11MAMY – Cvičení 5

Kalmanův filtr

Jan Přikryl

ČVUT FD

29. března 2023

Obsah cvičení

Příklad 1

Měření statické hodnoty

Nejprve si ukažme, jak Kalmanovým filtrem odhadovat „správnou“ hodnotu měřené veličiny, pokud předpokládáme, že měříme nějakou konstantní (nebo téměř konstantní) veličinu čidlem, jež není zcela spolehlivé.

Měřenou hodnotou nechť je třeba hladina vody v nějaké nádrži, $y \equiv h(t) = \text{const.}$.

Model vývoje stavu je skalární:

$$x' = 0$$
$$y = x$$

Příklad 1

Kalmanův filtr – Skript v Matlabu

Model přepíšeme do maticové formy, kterou očekává Kalmanův filtr.

Zadáme matice soustavy, budeme potřebovat i **B** a **D**:

```
A = [ 0 ]; B = [ 0 ];
C = [ 1 ]; D = [ 0 ];
```

Zadáme počáteční podmínky:

```
% Více důvěřujeme modelu hodnotám
Q = [ 1 ]; % šum (chyba) modelu
R = [ 10 ]; % šum (chyba) měření
% Počáteční šum procesu a stav
P0 = [ 10 ]; % bez měření roste o Q, jinak klesá
x0 = [ 0 ]; % počáteční výšku hladiny neznáme přesně!
```

Příklad 1

Kalmanův filtr – Skript v Matlabu

Celkem provedeme `num_steps` iterací. Alokujeme si prostor, kam uložíme predikované souřadnice $\hat{h}$ a filtrované (měřením korigované) souřadnice $\hat{h}^*$

```
pred_history = zeros(1, num_steps);
filt_history = zeros(1, num_steps);
```

Nyní nás čeká vytvoření klíčové části skriptu, smyčky, která prochází „změřené“ hodnoty, uložené v proměnné `measured`, pro každou z nich zavolá externí funkci `kalman()` a aktualizuje stav systému a kovarianci šumu procesu. Ve smyčce si zároveň budeme pro pozdější vykreslení ukládat hodnoty predikovaných a filtrovaných souřadnic do matic `pred_history` a `filt_history`.

Podívejme se ale nejprve na rozhraní funkce `kalman()`,

Příklad 1

Kalmanův filtr – Volání `kalman()`

Funkci, implementující Kalmanův filtr, voláme jako

```
[x0f,x1p,Pf,P1] = kalman(x0,u0,zm,A,B,C,D,P,Q,R)
```

kde vstupní parametry jsou

- `x0` … stav $\mathbf{x}_k$
- `u0` … vstup $\mathbf{u}_k$, v našem případě bude $\mathbf{u}_k = u_k = 0$
- `zm` … měřené $\mathbf{z}_k$
- `A`, `B`, `C`, `D` … matice stavového modelu
- `P` … apriorní odhad kovariance stavu $\hat{\mathbf{x}}_k$
- `Q`, `R` … kovariance šumu model a měření

Příklad 1

Kalmanův filtr – Volání `kalman()`

Funkci, implementující Kalmanův filtr, voláme jako

```
[x0f,x1p,Pf,P1] = kalman(x0,u0,zm,A,B,C,D,P,Q,R)
```

kde výstupní parametry jsou

- `x0f` … filtrovaný stav $\mathbf{x}_k^*$
- `x1p` … predikovaný stav $\hat{\mathbf{x}}_{k+1}$, založený na $\mathbf{x}_k^*$
- `Pf` … aposteriorní odhad kovariance stavu $\hat{\mathbf{x}}_k$
- `P1` … apriorní odhad kovariance stavu $\hat{\mathbf{x}}_{k+1}$

Příklad 1

Kalmanův filtr – Skript v Matlabu

Doplňte kostru základní smyčky:

```
for k=1:numsteps
  ym = measured(k); % simulované měření
  % aktualizace stavu modelu na základě starého stavu a měření
  [x0f,x1p,P0f,P1p]=kalman(x0,0,ym,A,B,C,D,P0,Q,R);
  % uložíme pro vykreslení
  pred_history(k) = ....; % predikovaný příští stav
  filt_history(k) = ....; % filtrovaný současný stav
  % příprava pro další krok
  x0 = ....; % odhad budoucího stavu
  P0 = ....; % odhad nepřesnosti budoucího stavu
end
```

