Modelování systémů a procesů (K611MSAP)

Děčín - Přednáška 2

Vlček, Kovář, Pěnička, Přikryl

Katedra aplikované matematiky
Fakulta dopravní ČVUT

2. přednáška K611MSAP
čtvrtek 16. března 2006

Obsah první části

1. Předchozí přednáška
2. Matematický popis systému
3. Časová invariance
4. Kauzální systémy

Obsah druhé části

5 Model Nabídka-poptávka

6 Model Fakulta

7 Model Ovce & Vlci

Část I

Linearita, časová invariance a kauzalita

Předchozí přednáška

- Matematické modelování,
- Základní spojité/diskrétní signály
  - Diracův impuls,
  - Jednotkový skok,
  - Sinusová funkce,
  - Exponenciála
- Systém a podsystém
- Popis systému
  - Vnější popis
  - Vnitřní popis
- Linearita systému

Předchozí přednáška

- Matematické modelování,
- Základní spojité/diskrétní signály
  - Diracův impuls,
  - Jednotkový skok,
  - Sinusová funkce,
  - Exponenciála
- Systém a podsystém
- Popis systému
  - Vnější popis
  - Vnitřní popis
- Linearita systému

Předchozí přednáška

- Matematické modelování,
- Základní spojité/diskrétní signály
    - Diracův impuls,
    - Jednotkový skok,
    - Sinusová funkce,
    - Exponenciála
- Systém a podsystém
- Popis systému
    - Vnější popis
    - Vnitřní popis
- Linearita systému

Předchozí přednáška

- Matematické modelování,
- Základní spojité/diskrétní signály
  - Diracův impuls,
  - Jednotkový skok,
  - Sinusová funkce,
  - Exponenciála
- Systém a podsystém
- Popis systému
  - Vnější popis
  - Vnitřní popis
- Linearita systému

Předchozí přednáška

- Matematické modelování,
- Základní spojité/diskrétní signály
  - Diracův impuls,
  - Jednotkový skok,
  - Sinusová funkce,
  - Exponenciála
- Systém a podsystém
- Popis systému
  - Vnější popis
  - Vnitřní popis
- Linearita systému

Předchozí přednáška

- Matematické modelování,
- Základní spojité/diskrétní signály
  - Diracův impuls,
  - Jednotkový skok,
  - Sinusová funkce,
  - Exponenciála
- Systém a podsystém
- Popis systému
  - Vnější popis
  - Vnitřní popis
- Linearita systému

Předchozí přednáška

- Matematické modelování,
- Základní spojité/diskrétní signály
  - Diracův impuls,
  - Jednotkový skok,
  - Sinusová funkce,
  - Exponenciála
- Systém a podsystém
- Popis systému
  - Vnější popis
  - Vnitřní popis
- Linearita systému

Předchozí přednáška

- Matematické modelování,
- Základní spojité/diskrétní signály
  - Diracův impuls,
  - Jednotkový skok,
  - Sinusová funkce,
  - Exponenciála
- Systém a podsystém
- Popis systému
  - Vnější popis
  - Vnitřní popis
- Linearita systému

Předchozí přednáška

- Matematické modelování,
- Základní spojité/diskrétní signály
  - Diracův impuls,
  - Jednotkový skok,
  - Sinusová funkce,
  - Exponenciála
- Systém a podsystém
- Popis systému
  - Vnější popis
  - Vnitřní popis
- Linearita systému

Předchozí přednáška

- Matematické modelování,
- Základní spojité/diskrétní signály
  - Diracův impuls,
  - Jednotkový skok,
  - Sinusová funkce,
  - Exponenciála
- Systém a podsystém
- Popis systému
  - Vnější popis
  - Vnitřní popis
- Linearita systému

Matematický popis systému
Vstup a výstup

Jednotkový impuls je posloupnost $\delta(n) = 0$ pro všechna $n \neq 0$ s výjimkou $\delta(0) = 1$.

Odezvu systému na jednotkový impuls $\delta(n)$ budeme nazývat impulsní odezvou.

Pro obecný popis systémové funkce $\mathcal{S}\left[*\right]$ platí

$$h(n) = \mathcal{S}\left[\delta(n)\right] \qquad \& \qquad h(n,m) = \mathcal{S}\left[\delta(n-m)\right] . \tag{1}$$

Matematický popis systému

Vstup a výstup

Jednotkový skok $1(n)$ je posloupnost jedniček od počátku časové osy $n = 0$, kterou můžeme zapsat pomocí součtu

$$1(n) = \sum_{m=0}^{n} \delta(n-m) = \tag{2}$$
$$= \delta(n) + \delta(n-1) + \delta(n-2) + \cdots + \delta(0)$$

Matematický popis systému

Přechodová odezva

Odezva systému na jednotkový skok $1(n)$ se nazývá přechodová odezva $s(n)$

$$\begin{aligned} s(n) &= \mathcal{S}\left[1(n)\right] = \mathcal{S}\left[\sum_{m=0}^{n} \delta(n-m)\right] \\ &= \sum_{m=0}^{n} \mathcal{S}\left[\delta(n-m)\right] \\ &= \sum_{m=0}^{n} h(n,m)\,. \end{aligned} \tag{3}$$

Časová invariance
Definice

Systém nazveme časově invariantním, pokud jsou všechny události v čase závislé pouze na časovém intervalu (rozdílu časových událostí) $n - m$, nikoliv na každém časovém okamžiku n a m samostatně.

