

Jemný úvod do numerických metod

Matematické algoritmy (11MAG)

Jan Přikryl

Ústav aplikované matematiky
ČVUT v Praze, Fakulta dopravní

8. přednáška 11MAG
pondělí 24. listopadu 2014

verze:2014-11-24 16:35



Obsah přednášky

① Úvod do numerické matematiky

Matematické modelování

Numerická matematika

Numerická úloha

② Zobrazení čísel v počítači

③ Typy chyb

④ Typy numerických úloh



Matematické modelování

Zopakujme si MSP

Systém – část prostředí, kterou lze vnímat odděleně od jejího okolí. Systém od okolí odděluje nějaká hranice, ať už fyzická, či myšlenková.

Abychom mohli zkoumat chování nějakého systému, můžeme

- provádět **experimenty** anebo
- popsat systém matematicky – sestavit jeho **matematický model**.

V rámci předmětu *Modelování systémů a procesů* jsme si ukazovali různé modely, popisující chování systémů ve spojitém či diskrétním čase a popis systémů těmito modely dělili na *vnější* a *vnitřní* (stavový) popis.



Matematické modelování

Příklady

Příklad (Závaží na pružině)

Netlumené kmity závaží na pružině popisuje homogenní diferenciální rovnice harmonických kmitů

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + \omega^2 y(t) = 0.$$

Příklad (Model vývoje dluhu)

Finanční model vývoje zadlužení může mít tvar diferenční rovnice

$$y[n + 1] = (1 + \alpha[n]) \cdot y[n] - u[n].$$



Matematické modelování

Co stojí za Matlabem a Simulinkem?

Ke zkoumání matematických modelů systémů jsme používali Matlab a Simulink.

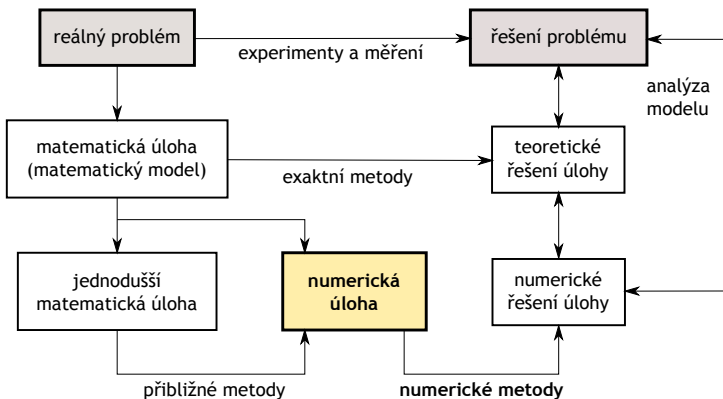
V příštích přednáškách si stručně povíme

- co vlastně počítač musí umět, aby dokázal s dostatečnou přesností počítat s matematickými modely reálného světa,
- jaké matematické algoritmy se ve vybraných případech používají a
- proč není dobré počítači vždycky slepě věřit.



Matematické modelování

Pozice numerické matematiky



Čím se numerická matematika zabývá

Numerické úlohy a metody

Protože počítač je konečný automat pracující pouze s konečným počtem vstupních a výstupních dat, zavádí se někdy také pojem numerické úlohy.

Numerická úloha – jasný a jednoznačný popis funkčního vztahu mezi *konečným* počtem vstupních a výstupních dat.

⇒ Počítačový model je taková aproximace matematického modelu, jež může být v konečném čase realizována na počítači.

Numerický algoritmus – postup, kterým se v konečném počtu kroků řeší daná numerická úloha. Při studiu vlastností numerických algoritmů nás zajímá především realizace aritmetických operací s čísly, nikoliv logické operace.

Konstrukce a analýza metod a algoritmů pro realizaci numerických úloh na počítačích: **numerická matematika**.



