

# Základy algoritmizace

## Matematické algoritmy (11MAG)

Jan Přikryl

Ústav aplikované matematiky  
ČVUT v Praze, Fakulta dopravní

1. přednáška 11MAG  
pondělí 30. září 2013

verze: 2013-10-22 14:28



# Obsah přednášky

- 1 Úvodní informace
- 2 Algoritmy a algoritmizace
- 3 Aplikace algoritmů



# Základní informace

Kdo to učí, kdy se uvidíme, web . . .

**Přednáší:** Dr. Jan Prikryl (prikryl@fd.cvut.cz)

**Přednáška:** pondělí, 16:45–18:15, F114

**Cvičení:** pondělí 18:30–20:00, F311  
úterý 16:45–18:15, F311

**Dotace:** 2+2

**Očekávaná týdenní zátěž:** 5–7 hodin včetně přednášek

Webové stránky předmětu:

<http://zolotarev.fd.cvut.cz/mag/>



# Základní informace

O čem to je, co se po mně bude chtít?

**O čem si budeme povídat:** algoritmy diskretní matematiky, slasti a strasti výpočtů v plovoucí řádové čárce, numerická matematika.

**O čem budou cvičení:** praktické hrátky s algoritmy, Matlab/Python/C/C++/Java ...

**Co když neumím programovat?** To, že jste postoupili až do prvního magisterského ročníku garantuje, že programovat umíte. V případě nouze se urychleně doučíte.



# Základní informace

Podle čeho se to učí

Literatura je téměř výhradně anglicky, kompletní seznam i s případnými odkazy naleznete na webových stránkách předmětu.

- 1 HÅSTAD, Johan: *Advanced Algorithms – Course Notes*. Royal Institute of Technology, Sweden, 2000.
- 2 CORMEN, Thomas H. – LEISERSON, Charles E. – RIVEST, Ronald L. – STEIN, Clifford: *Introduction to Algorithms*. 2nd edition. The MIT Press / McGraw-Hill, 2002.
- 3 MOLER, Cleve: *Numerical Computing with MATLAB*. Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), 2004.
- 4 HEATH, Michael T.: *Scientific Computing: An Introductory Survey*. 2nd edition. McGraw-Hill, 2002.



# Obsah přednášky

- ① Úvodní informace
- ② Algoritmy a algoritmizace
- ③ Aplikace algoritmů



# Co víte o algoritmech?

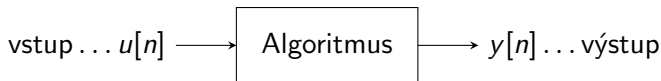
## Co je to algoritmus

### Algoritmus je

- přesný návod či postup, kterým lze vyřešit daný typ úlohy.
- efektivní postup pro výpočet hodnoty nějaké funkce vyjádřený konečným počtem instrukcí.

### Definice

Algotmem rozumíme postup, podle kterého se z dat vstupních  $x[n]$  vygenerují data výstupní  $y[n]$ .



# Co víte o algoritmech?

## Vlastnosti algoritmu

- Typy algoritmů
- Co potřebujete znát ?
- Kam až můžeme dojít ?

Každý algoritmus musí mít následující vlastnosti:

- ❶ **Konečnost:** výpočet se ukončí v „rozumně“ konečném čase.
- ❷ **Hromadnost:** není sestaven pouze na jediné  $u[n]$ , ale na celou řadu možných vstupů.
- ❸ **Jednoznačnost:** přechod do následujícího stavu algoritmu je jednoznačně určen výsledkem stavu předchozího.





# Co víte o algoritmech?

## Komentář k vlastnostem algoritmů

- ❶ **Konečnost:** předpověď počasí na zítra dosažená výpočtem o den později nemá význam.
- ❷ **Hromadnost:** program pro výpočet odmocniny pracuje nad množinou čísel, není konstruován pro každé číslo zvlášť.
- ❸ **Jednoznačnost:** každý algoritmus je složen z kroků, které na sebe vzájemně navazují. Každý krok je charakterizován jako přechod z jednoho stavu do jiného. Každý stav algoritmu je určen zpracovávanými daty a na tom, jak data v jednotlivých stavech vypadají. Je tedy pevně určeno, který krok bude následovat.



## Příklady algoritmů

## Numerický výpočet odmocniny

$$y[n+1] = \frac{1}{2} \left( y[n] + \frac{u[n]}{y[n]} \right)$$

Odmocnina z čísla 10 je s přesností na 10 desetinných míst rovna  $\sqrt{10} = 3,16227766017$ .

