Modelování systémů a procesů (K611MSAP)

Děčín – přednáška 2

Vlček, Kovář, Pěnička, Přikryl

Ústav aplikované matematiky
ČVUT v Praze, Fakulta dopravní

2. přednáška K611MSAP
čtvrtek 26. března 2009

Obsah první části

Obsah druhé části

Část I

Linearita, časová invariance a kauzalita

Obsah přednášky

Předchozí přednáška

- Matematické modelování,
- Základní spojité/diskrétní signály
    - Diracův impuls,
    - Jednotkový skok,
    - Sinusová funkce,
    - Exponenciála
- Systém a podsystém
- Popis systému
    - Vnější popis
    - Vnitřní popis
- Linearita systému

Obsah přednášky

Matematický popis systému

Vstup a výstup

Jednotkový impuls je posloupnost $\delta(n) = 0$ pro všechna $n \neq 0$ s výjimkou $\delta(0) = 1$.

Odezvu systému na jednotkový impuls $\delta(n)$ budeme nazývat impulsní odezvou.

Pro obecný popis systémové funkce $\mathcal{S}\,[*]$ platí

$$h(n) = \mathcal{S}\,[\delta(n)] \qquad \& \qquad h(n,m) = \mathcal{S}\,[\delta(n-m)]\ . \tag{1}$$

Matematický popis systému

Vstup a výstup

Jednotkový skok $1(n)$ je posloupnost jedniček od počátku časové osy $n = 0$, kterou můžeme zapsat pomocí součtu

$$1(n) = \sum_{m=0}^{n} \delta(n-m) = \tag{2}$$

$$= \delta(n) + \delta(n-1) + \delta(n-2) + \cdots + \delta(0)$$

Matematický popis systému

Přechodová odezva

Odezva systému na jednotkový skok $1(n)$ se nazývá přechodová odezva $s(n)$

$$\begin{aligned} s(n) &= \mathcal{S}\left[1(n)\right] = \mathcal{S}\left[\sum_{m=0}^{n} \delta(n-m)\right] \\ &= \sum_{m=0}^{n} \mathcal{S}\left[\delta(n-m)\right] \\ &= \sum_{m=0}^{n} h(n,m)\,. \end{aligned} \tag{3}$$

Obsah přednášky

Časová invariance
Definice

Systém nazveme **časově invariantním**, pokud jsou všechny události v čase závislé pouze na časovém intervalu (rozdílu časových událostí) $n - m$, nikoliv na každém časovém okamžiku n a m samostatně.

Potom také rovnice (1) pro impulsní odezvu přejde z maticového tvaru na prostý vektorový zápis

$$h(n, m) \rightarrow h(n - m) = \mathcal{S}\left[\delta(n - m)\right] . \tag{4}$$

Lineární systém

Vstup a výstup

V lineárním systému platí pro vstupní $u(n)$ a výstupní $y(n)$ signál princip superpozice:

$$\begin{aligned} y(n) &= \mathcal{S}\left[u(n)\right] = \mathcal{S}\left[\sum_{m=-\infty}^{\infty} u(m)\delta(n-m)\right] \\ &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} u(m)\mathcal{S}\left[\delta(n-m)\right] \\ &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} u(m)h(n,m) \qquad (5) \end{aligned}$$

Časová invariance

Konvoluční suma

V důsledku časové invariance dostáváme z rovnice (5) **konvoluční sumu**

$$y(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} h(n-m)u(m) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)u(n-k)\,, \tag{6}$$

která bývá občas značená

$$y(n) = h(n) * u(n) = u(n) * h(n)\,. \tag{7}$$

Časová invariance

Příklad časově invariantního systému

Uvažujme mikroekonomický systém variace ceny popsaný diferenční rovnici

$$y(n) + ay(n-1) = u(n)\,. \qquad (8)$$

Protože její koeficienty nezávisí na čase, tj. a není funkcí n, zachovává tato rovnice tvar při záměně $n \to n - m$ tvar. Impulsní odezva je potom

$$h(n) = (-a)^n 1(n) \qquad (9)$$

Časová invariance

Příklad časově proměnného systému

Uvažujme diferenční rovnici

$$y(n) + ny(n-1) = u(n)\,. \tag{10}$$

Protože koeficient u $y(n-1)$ závisí na čase, nezachovává tato rovnice tvar při záměně $n \to n - m$ tvar.

