pro systémy s diskrétním časem.

Stavový popis vystihuje vnitřní strukturu systému.

7 Matlab

Matlab a Simulink

Matlab je systém firmy The Mathworks Inc. pro matematické modelování (hlavně pomocí matic), vizualizaci a mnoho dalšího. Je dostupný na mnoha systémech (Windows, Mac, mnoho Unixů včetně Linuxu atd.). Původně vznikl nad fortranskými knihovnami pro maticové počítání Linpack a Eispack. Obsahuje jednoduchý skriptovací jazyk a nechá se snadno rozšiřovat o další funkce pomocí tzv. M-souborů (M-files). Balíky funkcí se nazývají toolboxy. Pro simulace systémů se používá *Simulink*.