Pro  $u[n] = 10$  dostáváme postupně

$y[0] = 3$	$y[0]^2 = 9$
$y[1] = 3,165$	$y[1]^2 = 10,017225$
$y[2] = 3,162278$	$y[2]^2 = 10,0000021493$
$y[3] = 3,1622776601$	$y[3]^2 = 9,9999999996$
$\vdots$	



# Obsah přednášky

- ① Úvodní informace
- ② Algoritmy a algoritmizace
- ③ Aplikace algoritmů



# Aplikace algoritmů

## Internet

Internet umožňuje lidem na celém světě rychle vyhledávat a přistupovat k obrovskému množství informací. Aby to fungovalo, musí poskytovatelé internetu a poskytovatelé internetových služeb používat chytré algoritmy, umožňující zpracovávat a spravovat tak velké množství dat. Příklady úloh, na které v této oblasti narazíme, jsou například *hledání vhodných cest* pro datové pakety, cestující mezi jednotlivými uzly sítě, či *vyhledávání* stránek s určitým obsahem.



# Aplikace algoritmů

## Elektronické obchodování

Velký objem obchodů je v dnešní době uzavírán elektronicky, a mnoho služeb funguje i na elektronické bázi. Pro celý obor e-komerce je zcela klíčová schopnost uchovat důvěrné údaje (čísla kreditních karet, hesla, či bankovní informace) opravdu v tajnosti. Mezi úlohy z této oblasti, na které narazíme, patří *šifrování veřejným klíčem* či *digitální podpis*.



# Aplikace algoritmů

## Optimalizace a logistika

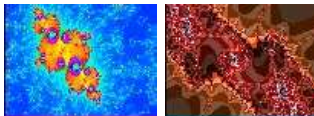
Ve oblastech výroby a přepravy řeší firmy často problém optimální alokace zdrojů tak, aby byly na jednu stranu minimalizovány výrobní či režijní náklady, na druhou stranu aby byl co možná nejvyšší užitek. Letecký dopravce se bude snažit přiřazovat posádky na jednotlivé lety způsobem, jenž generuje co nejmenší dodatečné náklady – zároveň je jeho manévrovací prostor ovšem omezen nařízenými z oblasti bezpečnosti provozu, všeobecnými právními předpisy a podobně. Poskytovatel internetu při investicích do infrastruktury potřebuje investovat své zdroje cíleně tak, aby výsledek co nejefektivněji sloužil zákazníkům. Obě tyto úlohy řeší algoritmy matematické optimalizační techniky zvané *lineární programování*.



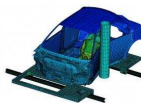
# Aplikace algoritmů

Proč to zkoumat?

Numerické řešení algebraických rovnic, diferenciálních rovnic a speciálních funkcí:



Metoda konečných prvků – řešení složitých parciálních diferenciálních rovnic s praktickými aplikacemi:



# Aplikace algoritmů

Proč to zkoumat

Jinak těžko řešitelné úlohy: nelineární parciální diferenciální rovnice, například Navierovy-Stokesovy rovnice.





# Aplikace algoritmů

Proč to zkoumat

Navierovy-Stokesovy rovnice:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \nabla) \mathbf{u} = \mathbf{f} - \nabla p + \nu \Delta \mathbf{u}$$

kde  $\mathbf{u}$  a  $\mathbf{f}$  jsou vektorové funkce rychlosti a síly,  $p$  je tlak a  $\nu$  je úměrná viskozitě kapaliny.

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_x}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_y}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_z}{\partial z} = \\ = f_x(x, y, z, t) - \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left[ \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2} \right] \end{aligned}$$



# Co potřebujete znát?

## Prerekvizity

Předpokládáme:

- základy algebry a matematické analýzy
- základy numerické matematiky
- diferenční rovnice a jejich řešení
- základy strukturovaného programování
- aktivní znalost alespoň jednoho programovacího jazyka (C, C++, Python, Java, Basic) nebo alespoň prostředí MATLAB



# Kam až můžeme dojít?

- Objevit krásu některých algoritmů.
- Pochopit třeba numerické základy kryptologie.
- Nebát se inženýrských úloh, které vyžadují algoritmizaci.

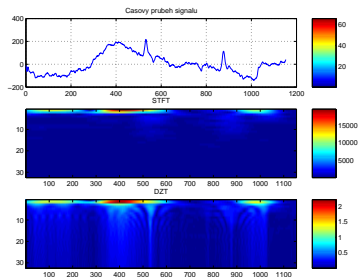


# Kam až můžeme dojít?

pokračování

- Pochopit rychlé algoritmy s aplikacemi v reálném světě

## Rychlá Fourierova transformace – analýza EEG signálu



# Implementace algoritmů

Kurs pokrývá standardní algoritmy, jež nabízí pro daný problém a pro daná vstupní data optimální výkon.

Dvě nejčastější chyby při výběru algoritmu pro danou úlohu:

- **ignorujeme výkon algoritmu** – rychlejší algoritmy jsou současně složitější na implementaci
- **příliš zkoumáme výkon algoritmu** – nepatrně rychlejší algoritmus může být výrazně složitější na implementaci