Příklad 1

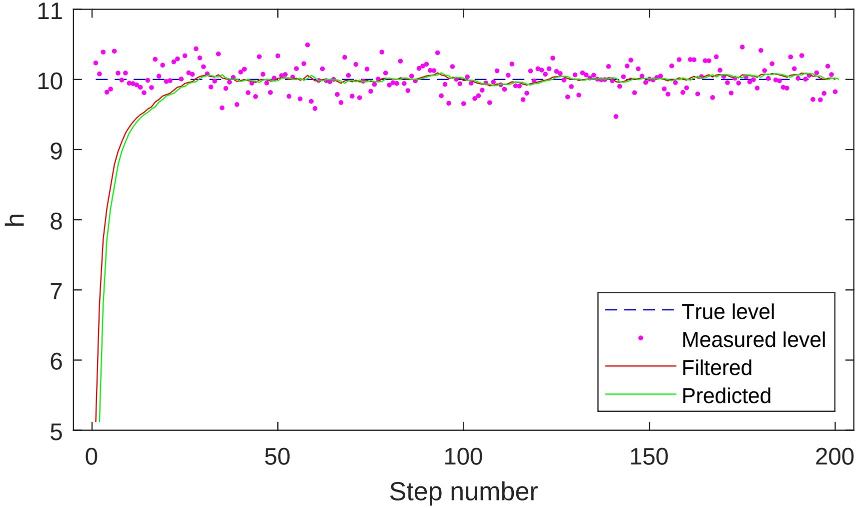
Kalmanův filtr – Obrázek filtrovaného měření

Vykreslíme

```
figure(1);
steps = 1:num_steps;
plot(steps, h,'--b', ...
     steps, measured,'.m', ...
     steps, filt_history,'-r', ...
     steps, pred_history,'-g');
legend('True␣position', 'Measured␣position', 'Filtered',
'Predicted');
xlabel('Step␣number');
ylabel('h');
```

Příklad 1

Obrázek filtrovaného měření



Příklad 2

Pohyb

V této úloze vyzkoušíme KF na syntetických datech polohy vozítka, pohybujícího se po modifikované kruhové dráze.

Prvním krokem je vytvoření generátoru měřených pozic dráhy. Budeme postupovat po etapách.

Etapa 1: Čistě kruhová dráha

Začneme čistou kruhovou dráhou o zadaném poloměru r reprezentovanou n měřeními, vozítko opíše přesně jeden kruh. Výstupem generátoru bude matice $(n \times 2)$, obsahující v každém řádku souřadnice $[x, y]$ vozítka.

Příklad 2

Pohyb

Pro generování použijeme polární souřadnice a hodnoty φ rozdělíme rovnoměrně na intervalu $\langle 0; 2\pi \rangle$ pomocí funkce `linspace()`:

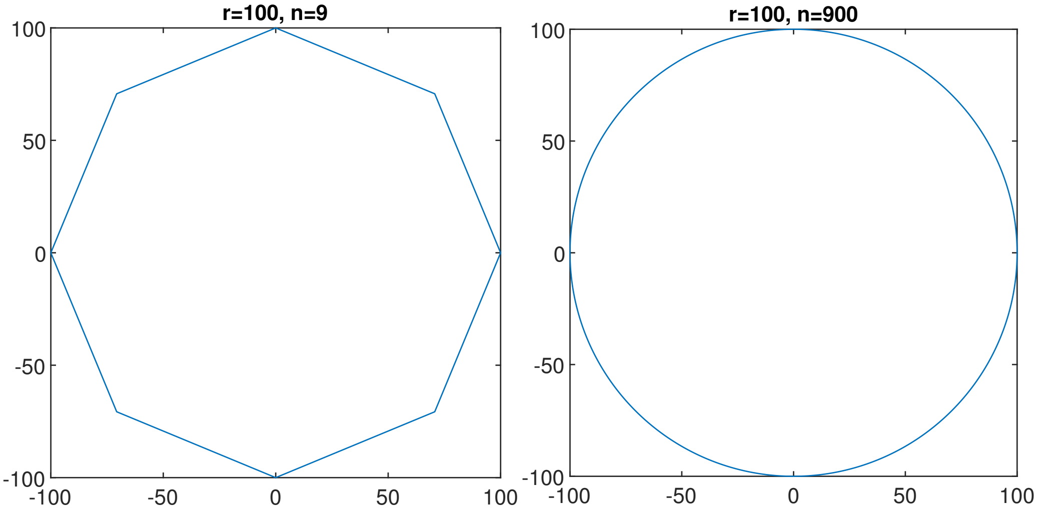
```
function gps=gps_generator0(r,n)
  phi = linspace(....);
  x = ....
  y = ....
  gps = [ .... ];
end
```

Dráhu pak pro zvolené r a n vykreslíme:

```
g=gps_generator0(100,100);
figure(1);
plot(g(:,1), g(:,2));
```