Obsah přednášky

Kauzální, příčinný systém a signál
Diskrétní systém

Výstupní signál $y(n)$ kauzálního systému závisí pouze na současných a minulých hodnotách vstupního signálu $\{u(n), u(n-1), u(n-2), \ldots, u(0)\}$ takže v konvoluční sumě (6)

$$\begin{aligned} y(n) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)u(n-k) \\ &= \sum_{k=-\infty}^{-1} h(k)u(n-k) + \sum_{k=0}^{\infty} h(k)u(n-k) \end{aligned} \tag{11}$$

musíme položit všechny členy impulsní odezvy $h(k) = 0$ pro $k < 0$.

Kauzální, příčinný systém a signál
Diskrétní systém

Konvoluční suma pro lineární, časově invariantní a kauzální systém má tvar

$$y(n) = \sum_{k=0}^{\infty} h(k)u(n-k)\,. \tag{12}$$

Jestliže navíc budeme uvažovat vstupní a výstupní signály, které jsou nulové pro $n \leq 0$ a $u(n) \neq 0, y(n) \neq 0$ pouze pro $n \geq 0$, potom platí

$$y(n) = \sum_{k=0}^{n} h(k)u(n-k) = \sum_{k=0}^{n} u(k)h(n-k)\,. \tag{13}$$

Kauzální, příčinný systém a signál

Analogový systém

Lineární časově invariantní kauzální analogový systém

Podobně můžeme postupovat v analogovém případě a odvodit pro lineární časově invariantní systém konvoluční integrál

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} u(\tau)h(t-\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)u(t-\tau)d\tau\,. \tag{14}$$

Uvedený integrál opět nazýváme konvolucí a velmi často ho označujeme jako

$$y(t) = h(t) * u(t)\,. \tag{15}$$

Kauzální, příčinný systém a signál

Analogový systém

Funkce $h(t)$ se nazývá impulsní odezva. Jedná se o výstupní signál filtru, na jehož vstupu se uplatní Diracův impuls $u(t) = \delta(t)$. Platí totiž

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)\delta(t-\tau)d\tau = h(t)\,. \qquad (16)$$

Kauzální, příčinný systém a signál
Analogový systém

Z důvodů kauzality, která vyjadřuje zachování příčinné posloupnosti událostí při transformaci signálu ze vstupu na výstup, požadujeme

$$h(t) \neq 0 \quad \text{pro } t \geq 0\,, \tag{17}$$

$$h(t) = 0 \quad \text{pro } t < 0\,. \tag{18}$$

Potom přirozeně můžeme konvoluční integrál (14) psát ve tvaru

$$y(t) = \int_0^\infty h(\tau)u(t-\tau)d\tau\,. \tag{19}$$

Shrnutí

Spojitost, Linearita, Kauzalita, Autonomita, Časová invariance

$$\ddot{y}(t) \cdot \dot{y}(t) + \cos\left[\frac{\omega}{2\pi}\right] \cdot y(t) = 0$$

$$y(n+2) + \cos n\, y(n+1) - a\, y(n) = 5$$

$$y(n+2) + \cos n \cdot y(n+1) \cdot \; y(n) = 0$$

$$\ddot{y}(t) + \cos \dot{y}(t)\omega + y(t) = \frac{1}{t^2 - 1}$$

$$y(n+2) \cdot y(n+1) + \cos\left[\frac{\omega}{2\pi}\right] y(n) = 5$$

Část II

Příklady modelů v Simulinku

Obsah přednášky

5. Model Nabídka-poptávka
6. Model Fakulta
7. Model Ovce & vlci

Model Nabídka-poptávka
Popis

Vyjděme z ekonomického modelu, kdy nabídka s v $n-$tém časovém intervalu $s(n)$ je přímo úměrná ceně produktu v minulém časovém intervalu $p(n-1)$ a naopak poptávka d v $n-$tém časovém intervalu $d(n)$ je přímo úměrná současné záporné ceně produktu $p(n)$.

Tento model je realistický, neboť čím byla v minulosti větší cena, tím je dnes větší nabídka a naopak, čím je dnes větší cena, tím klesá i poptávka.

Model Nabídka-poptávka

Rovnice

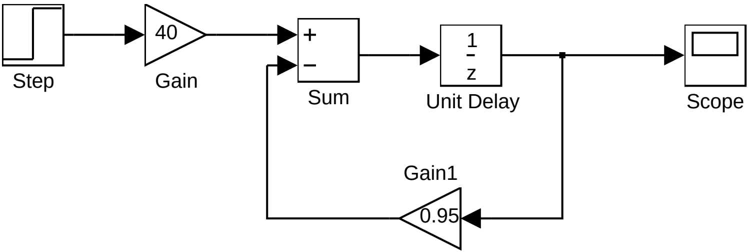
Zavedeme-li proměnnou $u(n)$, která charakterizuje počet vyrobených kusů produktu v čase n a podmínku, že nabídka v čase n se rovná poptávce v čase n, můžeme zapsat následující tři diferenční rovnice:

$$\begin{aligned} s(n) &= c \cdot p(n-1) + a \cdot u(n) \\ d(n) &= -d \cdot p(n) + b \cdot u(n) \\ s(n) &= d(n) \end{aligned} \tag{20}$$

$$p(n) + \left(\frac{c}{d}\right) \cdot p(n-1) = \frac{b-a}{d} \cdot u(n) \tag{21}$$

