Jemný úvod do numerických metod

Matematické algoritmy (K611MAG)

Jan Přikryl

Ústav aplikované matematiky
ČVUT v Praze, Fakulta dopravní

8. přednáška 11MAG
pondělí 18. listopadu 2013

verze:2013-11-16 14:26

Obsah přednášky

1 Úvod do numerické matematiky
  - Matematické modelování
  - Numerická matematika
  - Numerická úloha

2 Zobrazení čísel v počítači

3 Typy chyb

4 Typy numerických úloh

Matematické modelování

Zopakujme si MSP

Systém – část prostředí, kterou lze vnímat odděleně od jejího okolí. Systém od okolí odděluje nějaká hranice, ať už fyzická, či myšlenková.

Abychom mohli zkoumat chování nějakého systému, můžeme

- provádět **experimenty** anebo
- popsat systém matematicky – sestavit jeho **matematický model**.

V rámci předmětu *Modelování systémů a procesů* [?] jsme si ukazovali různé modely, popisující chování systémů ve spojitém či diskrétním čase a popis systémů těmito modely dělili na *vnější* a *vnitřní* (stavový) popis.

Matematické modelování

Příklady

Příklad (Závaží na pružině)

Netlumené kmity závaží na pružině popisuje homogenní diferenciální rovnice harmonických kmitů

$$\frac{\mathrm{d}^2 y(t)}{\mathrm{d}t^2} + \omega^2 y(t) = 0.$$

Příklad (Model vývoje dluhu)

Finanční model vývoje zadlužení může mít tvar diferenční rovnice

$$y[n+1] = (1 + \alpha[n]) \cdot y[n] - u[n].$$

Matematické modelování

Co stojí za Matlabem a Simulinkem?

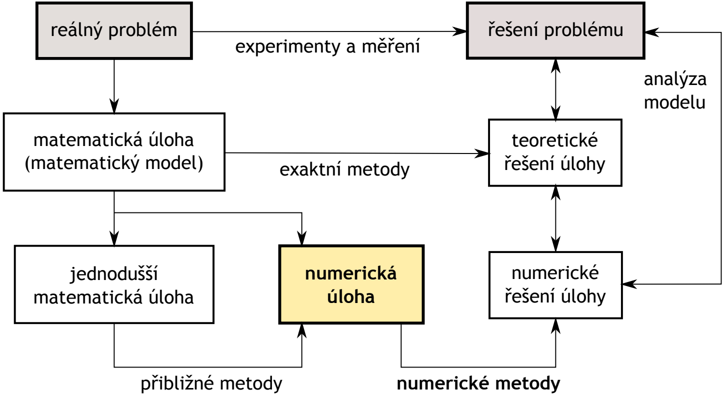
Ke zkoumání matematických modelů systémů jsme používali Matlab a Simulink.

V příštích přednáškách si stručně povíme

- co vlastně počítač musí umět, aby dokázal s dostatečnou přesností počítat s matematickými modely reálného světa,
- jaké matematické algoritmy se ve vybraných případech používají a
- proč není dobré počítači vždycky slepě věřit.

Matematické modelování

Pozice numerické matematiky



Čím se numerická matematika zabývá

Numerické úlohy a metody

Protože počítač je konečný automat pracující pouze s konečným počtem vstupních a výstupních dat, zavádí se někdy také pojem numerické úlohy.

Numerická úloha – jasný a jednoznačný popis funkčního vztahu mezi *konečným* počtem vstupních a výstupních dat.

Data – vyjádřitelná konečným počtem čísel.

$\Rightarrow$ Počítačový model je taková aproximace matematického modelu, jež může být v konečném čase realizována na počítači.

Numerický algoritmus – postup, kterým se v konečném čase počtu kroků řeší daná numerická úloha. Při studiu vlastností numerických algoritmů nás zajímá především realizace aritmetických operací s čísly, nikoliv logické operace.