Příklad 2

Kruhová dráha pro $r = 100$ a 9 resp. 900 měřených bodů



Etapa 2: Modulovaná kruhová dráha

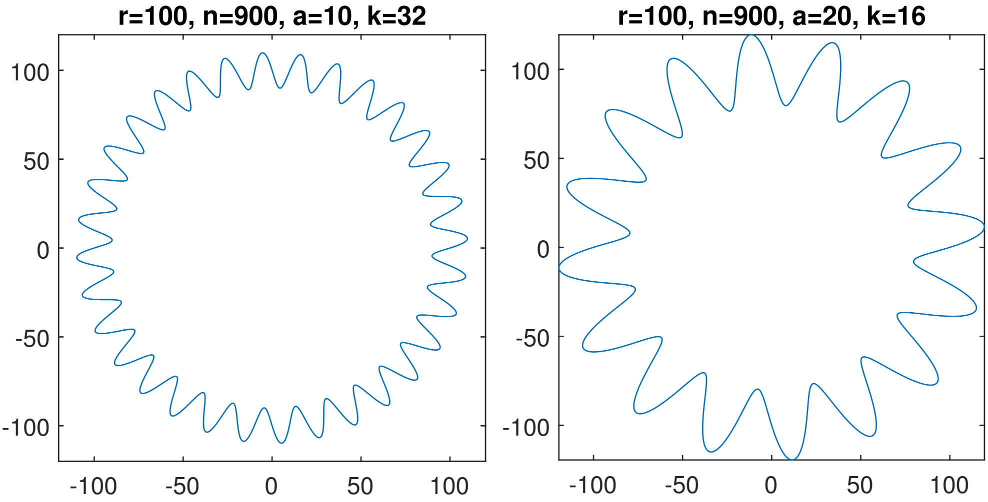
Upravíme `gps_generator0()` o harmonickou modulaci poloměru dráhy. Místo původního poloměru r budeme nyní používat ve výpočtech poloměr $\rho = r + a \sin k\varphi$. Zbytek zůstává.

```
function gps=gps_generator1(r,n,a,k)
  phi = linspace(....);
  rho = r + .....
  x = ....
  y = ....
  gps = [ .... ];
end
```

Dráhu opět pro zvolené r, n, a a k vykreslíme.

Příklad 1

Modulovaná kruhová dráha pro $r = 100$, 900 měřených bodů a dvě různé modulace



Příklad 2

Simulace měření pozice vozidla na dráze

Etapa 3: Modulovaná kruhová dráha se šumem měření

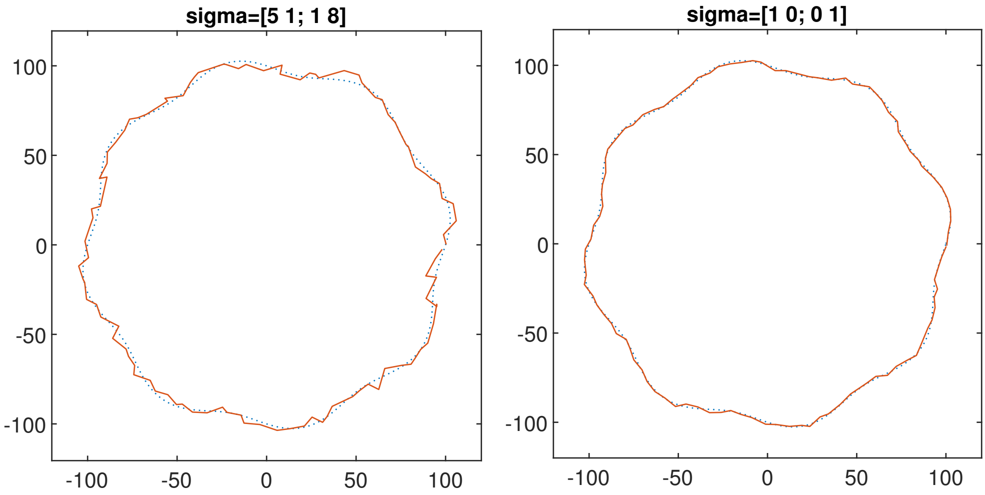
Upravíme gps_generator1() o normálně rozdělený šum pozice se střední hodnotou $\boldsymbol{\mu} = (0, 0)$ a nenulovou kovarianční matici $\boldsymbol{\Sigma}$. Vzorky z multinomiálního rozdělení generujeme v Matlabu funkcí mvnrnd().

```
function gps=gps_generator2(r,n,a,k,sigma)
  phi = linspace(....);
  ro = r + .....
  err = mvnrnd(....);
  x = ....
  y = ....
  gps = [ .... ] + err;
end
```

Dráhu opět pro zvolené *r*, *n*, *a* a *k* vykreslíme.