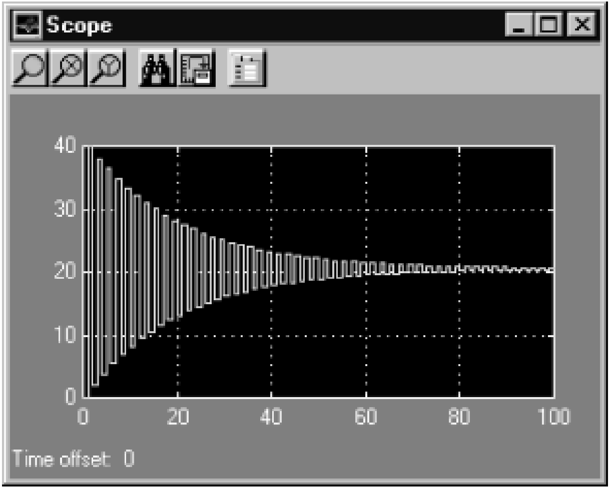
Model Nabídka-poptávka
Model

Použitím bloku jednotkového zpoždění `unit delay` je možno vytvořit blokové v Simulinku:

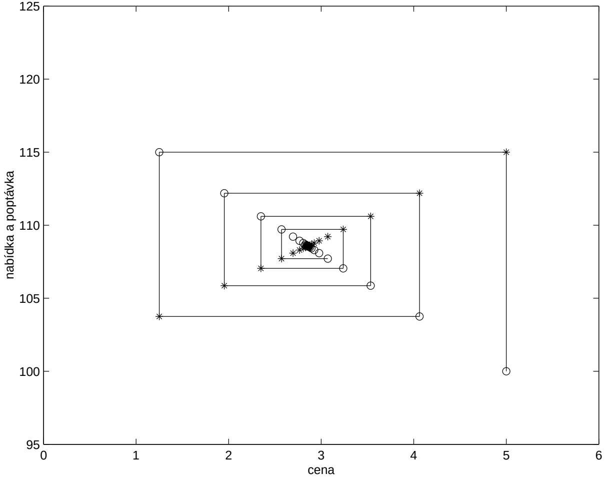


Model Nabídka-poptávka

Graf Vývoj ceny $c(n)$



Model Nabídka-poptávka
Graf - Pavučinkový diagram



Obsah přednášky

5 Model Nabídka-poptávka

6 Model Fakulta

7 Model Ovce & vlci

Model Fakulta

Popis

Vznik nové fakulty a výpočet předpokládaných absolventů takové fakulty jsou ukázkou diskrétního stavového systému, ve kterém složka stavového vektoru x_i reprezentuje počet studentů v i-tém ročníku. Předpokládejme, že do prvního ročníku budeme přijímat pravidelně každý rok $u(n)$ studentů. Jestliže z každého ročníku postoupí bez potíží $a_1 x_i$ studentů, opakuje $a_2 x_i$ studentů a fakultu opustí $a_3 x_i$ studentů, kde $a_1 + a_2 + a_3 = 1$, nalezněte počty absolventů, pokud úspěšnost u státních závěrečných zkoušek je a α.

Model Fakulta

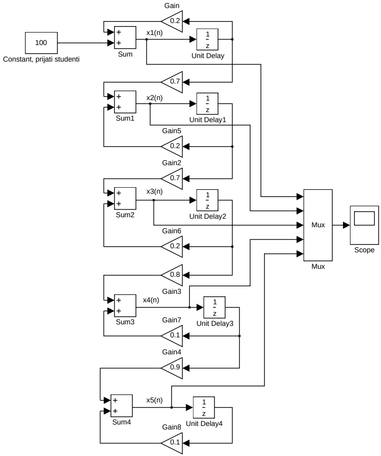
Rovnice

Stavový popis této vzorové situace je

$$\begin{bmatrix} x_1(n+1) \\ x_2(n+1) \\ x_3(n+1) \\ x_4(n+1) \\ x_5(n+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_1 & a_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_1 & a_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_1 & a_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_1 & a_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(n) \\ x_2(n) \\ x_3(n) \\ x_4(n) \\ x_5(n) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u(n)$$