Konstrukce a analýza metod a algoritmů pro realizaci numerických

Numerické úlohy

Příklady

Příklad (Numerická úloha)

Přibližné řešení rovnice $x^4 + a_1 x^2 + a_2 x + a_3 = 0$ je možno počítat numericky pro konkrétní vstupní vektor $\mathbf{a} = [a_1, a_2, a_3] \in \mathbb{R}^3$.
Výstupem numerické metody řešení bude vektor
$\mathbf{x} = [x_1, x_2, x_3, x_4] \in \mathbb{C}^4$.

Příklad (Co není numerická úloha)

Řešení rovnice $y''(x) - y(x)^2 = 0$ za daných počátečních podmínek nelze vyjádřit konečným počtem čísel a nelze jej tedy hledat numericky .
Numerický přístup pouze pro vyšetření hodnot ve vybraných bodech $x \in \{x_i\}_1^n$.

Obsah přednášky

1 Úvod do numerické matematiky

2 Zobrazení čísel v počítači

3 Typy chyb

4 Typy numerických úloh

Zobrazení čísel v počítači

Celá čísla, pevná a pohyblivá řádová čárka

Počítač $\Rightarrow$ binární logika, binární reprezentace čísel.

Celá čísla – ekvivalenty ve dvojkové soustavě, jeden (nejvyšší) bit na znaménko

Příklad

$66 = (01000010)_2$, $-126 = (11111110)_2$, ovšem také $(11111110)_2 = 254$

Pevná řádová čárka – pevný počet bitů pro celou a desetinnou část čísla

Příklad

$5{,}3100_{10} \approx 10101010_2 (= 101{,}01010_2)$, $7{,}5625_{10} = 11110010_2$

Zobrazení čísel v počítači
Mantisa a exponent

Pohyblivá řádová čárka – převod na tvar $a \cdot q^b$.

Definice (Semilogaritmický tvar)

Číslo x lze reprezentovat v **semilogaritmickém tvaru s normalizovanou mantisou** jako

$$x = \operatorname{sgn}(x) \cdot \left(\frac{a_1}{q} + \frac{a_2}{q^2} + \cdots + \frac{a_l}{q^l} \right) q^b,$$

kde $q > 1$ je *základ*, $a_i \in \{0, 1, \ldots, q-1\}$, $a_1 \geq 1$, jsou *číslice mantisy* a $b \in \{m_1, \ldots, m_2\}$ je *exponent*.

Zobrazení čísel v počítači

Mantisa a exponent

Reprezentace x pokrývá pouze podmnožinu $\mathbb{R}$ – má pouze $2(q-1)q^{l-1}(m_2 - m_1 + 1) + 1$ prvků.

$\Rightarrow$ Některá reálná čísla nelze přesně reprezentovat.

Příklad (Reprezentace 1/2 a 1/10)

Budeme-li uvažovat $q = 2$, bude

$$\frac{1}{2} = \left(\frac{1}{2} + \frac{0}{4} + \frac{0}{8} \cdots\right) 2^0$$

ale

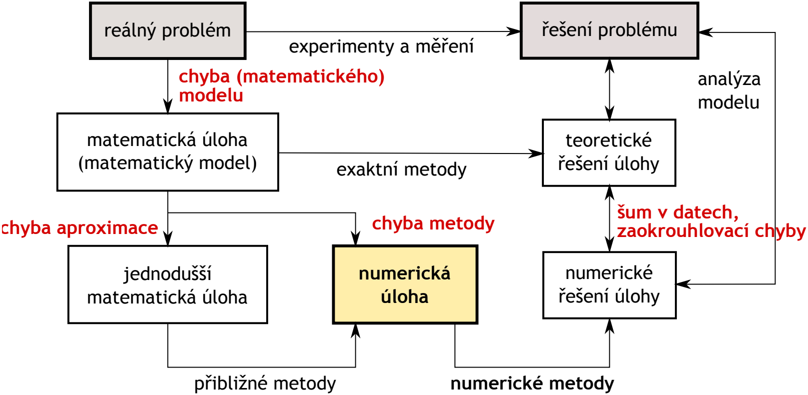
$$\frac{1}{10} = \left(\frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{256} + \frac{1}{512} + \frac{1}{4096} + \frac{1}{8192} + \frac{1}{32768} \cdots\right) 2^{-4}$$

nelze reprezentovat konečným rozvojem.

