Modelování systémů a procesů (K611MSAP)

Přednáška 4

Vlček, Přikryl, Kovář, Pěnička

Katedra aplikované matematiky
Fakulta dopravní ČVUT

Pravidelná přednáška K611MSAP
čtvrtek 20. dubna 2006

Obsah

Obsah

Obsah

Obsah

Diferenciální rovnice

Rovnici

$$\ddot{y}(t) + 2a\dot{y}(t) + (a^2 + b^2)y(t) = u(t)$$

s počátečními podmínkami ve tvaru

$$y(0) = c_1 \ \text{ a } \ \dot{y}(0) = c_2$$

řešíme pomocí Laplaceovy transformace.

$$\mathcal{L}\left(\frac{d}{dt}y(t)\right) = pY(p) - y(0)$$

$$\mathcal{L}\left(\frac{d^2}{dt^2}y(t)\right) = p^2Y(p) - py(0) - \dot{y}(0)$$

Algebraický tvar

$$p^2Y(p) - py(0) - \dot{y}(0) + 2a(pY(p) - y(0)) + (a^2 + b^2)Y(p) = U(p)$$

Rovnici vyřešíme vzhledem k obrazu výstupní veličiny $Y(p)$

$$\left(p^2 + 2ap + (a^2 + b^2)\right) Y(p) = U(p) + py(0) + \dot{y}(0) + 2ay(0)$$

$$Y(p) = \frac{U(p) + c_2 + (p + 2a)c_1}{(p + a + ib)(p + a - ib)}$$

Přenosová funkce

Přenosová funkce $H(p)$ je definována jako podíl obrazu výstupu k obrazu vstupu $\dfrac{Y(p)}{U(p)}$ pro nulové počáteční podmínky a tedy

$$H(p) = \frac{Y(p)}{U(p)} = \frac{1}{(p+a+ib)(p+a-ib)}$$

Impulsní odezva

Impulsní odezvu určíme jako inversní Laplaceovu transformaci přenosové funkce a platí

$$\mathcal{L}^{-1}(H(p)) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{(p+a)^2+b^2}\right) = \frac{1}{b}e^{-at}\sin bt$$

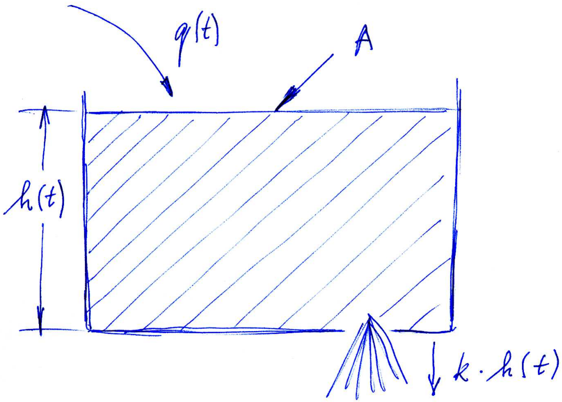
Přechodovou odezvu

Přechodovou odezvu $s(t)$ určíme inversní Laplaceovu transformaci $s(t) = \mathcal{L}^{-1}\left(H(p)\frac{1}{p}\right)$ a platí

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{p((p+a)^2+b^2)}\right) =$$

$$= \frac{1}{a^2+b^2}\left[1 - e^{-at}\cos bt - \frac{a}{b}e^{-at}\sin bt\right]$$

