Modelování systémů a procesů (K611MSAP)

Děčín – přednáška 5

Vlček, Přikryl, Kovář, Pěnička

Ústav aplikované matematiky
ČVUT v Praze, Fakulta dopravní

5. přednáška K611MSAP
čtvrtek 7. května 2009

Obsah přednášky

Diskretizace spojitého signálu

Jak se ze spojitého systému stane systém diskrétní

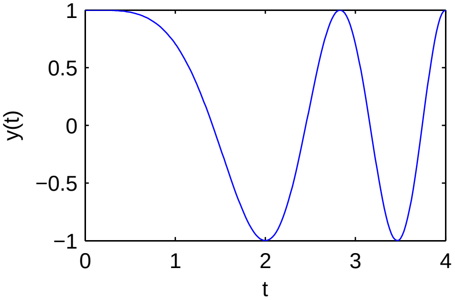
Analogové $\times$ digitální zpracování signálů

- dopravní prostředky
- telekomunikační technologie
- multimédia

Spojitý signál **vzorkujeme** se vzorkovací periodou T.

Diskretizace

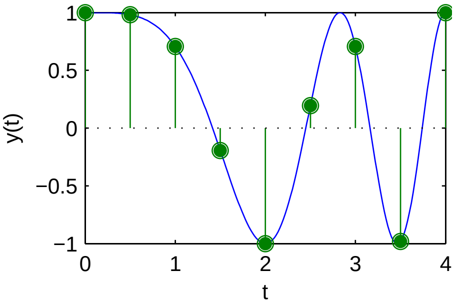
Postup



Spojitý signál vzorkovaný s periodou $T = 0{,}5s$

Diskretizace

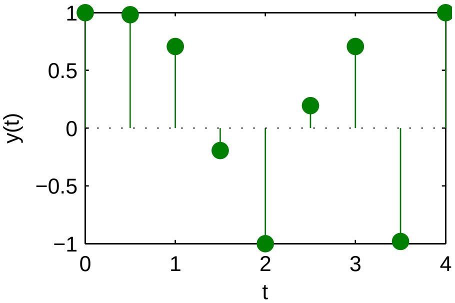
Postup



Spojitý signál vzorkovaný s periodou $T = 0{,}5s$

Diskretizace

Postup



Spojitý signál vzorkovaný s periodou $T = 0{,}5s$

Diskretizace systému

Hlavní rysy

Diskretizací systému

- *zjednodušujeme* jeho výpočetní model,
- *ztrácíme* ale mnoho užitečných informací o tom, jak se systém chová.

Nevhodnou volbou periody vzorkování můžeme dokonce spojitý stabilní systém transformovat na nestabilní diskrétní systém.

Obsah přednášky

Matematické nářadí

Motivace

Analýza či návrh systému v **časové oblasti** (vstupy a výstupy jsou funkcí času) jsou velmi pracné.

Převod do **frekvenční oblasti** (vstupy a výstupy jsou funkcí komplexní proměnné nazývané *úhlová frekvence*) nám

- poskytuje fundamentálně odlišný nástroj k pochopení funkce systému,
- často drasticky sníží složitost matematických výpočtů potřebných pro analýzu systému.

Řekli jsme si, že pro analýzu spojitých systémů lze s výhodou použít Laplaceovy transformace. Pro diskrétní systémy existuje podobný nástroj – $\mathcal{Z}$**-transformace**.

Obsah přednášky

$\mathcal{Z}$-transformace

Definice

Jednostranná $\mathcal{Z}$-transformace posloupnosti $f(n)$ je definována nekonečnou řadou

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f(n) z^{-n},$$

kterou často označujeme $F(z) = \mathcal{Z}\left[f(n)\right]$.
Zpětná $\mathcal{Z}$-transformace má tvar integrálu podél uzavřené křivky $\mathcal{C}$, jež obsahuje všechny singulární body funkce $F(z)$. Pro všechna $n = 0, 1, \ldots, \infty$ platí

$$f(n) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\mathcal{C}} F(z) z^{n-1} \mathrm{d}z \equiv \mathcal{Z}^{-1}\left[F(z)\right] .$$