Obsah přednášky

1. Úvod do numerické matematiky
2. Zobrazení čísel v počítači
3. Typy chyb
   - Vliv zahokrouhlovacích chyb
   - Vliv aritmetických operací na relativní chybu
4. Typy numerických úloh

Chyby výpočtu
Typy



Chyby výpočtu

Relativní a absolutní chyba

Číslo x v numerickém algoritmu je reprezentováno přiblížením $\tilde{x}$.

Definice (Absolutní a relativní chyba)

Absolutní chybou $\mathcal{A}(x)$ aproximace čísla x číslem $\tilde{x}$ označujeme rozdíl

$$\mathcal{A}(x) = |x - \tilde{x}|$$

Relativní chybou $\mathcal{R}(x)$ aproximace čísla x číslem $\tilde{x}$ označujeme podíl

$$\mathcal{R}(x) = \frac{\mathcal{A}(x)}{|x|} = \left|\frac{x - \tilde{x}}{x}\right|, \quad x \neq 0$$

Chyby výpočtu

Vliv reprezentace čísel

Reálná čísla nejsou v počítači většinou reprezentována přesně.
ve **dvojnásobné přesnosti** – relativní chyba této reprezentace je o malinko větší, než 10^{-16} (mantisa má 15,95 platných dekadických číslic). **jednoduchou přesnost** relativní chyba reprezentace o malinko nižší, než 10^{-7} (mantisa má 7,22 platných dekadických číslic).

Chyby výpočtu

Důsledek zaokrouhlovacích chyb

Příklad (Proč Patriot netrefí Scud)

Systém počítal s hodnotami času v desetinách sekundy, jeho autoři proto systémový čas v sekundách získávali prostým vynásobením hodnotou 0,1,

$$0{,}1 \approx (0{,}000110011001100110011001100110011\ldots)_2.$$

Patriot pracoval pouze v jednoduché přesnosti,

$$0{,}1 \approx (0{,}00011001100110011001100110011)_2 \approx 0{,}999999905,$$

Systém v provozu $> 100\,\mathrm{h}$, $\mathcal{A}(t) \approx 0{,}34\,\mathrm{s}$. Scud letí okolo $1700\,\mathrm{m/s}$ a řídicí systém baterie jej po prvotním radarovém kontaktu hledal v bodě $1700 \cdot 0{,}34 \approx 500\,\mathrm{m}$ mimo.

Chyby výpočtu

Vlastnosti $\mathcal{A}(x)$ a $\mathcal{R}(x)$

Aritmetické operace mohou mít na nepřesné reprezentace čísel devastující vliv (například podíl velkého a malého čísla, ale i odčítání dvou sobě blízkých čísel stejného znaménka).

Relativní chyba se může výrazně zvětšit při odčítání dvou blízkých čísel:

$$\mathcal{R}(x \pm y) = \frac{\mathcal{A}(x \pm y)}{|x \pm y|}$$

Násobení ani dělení nemají na $\mathcal{A}(x)$ a $\mathcal{R}(x)$ výraznější vliv.

Chyby výpočtu
Příklad

Příklad

Mějme čísla $x_1 = 758320$, $x_2 = 757940$, a nechť jsou reprezentována jako $\tilde{x}_1 = 758330$ a $\tilde{x}_2 = 757930$. Platí $\mathcal{A}(x_1) = 10$, $\mathcal{A}(x_2) = 10$,

$$\mathcal{R}(x_1) = \frac{10}{758320} \leq 1{,}32 \cdot 10^{-5}, \mathcal{R}(x_2) = \frac{10}{757940} \leq 1{,}32 \cdot 10^{-5}.$$

Máme tedy $v = x_1 - x_2 = 380$ a je $\tilde{v} = \tilde{x}_1 - \tilde{x}_2 = 400$. Proto $\mathcal{A}(v) = |v - \tilde{v}| = 20$ a

$$\mathcal{R}(v) = \frac{\mathcal{A}(v)}{|v|} = \frac{20}{380} \leq 0{,}053.$$

Relativní chyba rozdílu $v = x_1 - x_2$ je tedy o tři řády vyšší než relativní chyby obou operandů.