Vypouštění nádrže



Matematický popis

Diferenciální rovnice, která popisuje systém:

$$A \cdot h'(t) + k \cdot h(t) = q(t) = w \cdot e^{-t}$$

Počáteční podmínky a nastavení konstant:

$$h(0) = 4$$

$$k = 0.5\ m^2/s$$

$$w = 4\ m^3/s$$

$$A = 0.25\ m^2$$

Matematické řešení

1. Laplaceova transformace

$$A(pH(p) - h(0)) + k \cdot H(p) = Q(p) = \frac{w}{p+1}$$

2. Vyjádření $H(p)$

$$H(p) = \frac{4(p+5)}{(p+1)(p+2)}$$

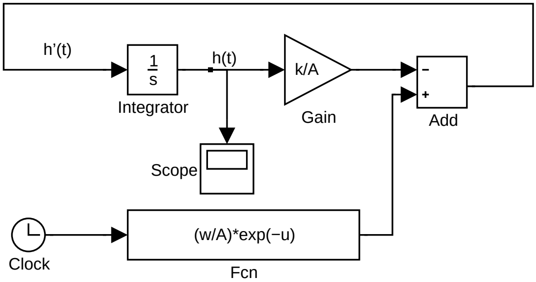
3. Rozklad na parciální zlomky

$$H(p) = \frac{a}{p+1} + \frac{b}{p+2} = \frac{16}{p+1} - \frac{12}{p+2}$$

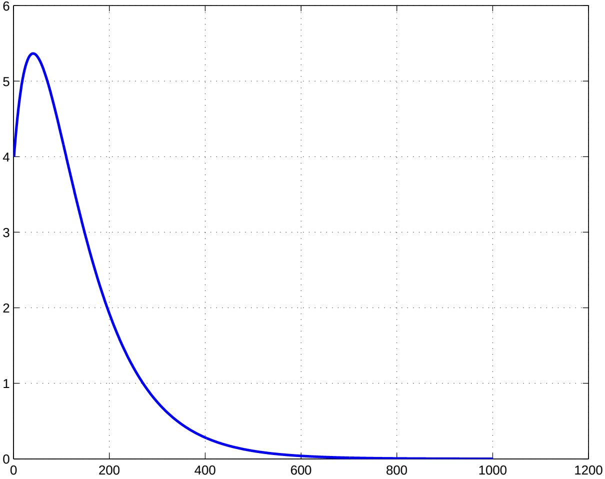
4. Zpětná Laplaceova transformace

$$h(t) = \mathcal{L}^{-1}\{(H(p)\} = 16e^{-t} - 12e^{-2t}$$

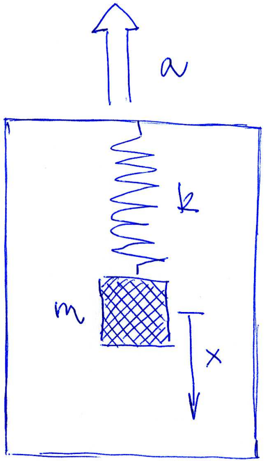
Simulink Model



Výsledek



Závaží ve výtahu



Matematický popis

Diferenciální rovnice, která popisuje systém:

$$m \cdot \ddot{x}(t) = -k \cdot x(t) + m \cdot a \cdot \mathbf{1}(t)$$

$$\omega^2 = \frac{k}{m}$$

$$\ddot{x}(t) + \omega^2 x(t) = a \cdot \mathbf{1}(t)$$

Počáteční podmínky a nastavení konstant:

$$\dot{x}(0) = x(0) = 0$$

Matematické řešení

Laplaceova transformace

$$p^2X(p) + \omega^2X(p) = \frac{a}{p}$$

$$X(p) = \frac{1}{p^2+\omega^2} \cdot \frac{a}{p} = F_1(p)F_2(p)$$

$$f_1(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F_1(p)\} = \frac{\sin(\omega t)}{\omega}$$

$$f_2(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F_2(p)\} = a \cdot \mathbf{1}(t)$$

$$!!!x(t) \neq f_1(t) \cdot f_2(t)!!!$$

Matematické řešení

Konvoluční teorém

$$x(t) = (f_1 * f_2)(t) = \int_0^t f_1(u) f_2(t-u)du$$

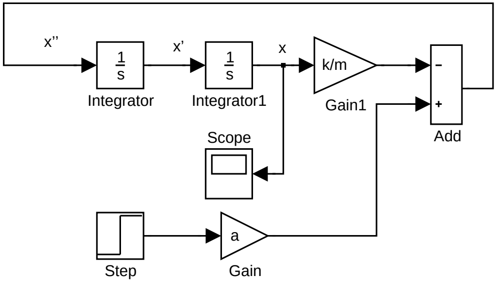
$$x(t) = \int_0^t \frac{\sin(\omega u)}{\omega} \cdot a \cdot \mathbf{1}(t-u)du$$

$$x(t) = \frac{a}{\omega} \int_0^t \sin(\omega u)du = \frac{a}{\omega} \left[\frac{-\cos(\omega u)}{\omega} \right]_0^t$$