Vlastnosti $\mathcal{Z}$-transformace

Linearita

$\mathcal{Z}$-transformace je lineární:

$$\mathcal{Z}\left[\sum_k a_k f_k(n)\right] = \sum_k a_k \mathcal{Z}\left[f_k(n)\right]$$

$$\mathcal{Z}^{-1}\left[\sum_m b_m F_m(z)\right] = \sum_m b_m \mathcal{Z}^{-1}\left[F_m(z)\right]$$

Vlastnosti $\mathcal{Z}$-transformace

Změna měřítka

Pro $\mathcal{Z}$-transformaci platí věta o změně měřítka vzoru a obrazu:

$$\begin{aligned} a^{-n} f(n) &= \mathcal{Z}^{-1}\left[F(az)\right] \\ F(a^{-1}z) &= \mathcal{Z}\left[a^{n} f(n)\right] \end{aligned}$$

Vlastnosti $\mathcal{Z}$-transformace

Posunutí

Věty o posunutí jsou velmi důležité pro transformaci diferenčních rovnic na algebraické rovnice v $\mathcal{Z}$-rovině, podobně, jako je tomu u spojitých systémů s větami o obrazu derivací v Laplaceově transformaci.

$$\mathcal{Z}\left[f(n-m)\right] = z^{-m}\mathcal{Z}\left[f(n)\right] = z^{-m}F(z)\,\Big|_{\forall n-m<0:\, f(n-m)=0}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{Z}\left[f(n+m)\right] &= z^{m}\left[\mathcal{Z}\left[f(n)\right] - \sum_{\nu=0}^{m-1} f(\nu)z^{-\nu}\right]\\ &= z^{m}\left[F(z) - \sum_{\nu=0}^{m-1} f(\nu)z^{-\nu}\right]\end{aligned}$$

Vlastnosti $\mathcal{Z}$-transformace

Transformace částečné sumy

Částečnou sumu posloupnosti $f(n)$ lze transformovat jako

$$
\begin{aligned}
\mathcal{Z}\left[\sum_{\nu=0}^{n-1} f(\nu)\right] &= \frac{1}{z-1} \\
\mathcal{Z}\left[f(n)\right] &= \frac{1}{z-1} F(z)
\end{aligned}
$$

Vlastnosti $\mathcal{Z}$-transformace

Transformace diferencí

Pro $m = 1, 2, \ldots, \infty$ a diference m-tého řádu

$$\begin{aligned}
\Delta^0 f(n) &= f(n), \\
\Delta^1 f(n) &= f(n+1) - f(n), \\
\Delta^m f(n) &= \Delta \left[\Delta^{m-1} f(n)\right]
\end{aligned}$$

platí tato věta o transformaci diferencí:

$$\begin{aligned}
\mathcal{Z}\left[\Delta^1 f(n)\right] &= (z-1)F(z) - f(0)z \\
\mathcal{Z}\left[\Delta^2 f(n)\right] &= (z-1)^2 F(z) - f(0)z(z-1) + \Delta^1 f(0)z
\end{aligned}$$

Vlastnosti $\mathcal{Z}$-transformace

Obraz konvoluce

Podobně, jako ve spojitém případě, i pro $\mathcal{Z}$-transformaci platí tato věta o transformaci konvoluční sumy:

$$\mathcal{Z}\left[f(n) * g(n)\right] = \mathcal{Z}\left[\sum_{m=0}^{\infty} f(n-m)g(m)\right] = F(z) \cdot G(z)$$

Vlastnosti $\mathcal{Z}$-transformace

Derivace obrazu

Jednoduchá derivace obrazu $F(z)$ se na vzoru $f(n)$ projeví jako násobení proměnnou n:

$$\mathcal{Z}\left[nf(n)\right] = z\frac{\mathrm{d}F(z)}{\mathrm{d}z}$$

Tabulka $\mathcal{Z}$-transformace

$f(n) = \mathcal{Z}^{-1}[F(z)]$	$F(z) = \mathcal{Z}[f(n)]$
$\delta(n)$	1
$1(n)$	$\frac{1}{1 - z^{-1}}$
a^n	$\frac{1}{1 - a \cdot z^{-1}}$
n	$\frac{z^{-1}}{(1 - z^{-1})^2}$
$n \cdot a^{n-1}$	$\frac{z^{-1}}{(1 - az^{-1})^2}$