Obsah přednášky

1. Úvod do numerické matematiky
2. Zobrazení čísel v počítači
3. Typy chyb
4. Typy numerických úloh

Matematická úloha

A její formalizace

Mějme dány dva vektorové prostory $\mathcal{B}_x$ (vstupní data) a $\mathcal{B}_y$ (výstupní data).

Definice (Matematická úloha)

Matematickou úlohou rozumíme relaci

$$y = U(x),\ \ x \in \mathcal{B}_x, y \in \mathcal{B}_y$$

Definice neříká nic jiného, než že matematická úloha transformuje posloupnost vstupních dat na posloupnost výsledků.

Korektní úlohy

Definice

Definice (Korektní úloha)

Řekneme, že úloha je **korektní**, pokud

1. ke každému $x \in \mathcal{B}_x$ existuje právě jedno $y \in \mathcal{B}_y$,
2. řešení y spojitě závisí na datech, tedy pokud $x_n \to x$ a $U(x_n) = y_n$, pak také $y_n \to y = U(x)$.

Zbylé matematické úlohy označujeme jako **nekorektní**. Jde například o nejednoznačně řešitelné problémy, intervalové odhady, úlohy s nevhodnou formulací zadání.

Příklad (Korektní úloha)

Jako příklad korektní úlohy může sloužit například výpočet integrálu z dané spojité a ohraničené funkce přes nějaký interval.

Korektní úlohy

Definice

Definice (Korektní úloha)

Řekneme, že úloha je **korektní**, pokud

1. ke každému $x \in \mathcal{B}_x$ existuje právě jedno $y \in \mathcal{B}_y$,
2. řešení y spojitě závisí na datech, tedy pokud $x_n \to x$ a $U(x_n) = y_n$, pak také $y_n \to y = U(x)$.

Zbylé matematické úlohy označujeme jako **nekorektní**. Jde například o nejednoznačně řešitelné problémy, intervalové odhady, úlohy s nevhodnou formulací zadání.

Příklad (Nekorektní úloha)

Určete matici $\mathbf{A}$ splňující rovnici $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ máte-li dány hodnoty $\mathbf{x}$ a $\mathbf{b}$

Korektní úlohy

Definice

Definice (Korektní úloha)

Řekneme, že úloha je **korektní**, pokud

1. ke každému $x \in \mathcal{B}_x$ existuje právě jedno $y \in \mathcal{B}_y$,
2. řešení y spojitě závisí na datech, tedy pokud $x_n \to x$ a $U(x_n) = y_n$, pak také $y_n \to y = U(x)$.

Zbylé matematické úlohy označujeme jako **nekorektní**. Jde například o nejednoznačně řešitelné problémy, intervalové odhady, úlohy s nevhodnou formulací zadání.

Příklad (Jiná nekorektní úloha)

Určete

$$y = \int_{-1}^{1} 1/x \, dx.$$

Dobře podmíněné úlohy

Definice

Definice (Číslo podmíněnosti)

Podíl

$$C_{\mathrm{p}} = \frac{\dfrac{|\Delta x|}{|x|}}{\dfrac{|\Delta y|}{|y|}}$$

se nazývá **číslo podmíněnosti** úlohy.

Udává vliv změn ve vstupních datech na výstupní data

Definice (Dobře podmíněná úloha)

Budeme říkat, že korektní úloha je **dobře podmíněná**, jestliže malá změna ve vstupních datech vyvolá malou změnu řešení (resp. $C_{\mathrm{p}} \approx 1$).

Taxonomie úloh