Potom také rovnice (1) pro impulsní odezvu přejde z maticového tvaru na prostý vektorový zápis

$$h(n,m) \rightarrow h(n-m) \quad = \quad \mathcal{S}\left[\delta(n-m)\right] \; . \qquad (4)$$

Lineární systém
Vstup a výstup

V lineárním systému platí pro vstupní $u(n)$ a výstupní $y(n)$ signál princip superpozice:

$$
\begin{aligned}
y(n) &= \mathcal{S}\left[u(n)\right] = \mathcal{S}\left[\sum_{m=-\infty}^{\infty} u(m)\delta(n-m)\right] \\
&= \sum_{m=-\infty}^{\infty} u(m)\mathcal{S}\left[\delta(n-m)\right] \\
&= \sum_{m=-\infty}^{\infty} u(m)h(n,m) \qquad (5)
\end{aligned}
$$

Časová invariance

Konvoluční suma

V důsledku časové invariance dostáváme z rovnice (5) konvoluční sumu

$$y(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} h(n-m)u(m) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)u(n-k)\,, \qquad (6)$$

která bývá občas značená

$$y(n) = h(n) * u(n) = u(n) * h(n)\,. \qquad (7)$$

Časová invariance

Příklad časově invariantního systému

Uvažujme mikroekonomický systém variace ceny popsaný diferenční rovnici

$$y(n) + ay(n-1) = u(n)\,. \tag{8}$$

Protože její koeficienty nezávisí na čase, tj. a není funkcí n, zachovává tato rovnice tvar při záměně $n \to n-m$ tvar. Impulsní odezva je potom

$$h(n) = (-a)^n 1(n) \tag{9}$$

Časová invariance

Příklad časově proměnného systému

Uvažujme diferenční rovnici

$$y(n) + ny(n-1) = u(n)\,. \tag{10}$$

Protože koeficient u $y(n-1)$ závisí na čase, nezachovává tato rovnice tvar při záměně $n \to n - m$ tvar.

Kauzální, příčinný systém a signál

Diskrétní systém

Výstupní signál $y(n)$ kauzálního systému závisí pouze na současných a minulých hodnotách vstupního signálu $\{u(n), u(n-1), u(n-2), \ldots, u(0)\}$ takže v konvoluční sumě (6)

$$\begin{aligned} y(n) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)u(n-k) \qquad (11) \\ &= \sum_{k=-\infty}^{-1} h(k)u(n-k) + \sum_{k=0}^{\infty} h(k)u(n-k) \end{aligned}$$

musíme položit všechny členy impulsní odezvy $h(k) = 0$ pro $k < 0$.

Kauzální, příčinný systém a signál

Diskrétní systém

Konvoluční suma pro lineární, časově invariantní a kauzální systém má tvar

$$y(n) = \sum_{k=0}^{\infty} h(k)u(n-k)\,. \tag{12}$$

Jestliže navíc budeme uvažovat vstupní a výstupní signály, které jsou nulové pro $n \leq 0$ a $u(n) \neq 0, y(n) \neq 0$ pouze pro $n \geq 0$, potom platí

$$y(n) = \sum_{k=0}^{n} h(k)u(n-k) = \sum_{k=0}^{n} u(k)h(n-k)\,. \tag{13}$$

Kauzální, příčinný systém a signál

Analogový systém

Lineární časově invariantní kauzální analogový systém

Podobně můžeme postupovat v analogovém případě a odvodit pro lineární časově invariantní systém konvoluční integrál

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} u(\tau)h(t-\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)u(t-\tau)d\tau\,. \qquad (14)$$

Uvedený integrál opět nazýváme konvolucí a velmi často ho označujeme jako

$$y(t) = h(t) * u(t)\,. \qquad (15)$$

Kauzální, příčinný systém a signál

Analogový systém

Funkce $h(t)$ se nazývá impulsní odezva. Jedná se o výstupní signál filtru, na jehož vstupu se uplatní Diracův impuls $u(t) = \delta(t)$. Platí totiž

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)\delta(t-\tau)d\tau = h(t)\,. \tag{16}$$