Obsah přednášky

Inverzní $\mathcal{Z}$-transformace

Definice

Zpětná $\mathcal{Z}$-transformace má tvar integrálu podél uzavřené křivky $\mathcal{C}$, která obsahuje všechny singulární body funkce $Y(z)$. Pro všechna $n = 0, 1, \ldots, \infty$ platí

$$y(n) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\mathcal{C}} Y(z) z^{n-1} \mathrm{d}z \equiv \mathcal{Z}^{-1}\left[Y(z)\right].$$

Inverzní $\mathcal{Z}$-transformace

Výpočet

Poté, co jsme vyřešili algebraickou rovnici a získali transformovaný obraz řešení $Y(z)$, je třeba tento obraz převést zpět do roviny diskrétního času na hledanou funkci $y(n)$.

V zásadě lze použít dva postupy:

- zpětná transformace pomocí definičního integrálu,
- rozklad řešení na součet parciálních zlomků a použití tabulek pro zpětnou transformaci primitivních funkcí.

Pro praktické nasazení je samozřejmě výrazně vhodnější druhá varianta.

Inverzní $\mathcal{Z}$-transformace

Metoda výpočtu pomocí parciálních zlomků

Předpokládejme, že $Y(z) = \dfrac{Q(z)}{N(z)}$ je racionální lomenou funkcí.

O racionální lomené funkci $\dfrac{Q(z)}{N(z)}$ říkáme, že má nulové body $z_{0\nu}$, jestliže $Q(z_{0\nu}) = 0$ a že má póly $z_{\infty\mu}$, jestliže $N(z_{\infty\mu}) = 0$.

Pokud má funkce $\dfrac{Q(z)}{N(z)}$ jednoduché póly, potom

$$N(z) = \prod_{\mu=1}^{N} (1 - z_{\infty\mu} z^{-1}) = (1 - z_{\infty 1} z^{-1})(1 - z_{\infty 2} z^{-1}) \dots (1 - z_{\infty N} z^{-1})$$

Inverzní $\mathcal{Z}$-transformace

Rozklad racionální lomené funkce na parciální zlomky

$$\begin{aligned}\frac{Q(z)}{N(z)} &= \sum_{\mu=1}^{N} \frac{k_\mu}{1 - z_{\infty\mu} z^{-1}} \\ &= \frac{k_1}{1 - z_{\infty 1} z^{-1}} + \frac{k_2}{1 - z_{\infty 2} z^{-1}} + \cdots + \frac{k_N}{1 - z_{\infty N} z^{-1}},\end{aligned}$$

kde

$$k_\mu = \lim_{z \to z_{\infty\mu}} (1 - z_{\infty\mu} z^{-1}) \frac{Q(z)}{N(z)}$$

Inverzní $\mathcal{Z}$-transformace

Koeficienty k_μ

$$
\begin{aligned}
k_\mu &= \lim_{z \to z_{\infty\mu}} (1 - z_{\infty\mu} z^{-1}) \frac{Q(z)}{N(z)} \\
&= Q(z_{\infty\mu}) \lim_{z \to z_{\infty\mu}} (1 - z_{\infty\mu} z^{-1}) \frac{1}{N(z)} \\
&= Q(z_{\infty\mu}) \lim_{z \to z_{\infty\mu}} \frac{1}{\dfrac{N(z)}{1 - z_{\infty\mu} z^{-1}}} \\
&= Q(z_{\infty\mu}) \frac{1}{N'(z_{\infty\mu})}
\end{aligned}
$$