Numerické úlohy

Příklady

Příklad (Numerická úloha)

Přibližné řešení rovnice $x^4 + a_1x^2 + a_2x + a_3 = 0$ je možno počítat numericky pro konkrétní vstupní vektor $\mathbf{a} = [a_1, a_2, a_3] \in \mathbb{R}^3$.

Výstupem numerické metody řešení bude vektor

$$\mathbf{x} = [x_1, x_2, x_3, x_4] \in \mathbb{C}^4.$$

Příklad (Co není numerická úloha)

Řešení rovnice $y''(x) - y(x)^2 = 0$ za daných počátečních podmínek nelze vyjádřit konečným počtem čísel a nelze jej tedy hledat numericky .

Numerický přístup pouze pro vyšetření hodnot ve vybraných bodech $x \in \{x_i\}_1^n$.



Obsah přednášky

① Úvod do numerické matematiky

② Zobrazení čísel v počítači

Celá čísla, pevná a pohyblivá řádová čárka

③ Typy chyb

④ Typy numerických úloh



Zobrazení čísel v počítači

Celá čísla, pevná a pohyblivá řádová čárka

Počítač \Rightarrow binární logika, binární reprezentace čísel.

Celá čísla – ekvivalenty ve dvojkové soustavě, jeden (nejvyšší) bit na znaménko

Příklad

$66 = (01000010)_2$, $-126 = (11111110)_2$, ovšem také $(11111110)_2 = 254$

Pevná řádová čárka – pevný počet bitů pro celou a desetinnou část čísla

Příklad

$5,3100_{10} \approx 10101010_2 (= 101,01010_2)$, $7,5625_{10} = 11110010_2$



Zobrazení čísel v počítači

Mantisa a exponent

Pohyblivá řádová čárka – převod na tvar $a \cdot q^b$.

Definice (Semilogaritmický tvar)

Číslo x lze reprezentovat v **semilogaritmickém tvaru s normalizovanou mantisou** jako

$$x = \text{sgn}(x) \cdot \left(\frac{a_1}{q} + \frac{a_2}{q^2} + \dots + \frac{a_l}{q^l} \right) q^b,$$

kde $q > 1$ je *základ*, $a_i \in \{0, 1, \dots, q-1\}$, $a_1 \geq 1$, jsou *číslíčky mantisy* a $b \in \{m_1, \dots, m_2\}$ je *exponent*.



Zobrazování čísel v počítači

Mantisa a exponent

Reprezentace x pokrývá pouze podmnožinu \mathbb{R} – má pouze $2(q-1)q^{l-1}(m_2 - m_1 + 1) + 1$ prvků.

⇒ Některá reálná čísla nelze přesně reprezentovat.

Příklad (Reprezentace 1/2 a 1/10)

Budeme-li uvažovat $q = 2$, bude

$$\frac{1}{2} = \left(\frac{1}{2} + \frac{0}{4} + \frac{0}{8} \cdots \right) 2^0$$

ale

$$\frac{1}{10} = \left(\frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{256} + \frac{1}{512} + \frac{1}{4096} + \frac{1}{8192} + \frac{1}{32768} \cdots \right) 2^{-4}$$

nelze reprezentovat konečným rozvojem.



Obsah přednášky

① Úvod do numerické matematiky

② Zobrazení čísel v počítači

③ Typy chyb

Typy chyb v matematickém modelování

Relativní a absolutní chyba

Vliv zahokrouhlovacích chyb

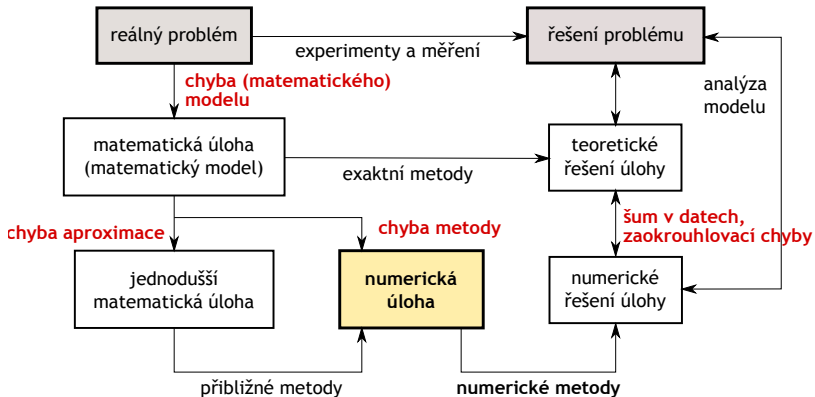
Vliv aritmetických operací na relativní chybu