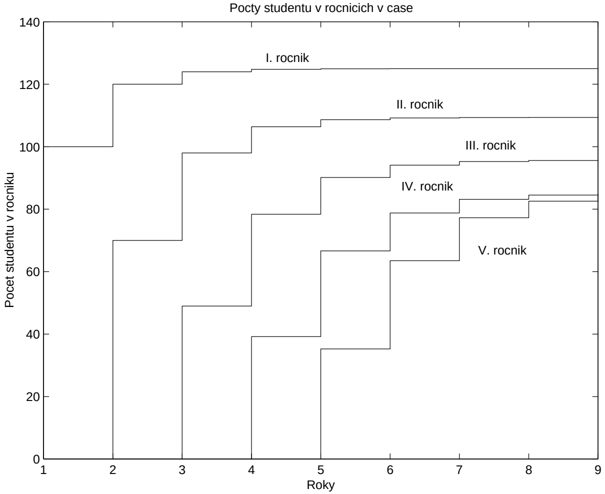
$$y(n+1) = \alpha x_5(n+1)$$

Model Fakulta
Model



Obrázek: Schéma modelu Fakulta v Simulinku

Model Fakulta
Graf



Obrázek: Vývoj počtu studentů v jednotlivých ročnících

Obsah přednášky

Model Ovce & blci

Popis

Nelineární stavový model **ovce a vlci** je variantou modelu v literatuře označovaného jako *Lotka-Volterra predator-prey model*. Týká se populace ovcí popsané stavovou proměnnou $x_1(t)$ a populace vlků popsané stavovou proměnnou $x_2(t)$. Dynamický model je dán nelineární soustavou stavových rovnic

$$\frac{d}{dt}x_1(t) = a\,x_1(t) - b\,x_1(t)x_2(t)\,, \tag{22}$$

$$\frac{d}{dt}x_2(t) = -c\,x_2(t) + d\,x_1(t)x_2(t)\,. \tag{23}$$

Model Ovce & Vlci

Rovnice

Žijí-li ovce a vlci odděleně, pro ovce platí rovnice

$$\frac{d}{dt}x_1(t) = a\,x_1(t) \tag{24}$$

jejímž řešením je exponenciální růst $x_1(t) = x_1(0)\,e^{at}$,.

Vlci bez potravy

$$\frac{d}{dt}x_2(t) = -c\,x_2(t) \tag{25}$$

exponenciálně hynou, $x_2(t) = x_2(0)\,e^{-ct}$.

Model Ovce & Vlci

Rovnice

Počet sežraných ovcí a nasycených vlků je úměrný počtu jejich setkání, tj. součinu $x_1(t)x_2(t)$, a proto v rovnici (2) počet ovcí klesá úměrně s

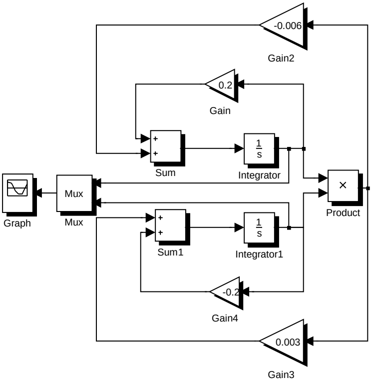
$$-b\,x_1(t)x_2(t),$$

zatímco v rovnici (3) se vlci mají dobře a jejich počet stoupá úměrně s

$$d\,x_1(t)x_2(t).$$

Model Ovce & Vlci

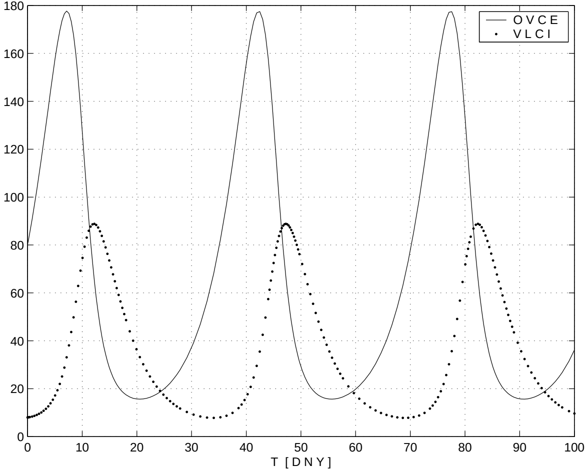
Model



Obrázek: Ovečky a vlci v modelu Lotka-Volterra

Model Ovce & Vlci

Graf



Obrázek: Ovečky a vlci v modelu Lotka-Volterra