11MAG – 8. cvičení
Numerická integrace

8. prosince 2014

1 Druhý průběžný test [15min]

Na tomto cvičení píšeme druhý průběžný test.

2 Obdélníkové pravidlo [15min]

Vytvořte metodu `i=qrects(fh,a,b)` pro numerický výpočet integrálu funkce na intervalu $\langle a, b\rangle$ pomocí obdélníkového pravidla. Proměnná `fh` je odkaz na funkci (*function handle* v případě Matlabu, *function pointer* pro C a C++) jedné proměnné, kterou chceme integrovat. O odkazech na funkci jsme si vyprávěli na minulém cvičení.

Pomocí tohoto pravidla vypočtěte integrály

$$I(f_1) = \int_{-1}^{1} x^2 - \sin x \,\mathrm{d}x$$

$$I(f_2) = \int_{-10}^{1} e^{-x^2} \,\mathrm{d}x$$

Funkce f_1 a f_2 budou implementovány jako metody `y=qf1(x)` a `y=qf2(x)`. V případě implementace v Matlabu může být `x` i vektor hodnot nezávisle proměnné. V takovém případě bude `y` odpovídající vektor funkčních hodnot.

Výslednou hodnotu aproximace $I(f_1)$ a $I(f_2)$ porovnejte s hodnotami, které počítá metoda v `quad` Matlabu.

Navrhuji vám následující postup:

1. Vytvořte metody `qf1` a `qf2`.
2. Ověřte, že `qf1(0)` dá výsledek 0, `qf1(1)` dá výsledek cca 0,1585 a `qf1(-1)` dá výsledek cca 1,8415. V případě implementace v Matlabu zkuste, že funguje i `qf1([-1,0,1])`.
3. Ověřte, že `qf2(0)` dá výsledek 1, `qf2(1)` dá výsledek cca 0,3679 a `qf2(-1)` dá totožný výsledek, jako `qf2(1)`. V případě implementace v Matlabu zkuste, že funguje i `qf2([-1,0,1])`.
4. Podle textu přednášek naprogramujte metodu `qrects`.
5. Porovnejte výsledky `qrects` a `quad`. Proč se tyto výsledky liší?

3 Složené obdélníkové pravidlo [10min]

Vytvořte metodu `i=qrect(fh,a,b,np)` pro numerický výpočet integrálu funkce na intervalu $\langle a, b\rangle$ pomocí obdélníkového pravidla na `np` panelech. Proměnná `fh` je odkaz na funkci jedné proměnné, kterou chceme integrovat. Vypočtěte oba integrály z úlohy 1 na 2, 4, 8, 16 a 32 panelech.

S výhodou můžete použít již naprogramovanou metodu `qrects`, kterou budete volat opakovaně pro každý panel. Výsledná aproximace integrálu je součtem aproximací na jednotlivých panelech.

4 Simpsonovo pravidlo [15 min]

Vytvořte metodu `i=qsimps(fh,a,b)` pro numerický výpočet integrálu funkce na intervalu $\langle a, b\rangle$ pomocí Simpsonova pravidla. Proměnná `fh` je odkaz na funkci jedné proměnné, kterou chceme integrovat. Touto metodou vypočtěte oba integrály z úlohy 1.

Metoda `qsimps` není nic jiného, než drobně upravená metoda `qrects`, kde se aproximace integrálu počítá podle jiného Newtonova-Cotesova vzorce.

5 Složené Simpsonovo pravidlo [10min]

Vytvořte funkci `i=qsimp(fh,a,b,np)` pro numerický výpočet integrálu funkce na intervalu $\langle a, b\rangle$ pomocí Simpsonova pravidla na `np` panelech. Proměnná `fh` je odkaz na funkci jedné proměnné, kterou chceme integrovat. Vypočtěte oba integrály z úlohy 1 na 2, 4, 8, 16 a 32 panelech.

Obdobně, jako v úloze 2, můžete jako základ použít již naprogramovanou metodu `qrect`, jež bude opakovaně volat `qsimps` pro každý panel. Výsledná aproximace integrálu je opět součtem aproximací na jednotlivých panelech.

6 Adaptivní kvadratura [25 min]

Vytvořte funkci `i=qadapt(fh,a,b,eps,wmin)` pro numerický výpočet integrálu funkce na intervalu $\langle a, b\rangle$ pomocí adaptivního dělení integračního intervalu. Jako základní metodu použijte obdélníkovou metodu `qrects`, jako přesnější odhad použijte `qsimps`. Proměnná `eps` určuje přípustný limit rozdílu numerických hodnot integrálu na dílčích panelech – v případě, že je rozdíl integrandů větší, než `eps`, proveďte rozpůlení panelu a výpočet opakujte jako součet dílčích integrálů pro obě poloviny panelu. Pokud je šíře panelu menší, než `wmin`, indikujte to jako chybu.

Vypočtěte takto oba integrály z úlohy 1 pro hodnoty $\epsilon = 1, 0{,}1, 0{,}01, 0{,}001, \ldots, 10^{-6}$ a $w_{\min} = 10^{-12}$.

7 Gaussova kvadratura [bonus]

Gaussovy kvadraturní vzorce jsou vzorce otevřené, s komplikovanější polohou uzlů, uvedenou pro panel $\langle -1, 1\rangle$ v následující tabulce:

Počet uzlů	Poloha uzlů x_i	Váhy w_i
1	0	2
2	$\pm 1/\sqrt{3}$	$1, 1$
3	$0, \pm\sqrt{3/5}$	$8/9, 5/9, 5/9$

Vytvořte funkci `i=qgauss(fh,a,b,n)` pro numerický výpočet integrálu funkce na intervalu $\langle a, b\rangle$ pomocí Gaussova kvadraturního pravidla s `n` uzly a vahami podle výše uvedené tabulky. Proměnná `fh` je odkaz na funkci jedné proměnné, kterou chceme integrovat. Pro $n = 1, 2, 3$ vypočtěte oba integrály z úlohy 1. Nezapomeňte, že pro výpočet Gaussových kvadraturních vzorců na jiném intervalu, než $\langle -1, 1\rangle$ je třeba použít transformaci

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \approx \frac{b-a}{2} \sum_{i=1}^{n} w_i f\left(\frac{b-a}{2} x_i + \frac{a+b}{2}\right).$$