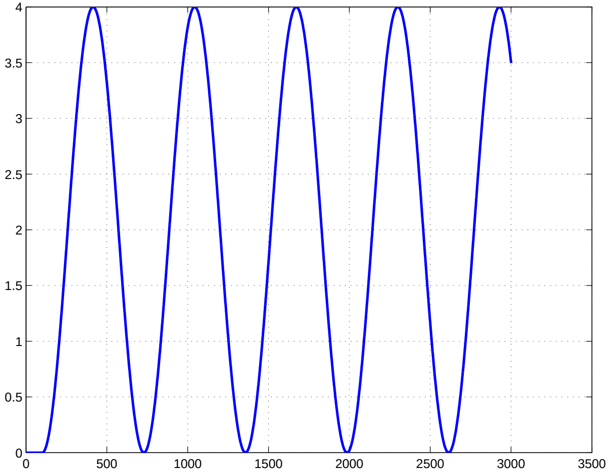
$$x(t) = \frac{a}{\omega^2}(1 - \cos(\omega t)).$$

Simulink Model

$$k = m = a = 2$$



Výsledek



Stavový popis

Diferenciální rovnici druhého řádu

$$\ddot{y}(t) + a_1\,\dot{y}(t) + a_0\,y(t) = u(t)$$

s počátečními podmínkami ve tvaru

$$y(0) = c_1 \quad \text{a} \quad \dot{y}(0) = c_2,$$

převedeme na stavový popis volbou stavového vektoru

$$\begin{aligned} x_1(t) &= y(t)\,, \\ x_2(t) &= \dot{y}(t)\,. \end{aligned}$$

Stavový popis

Dosadíme nejprve $x_2(t) = \dot{y}(t)$ do původní diferenciální rovnice

$$\dot{x}_2(t) + a_1 x_2(t) + a_0 x_1(t) = u(t)\,. \tag{1}$$

Současně platí

$$\dot{x}_1(t) = \dot{y}(t) = x_2(t)\,. \tag{2}$$

Dostáváme tak

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

Stavový popis

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \mathbf{A} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \mathbf{B}u(t)$$

Rovnici pro výstup vyjádříme z definice stavových veličin

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + 0\,u(t)\,.$$

Matice **D** je tedy nulová a pro výstupní matici dostáváme

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}\,. \tag{3}$$

Počáteční podmínky se transformují do stavového popisu takto

$$y(0) = x_1(0) = c_1 \quad \text{a} \quad \dot{y}(0) = x_2(0) = c_2\,. \tag{4}$$

Diferenciální rovnice 2. řádu

Diferenciální rovnice 2. řádu

$$\ddot{y}(t) + a\,\dot{y}(t) + b\,y(t) = u(t)$$

má za nulových počátečních podmínek přenosovou funkci

$$H(p) = \frac{1}{p^2 + a\,p + b} = \frac{1}{(p + k_1)(p + k_2)}.$$

Poloha pólů přenosové funkce $H(p)$ rozhoduje o stabilitě systému.

Kritérium stability

1. Stabilní systém
   Reálná část všech pólů přenosové funkce $H(p)$ leží v levé části p-roviny.
2. Nespojitý systém
   Reálná část alespoň jednoho pólu přenosové funkce $H(p)$ leží v pravé části p-roviny.
3. Mez stability
   Reálná část pólů přenosové funkce $H(p)$ je rovna nule.