Kauzální, příčinný systém a signál
Analogový systém

Z důvodů kauzality, která vyjadřuje zachování příčinné posloupnosti událostí při transformaci signálu ze vstupu na výstup, požadujeme

$$h(t) \neq 0 \quad \text{pro } t \geq 0\,, \tag{17}$$

$$h(t) = 0 \quad \text{pro } t < 0\,. \tag{18}$$

Potom přirozeně můžeme konvoluční integrál (14) psát ve tvaru

$$y(t) = \int_0^{\infty} h(\tau)u(t-\tau)d\tau\,. \tag{19}$$

Část II

Příklady modelů v Simulinku

Model Nabídka-poptávka

Popis

Vyjděme z ekonomického modelu, kdy nabídka s v $n-$tém časovém intervalu $s(n)$ je přímo úměrná ceně produktu v minulém časovém intervalu $p(n-1)$ a naopak poptávka d v $n-$tém časovém intervalu $d(n)$ je přímo úměrná současné záporné ceně produktu $p(n)$.

Tento model je realistický, neboť čím byla v minulosti větší cena, tím je dnes větší nabídka a naopak, čím je dnes větší cena, tím klesá i poptávka.

Model Nabídka-poptávka

Rovnice

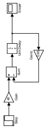
Zavedeme-li proměnnou $u(n)$, která charakterizuje počet vyrobených kusů produktu v čase n a podmínku, že nabídka v čase n se rovná poptávce v čase n, můžeme zapsat následující tři diferenční rovnice:

$$
\begin{aligned}
s(n) &= c \cdot p(n-1) + a \cdot u(n) \\
d(n) &= -d \cdot p(n) + b \cdot u(n) \\
s(n) &= d(n)
\end{aligned} \tag{20}
$$

$$
p(n) + \left(\frac{c}{d}\right) \cdot p(n-1) = \frac{b-a}{d} \cdot u(n) \tag{21}
$$

Model Nabídka-poptávka
Model

Použitím bloku jednotkového zpoždění `unit delay` je možno vytvořit blokové v Simulinku:



Model Nabídka-poptávka

Graf Vývoj ceny $c(n)$

Model Fakulta
Popis

Vznik nové fakulty a výpočet předpokládaných absolventů takové fakulty jsou ukázkou diskrétního stavového systému, ve kterém složka stavového vektoru x_i reprezentuje počet studentů v i-tém ročníku. Předpokládejme, že do prvního ročníku budeme přijímat pravidelně každý rok $u(n)$ studentů. Jestliže z každého ročníku postoupí bez potíží $a_1 x_i$ studentů, opakuje $a_2 x_i$ studentů a fakultu opustí $a_3 x_i$ studentů, kde $a_1 + a_2 + a_3 = 1$, nalezněte počty absolventů, pokud úspěšnost u státních závěrečných zkoušek je a α.

Model Fakulta

Rovnice

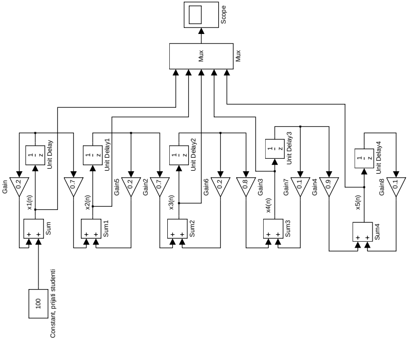
Stavový popis této vzorové situace je

$$\begin{bmatrix} x_1(n+1) \\ x_2(n+1) \\ x_3(n+1) \\ x_4(n+1) \\ x_5(n+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_1 & a_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_1 & a_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_1 & a_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_1 & a_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(n) \\ x_2(n) \\ x_3(n) \\ x_4(n) \\ x_5(n) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u(n)$$

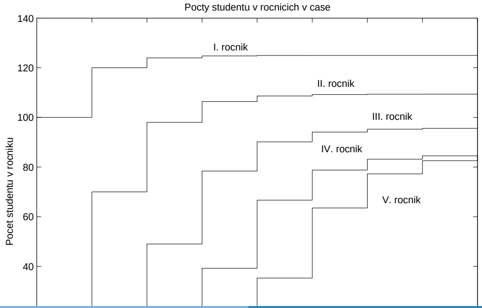
$$y(n+1) = \alpha x_5(n+1)$$

Model Fakulta

Model



Model Fakulta
Graf



Model Ovce & Vlci

Popis

Nelineární stavový model **vlci a ovce**, který je znám v literatuře jako **Lotka - Volterra predator-prey model**, se týká populace ovcí popsané stavovou proměnnou $x_1(t)$ a populace vlků popsané stavovou proměnnou $x_2(t)$. Dynamický model je dán nelineární soustavou stavových rovnic

$$\frac{d}{dt}x_1(t) = a\,x_1(t) - b\,x_1(t)x_2(t)\,, \tag{22}$$

$$\frac{d}{dt}x_2(t) = -c\,x_2(t) + d\,x_1(t)x_2(t)\,. \tag{23}$$

Model Ovce & Vlci
Rovnice

Žijí-li ovce a vlci odděleně, pro ovce platí rovnice

$$\frac{d}{dt} x_1(t) = a\, x_1(t) \tag{24}$$

jejímž řešením je exponenciální růst $x_1(t) = x_1(0)\, e^{at},$.