Inverzní $\mathcal{Z}$-transformace

Rozklad racionální lomené funkce na parciální zlomky

Pro jednoduchost budeme dále psát $z_{\infty\mu} \rightarrow z_\mu$. Pro $|az^{-1}| < 1$ platí

$$\mathcal{Z}^{-1}\left[\frac{1}{1 - az^{-1}}\right] = \mathcal{Z}^{-1}\left[\sum_{n=0}^{\infty} a^n z^{-n}\right] = a^n$$

dostaneme

$$\mathcal{Z}^{-1}\left[\frac{Q(p)}{N(p)}\right] = \mathcal{Z}^{-1}\left[\sum_{\mu=1}^{N} \frac{k_\mu}{1 - z_\mu z^{-1}}\right] = \sum_{\mu=1}^{N} k_\mu z_\mu^n.$$

Tím jsme (již podruhé) dokázali vzorec pro zpětnou transformaci racionální lomené funkce s jednoduchými póly.

Obsah přednášky

Výška splátek

Popis problému

Jedna ze základních úloh úrokového počtu řeší, jaká musí být výše měsíční splátky m, pokud si půjčíme sumu S na dobu N měsíců s fixním ročním úrokem p procent a měsíčním úročení.

Označíme-li $y(n)$ výši nesplaceného úvěru po n měsících, obdržíme pro měsíční úrok $\mu = p/12$ dlužné částky

$$\begin{aligned} y(0) &= S \\ y(1) &= y(0) \cdot (1+\mu) - m \\ y(2) &= y(1) \cdot (1+\mu) - m \\ &\vdots \\ y(n+1) &= y(n) \cdot (1+\mu) - m \end{aligned}$$

Výška splátek

Popis problému

Máte-li pocit, že na tento problém stačí použít vzoreček pro součet prvních N prvků aritmetické posloupnosti, máte pravdu.

My si ale na této jednoduché diferenční rovnici budeme ilustrovat řešení pomocí $\mathcal{Z}$-transformace.

Výška splátek

$\mathcal{Z}$-transformace diferenční rovnice

Za přepokladu $y(0) = S$ dostaneme z rovnice

$$y(n+1) = y(n) \cdot (1+\mu) - m \cdot \mathbf{1}(n)$$

s použitím $\mathcal{Z}$-transformace algebraickou rovnici

$$z \cdot Y(z) - z \cdot S = Y(z) \cdot (1+\mu) - m \cdot \frac{1}{1 - z^{-1}}$$

a z ní po vynásobení z^{-1}

$$Y(z) \left[1 - (1+\mu) z^{-1} \right] = S - m \cdot \frac{z^{-1}}{1 - z^{-1}}$$

Výška splátek

$\mathcal{Z}$-transformace diferenční rovnice

Pravou stranu ještě upravíme

$$Y(z)\left[1-(1+\mu)z^{-1}\right]=\frac{S-(S+m)z^{-1}}{1-z^{-1}}$$

a vyjádříme $Y(z)$

$$Y(z)=\frac{S-(S+m)z^{-1}}{(1-(1+\mu)z^{-1})(1-z^{-1})}$$

Výška splátek
Rozklad na parciální zlomky

Rozklad na parciální zlomky ve tvaru

$$Y(z) = \frac{k_1}{1 - z^{-1}} + \frac{k_2}{1 - (1+\mu)z^{-1}}$$

najdeme jako

$$z^{-1} \to 1 \quad \dots \quad k_1 = \frac{S - (S+m)\cdot 1}{1 - (1+\mu)\cdot 1} = \frac{m}{\mu},$$

$$z^{-1} \to \frac{1}{1+\mu} \quad \dots \quad k_2 = \frac{S - (S+m)\cdot \frac{1}{1+\mu}}{1 - \frac{1}{1+\mu}} = S - \frac{m}{\mu}.$$

Výška splátek

Řešení diferenční rovnice

Nesplacená částka po n měsících je tedy

$$y(n) = \frac{m}{\mu} + (S - (\frac{m}{\mu}) \cdot (1 + \mu)^n.$$

Pro původní úlohu je $y(N) = 0$ a tedy

$$0 = m + (S\mu - m) \cdot (1 + \mu)^N,$$

a po troše úprav

$$m = \frac{S\mu(1 + \mu)^N}{(1 + \mu)^N - 1}.$$

Nabídka – poptávka

Popis problému

Mikroekonomický model variace ceny vlivem nabídky a poptávky popisuje pomocí dvou diferenčních rovnic vývoj ceny zboží jako funkce nabídky tohoto zboží na trhu (1. rovnice) a poptávky po tomto zboží (2. rovnice).