④ Typy numerických úloh



Chyby výpočtu

Typy



Chyby výpočtu

Relativní a absolutní chyba

Číslo x v numerickém algoritmu je reprezentováno přiblížením \tilde{x} .

Definice (Absolutní a relativní chyba)

Absolutní chybou $\mathcal{A}(x)$ aproximace čísla x číslem \tilde{x} označujeme rozdíl

$$\mathcal{A}(x) = |x - \tilde{x}|$$

Relativní chybou $\mathcal{R}(x)$ aproximace čísla x číslem \tilde{x} označujeme podíl

$$\mathcal{R}(x) = \frac{\mathcal{A}(x)}{|x|} = \left| \frac{x - \tilde{x}}{x} \right|, \quad x \neq 0$$



Chyby výpočtu

Vliv reprezentace čísel

Reálná čísla nejsou v počítači většinou reprezentována přesně.

Dvojnásobná přesnost (double) – relativní chyba této reprezentace je o malinko větší, než 10^{-16} (mantisa má 15,95 platných dekadických číslic).

Jednoduchá přesnost (single, float) – relativní chyba reprezentace o malinko nižší, než 10^{-7} (mantisa má 7,22 platných dekadických číslic).



Chyby výpočtu

Důsledek zaokrouhlovacích chyb

Příklad (Proč Patriot netrefí Scud)

Systém počítal s hodnotami času v desetinách sekundy, jeho autoři proto systémový čas v sekundách získávali prostým vynásobením hodnotou 0,1,

$$0,1 \approx (0,000110011001100110011001100110011 \dots)_2.$$

Patriot pracoval pouze v jednoduché přesnosti,

$$0,1 \approx (0,0001100110011001100110011)_2 \approx 0,099999994,$$

Systém v provozu > 100 h, $\mathcal{A}(t) \approx 0,34$ s. Scud letí okolo 1700 m/s a řídicí systém baterie jej po prvotním radarovém kontaktu hledal v bodě $1700 \cdot 0,34 \approx 500$ m mimo.



Chyby výpočtu

Vlastnosti $\mathcal{A}(x)$ a $\mathcal{R}(x)$

Aritmetické operace mohou mít na nepřesné reprezentace čísel devastující vliv (například podíl velkého a malého čísla, ale i odčítání dvou sobě blízkých čísel stejného znaménka).

Relativní chyba se může výrazně zvětšit při odčítání dvou blízkých čísel:

$$\mathcal{R}(x \pm y) = \frac{\mathcal{A}(x \pm y)}{|x \pm y|}$$

Násobení ani dělení nemají na $\mathcal{A}(x)$ a $\mathcal{R}(x)$ výraznější vliv.



Chyby výpočtu

Příklad

Příklad

Mějme čísla $x_1 = 758320$, $x_2 = 757940$, a necht' jsou reprezentována jako $\tilde{x}_1 = 758330$ a $\tilde{x}_2 = 757930$. Platí $\mathcal{A}(x_1) = 10$, $\mathcal{A}(x_2) = 10$,

$$\mathcal{R}(x_1) = \frac{10}{758320} \leq 1,32 \cdot 10^{-5}, \mathcal{R}(x_2) = \frac{10}{757940} \leq 1,32 \cdot 10^{-5}.$$

Máme tedy $v = x_1 - x_2 = 380$ a je $\tilde{v} = \tilde{x}_1 - \tilde{x}_2 = 400$. Proto $\mathcal{A}(v) = |v - \tilde{v}| = 20$ a

$$\mathcal{R}(v) = \frac{\mathcal{A}(v)}{|v|} = \frac{20}{380} \leq 0,053.$$

Relativní chyba rozdílu $v = x_1 - x_2$ je tedy o tři řády vyšší než relativní chyby obou operandů.