Vlci bez potravy

$$\frac{d}{dt} x_2(t) = -c\, x_2(t) \tag{25}$$

exponenciálně hynou, $x_2(t) = x_2(0)\, e^{-ct}$.

Model Ovce & Vlci

Rovnice

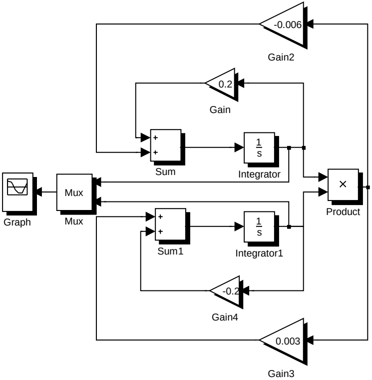
Počet sežraných ovcí a nasycených vlků je úměrný počtu jejich setkání, tj. součinu $x_1(t)x_2(t)$, a proto v rovnici (2) počet ovcí klesá úměrně s

$$-b\,x_1(t)x_2(t),$$

zatímco v rovnici (3) se vlci mají dobře a jejich počet stoupá úměrně s

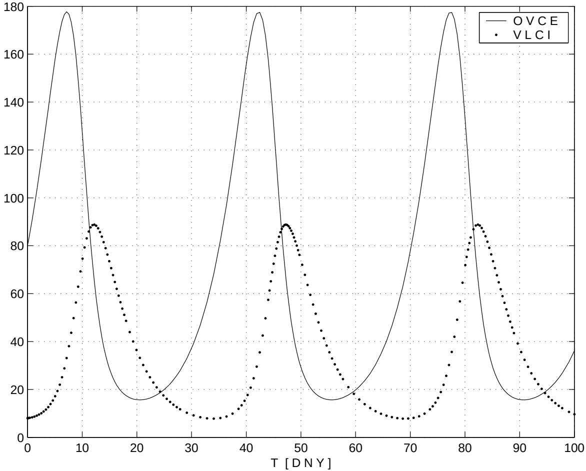
$$d\,x_1(t)x_2(t).$$

Model Ovce & Vlci
Model



Obrázek: Ovečky a vlci v modelu Lotka-Volterra

Model Ovce & Vlci
Graf



Spojitý stavový sytém	Diskrétní stavový systém
$\mathbf{u}(t)$ ... vstupní (řídicí) vektor $\mathbf{x}(t)$ ... stavový vektor $\mathbf{y}(t)$ ... výstupní vektor	$\mathbf{u}(n)$ ... vstupní (řídicí) vektor $\mathbf{x}(n)$ ... stavový vektor $\mathbf{y}(n)$ ... výstupní vektor
Obecný tvar stavových rovnic	Obecný tvar stavových rovnic
$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t)$ $\mathbf{y}(t) = \mathbf{g}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t)$	$\mathbf{x}(n+1) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(n), \mathbf{u}(n), n)$ $\mathbf{y}(n) = \mathbf{g}(\mathbf{x}(n), \mathbf{u}(n), n)$

Spojitý stavový sytém	**Diskrétní stavový systém**
Lineární stavový systém	Lineární stavový systém
$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}(t)\,\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}(t)\,\mathbf{u}(t)$ $\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}(t)\,\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}(t)\mathbf{u}(t)$ $\mathbf{A}(t)$ je matice systému $(n \times n)$ $\mathbf{B}(t)$ je matice vstupů $(n \times r)$ $\mathbf{C}(t)$ je výstupní matice $(m \times n)$ $\mathbf{D}(t)$ je výstupní matice $(m \times r)$	$\mathbf{x}(n+1) = \mathbf{M}(n)\mathbf{x}(n) + \mathbf{N}(n)\mathbf{u}(n)$ $\mathbf{y}(n) = \mathbf{C}(n)\,\mathbf{x}(n) + \mathbf{D}(n)\mathbf{u}(n)$ $\mathbf{M}(n)$ je matice systému $\mathbf{N}(n)$ je matice vstupů (řízení) $\mathbf{C}(n)$ je výstupní matice $\mathbf{D}(n)$ je výstupní matice
Stacionární stavový systém	Stacionární stavový systém
matice **A**, **B**, **C**, **D** jsou nezávislé na čase	matice **M**, **N**, **C**, **D** jsou nezávislé na čase