Rovnice nabídky říká, že nabídka *dnes* závisí na *včerejší* ceně a to tak, že nabídka stoupá s rostoucí cenou. Pro $\mathcal{C} > 0$ platí

$$n(k) = \mathcal{C}c(k-1) + \mathcal{A}x(k). \tag{1}$$

Rovnice poptávky říká, že poptávka *dnes* závisí na *dnešní* ceně a to tak, že poptávka klesá s rostoucí cenou. Pro $\mathcal{D} > 0$ platí

$$p(k) = -\mathcal{D}c(k) + \mathcal{B}x(k). \tag{2}$$

Nabídka – poptávka
Diferenční rovnice

Rovnost nabídky a poptávky

$$n(k) = p(k) \tag{3}$$

pak vede na diferenční rovnici prvního řádu

$$c(k) + \frac{\mathcal{C}}{\mathcal{D}} c(k-1) = \frac{\mathcal{B} - \mathcal{A}}{\mathcal{D}} x(k). \tag{4}$$

Nabídka – poptávka
Transformace proměnných

Pro jednoduchost označíme

$$\frac{\mathcal{C}}{\mathcal{D}} \equiv \gamma\,, \qquad \frac{\mathcal{B}-\mathcal{A}}{\mathcal{D}} \equiv \alpha.$$

Diferenční rovnice má v označení $c(k) \equiv y(k)$ tvar

$$y(k) + \gamma y(k-1) = \alpha x(k)$$

Nabídka – poptávka

$\mathcal{Z}$-transformace diferenční rovnice

Za přepokladu $x(k) \equiv 1(k)$ dostaneme z rovnice

$$y(k) + \gamma y(k-1) = \alpha x(k)$$

s použitím $\mathcal{Z}$-transformace algebraickou rovnici

$$Y(z) + \gamma z^{-1} Y(z) = \frac{\alpha}{1 - z^{-1}}$$

s řešením v rovině $\mathcal{Z}$ve tvaru

$$Y(z) = \frac{\alpha}{(1 - z^{-1})(1 + \gamma z^{-1})}.$$

Nabídka – poptávka

Rozklad na parciální zlomky

Rozkladem na parciální zlomky

$$Y(z) = \frac{\alpha}{(1-z^{-1})(1+\gamma z^{-1})} = \frac{k_1}{1-z^{-1}} + \frac{k_2}{1+\gamma z^{-1}},$$

kde

$$\begin{aligned} k_1 &= \lim_{z\to 1}(1-z^{-1})Y(z) = \frac{\alpha}{1+\gamma}, \\ k_2 &= \lim_{z\to -\gamma}(1+\gamma z^{-1})Y(z) = \frac{\alpha\gamma}{1+\gamma}. \end{aligned}$$

Nabídka – poptávka
Rozklad na parciální zlomky

Zpětná transformace funkce

$$Y(z) = \frac{\alpha}{1+\gamma}\left(\frac{1}{(1-z^{-1})} + \frac{\gamma}{1+\gamma z^{-1}}\right)$$

vede na řešení diferenční rovnice

$$y(k) = \frac{\alpha}{1+\gamma}\left(1-(-\gamma)^{k+1}\right)1(k),$$

které v případě stabilního trhu $\gamma = \dfrac{C}{D} < 1$ určuje limitní velikost ceny

$$\lim_{k\to\infty} c(k) = \frac{\alpha}{1+\gamma} = \frac{B-A}{C+D}.$$

Nabídka – poptávka

Řešení

Pro následující obrázek byly zvoleny hodnoty $A = 100, B = 120, C = 3, D = 4.$