Obsah přednášky

① Úvod do numerické matematiky

② Zobrazení čísel v počítači

③ Typy chyb

④ Typy numerických úloh

Matematická úloha a její formalizace



Matematická úloha

A její formalizace

Mějme dány dva vektorové prostory \mathcal{B}_x (vstupní data) a \mathcal{B}_y (výstupní data).

Definice (Matematická úloha)

Matematickou úlohou rozumíme relaci

$$y = U(x), \quad x \in \mathcal{B}_x, y \in \mathcal{B}_y$$

Definice neříká nic jiného, než že matematická úloha transformuje posloupnost vstupních dat na posloupnost výsledků.



Korektní úlohy

Definice

Definice (Korektní úloha)

Řekneme, že úloha je **korektní**, pokud

- 1 ke každému $x \in \mathcal{B}_x$ existuje právě jedno $y \in \mathcal{B}_y$,
- 2 řešení y spojitě závisí na datech, tedy pokud $x_n \rightarrow x$ a $U(x_n) = y_n$, pak také $y_n \rightarrow y = U(x)$.

Zbylé matematické úlohy označujeme jako **nekorektní**. Jde například o nejednoznačně řešitelné problémy, intervalové odhady, úlohy s nevhodnou formulací zadání.

Příklad (Korektní úloha)

Jako příklad korektní úlohy může sloužit například výpočet integrálu z dané spojitě a ohraničené funkce přes nějaký interval.



Korektní úlohy

Definice

Definice (Korektní úloha)

Řekneme, že úloha je **korektní**, pokud

- 1 ke každému $x \in \mathcal{B}_x$ existuje právě jedno $y \in \mathcal{B}_y$,
- 2 řešení y spojitě závisí na datech, tedy pokud $x_n \rightarrow x$ a $U(x_n) = y_n$, pak také $y_n \rightarrow y = U(x)$.

Zbylé matematické úlohy označujeme jako **nekorektní**. Jde například o nejednoznačně řešitelné problémy, intervalové odhady, úlohy s nevhodnou formulací zadání.

Příklad (Nekorektní úloha)

Určete matici **A** splňující rovnici **Ax = b** máte-li dány hodnoty **x** a **b**



Korektní úlohy

Definice

Definice (Korektní úloha)

Řekneme, že úloha je **korektní**, pokud

- 1 ke každému $x \in \mathcal{B}_x$ existuje právě jedno $y \in \mathcal{B}_y$,
- 2 řešení y spojitě závisí na datech, tedy pokud $x_n \rightarrow x$ a $U(x_n) = y_n$, pak také $y_n \rightarrow y = U(x)$.

Zbylé matematické úlohy označujeme jako **nekorektní**. Jde například o nejednoznačně řešitelné problémy, intervalové odhady, úlohy s nevhodnou formulací zadání.

Příklad (Jiná nekorektní úloha)

Určete

$$y = \int_{-1}^1 1/x \, dx.$$



Dobře podmíněné úlohy

Definice

Definice (Číslo podmíněnosti)

Podíl

$$C_p = \frac{\frac{|\Delta x|}{|x|}}{\frac{|\Delta y|}{|y|}}$$

se nazývá **číslo podmíněnosti** úlohy.

Udává vliv změn ve vstupních datech na výstupní data

Definice (Dobře podmíněná úloha)

Budeme říkat, že korektní úloha je **dobře podmíněná**, jestliže malá změna ve vstupních datech vyvolá malou změnu řešení (resp. $C_p \approx 1$).



Taxonomie úloh