Příklad 2

Simulace nepřesných měření pozice pro $r = 100$, $a = 4$, $k = 8$ a 100 měřených bodů



Příklad 2

Kalmanův filtr – Model systému

Pro modelování pohybu vozidla použijeme napřed zcela primitivní a nepřesný model, který předpokládá, že vozítko se pohybuje rovnoměrným přímočarým pohybem, a jeho pozice v $k+1$ kroku je dána vztahem

$$\mathbf{p}_{k+1} = \mathbf{p}_k + \Delta\mathbf{p}.$$

Hodnota $\Delta\mathbf{p}$ je pro rovnoměrný přímočarý pohyb konstantní.

Pohybujeme se ve 2D, uvažujeme tedy

- poloha je $\mathbf{p}_k = (x_k, y_k)^\mathsf{T}$
- změna polohy je $\Delta\mathbf{p}_k = (a_k, b_k)^\mathsf{T}$ a předpokládáme, že se v čase nemění

Příklad 2

Kalmanův filtr – Model systému

Sestavíme rovnice vývoje stavu

$$
\begin{aligned}
x_{k+1} &= x_k + a_k \\
y_{k+1} &= y_k + b_k \\
a_{k+1} &= a_k \\
b_{k+1} &= b_k
\end{aligned}
$$

Stav je tedy $\mathbf{x}_k = (x_k, y_k, a_k, b_k)^\mathsf{T}$.

Měříme pouze pozici, tj. souřadnice x_k a y_k.

Příklad 1

Kalmanův filtr – Model systému

Přepíšeme do maticového zápisu

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{k+1} &= \mathbf{A}\mathbf{x}_k \\ \mathbf{z}_k &= \mathbf{C}\mathbf{x}_k \end{aligned}$$

s nulovými pomocnými maticemi **B** a **D**

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Příklad 2

Kalmanův filtr – Skript v Matlabu

Nastavíme základní parametry:

```
radius = 1000; % r = 1000 m
num_coords = 200; % stačí 200 hodnot
a = 4;
k = 8;
R_true = diag([10,10]); % simulované R
```

Vygenerujeme referenční souřadnice a souřadnice měřených pozic zatížené chybou s kovariancí $\mathbf{R}_{\text{true}}$:

```
coord0 = gps_generator1(radius, num_coords, a, k);
coords = gps_generator2(radius, num_coords, a, k, R_true);
```

Příklad 2

Kalmanův filtr – Skript v Matlabu

Zadáme matice soustavy, budeme potřebovat i **B** a **D**:

```
A = [ 1 0 1 0; 0 1 0 1; 0 0 1 0; 0 0 0 1 ];
B = [ 0; 0; 0; 0];
C = [ 1 0 0 0; 0 1 0 0];
D = [ 0; 0 ];
```

Zadáme počáteční podmínky:

```
% Více důvěřujeme měřeným hodnotám
Q = diag([100,100,100,100]); % šum (chyba) modelu
R = diag([10,10]); % šum (chyba) měření
% Počáteční šum procesu a stav
P0 = diag([10, 10, 10, 10]); % bez měření roste o Q, jinak klesá
x0 = [ coords(1,:)'; 0; 0]; % stav je sloupcový vektor!
```

Příklad 2

Kalmanův filtr – Skript v Matlabu

Celkem provedeme `num_coords` iterací. Alokujeme si prostor, kam uložíme predikované souřadnice $\hat{\mathbf{p}}$ a filtrované (měřením korigované) souřadnice $\hat{\mathbf{p}}^*$

```
pred_history = zeros(4, num_coords);
filt_history = zeros(4, num_coords);
```

Nyní nás čeká vytvoření klíčové části skriptu, smyčky, která prochází „změřené“ hodnoty, uložené v proměnné `coords`, pro každou z nich zavolá externí funkci `kalman()` a aktualizuje stav systému a kovarianci šumu procesu. Ve smyčce si zároveň budeme pro pozdější vykreslení ukládat hodnoty predikovaných a filtrovaných souřadnic do matic `pred_history` a `filt_history`.

Příklad 2

Kalmanův filtr – Skript v Matlabu

Doplňte kostru základní smyčky:

```
for k=1:num_coords
  ym = coords(k,:)'; % simulované měření, sloupcov vektor
  % aktualizace stavu modelu na základě starého stavu a měření
  [x0f,x1p,P0f,P1p]=kalman(x0,0,ym,A,B,C,D,P0,Q,R);
  % uložíme pro vykreslení
  pred_history(:,k) = ....; % predikovaný příští stav
  filt_history(:,k) = ....; % filtrovaný současný stav
  % příprava pro další krok
  x0 = ....; % odhad budoucího stavu
  P0 = ....; % odhad nepřesnosti budoucího stavu
end
```

Příklad 2

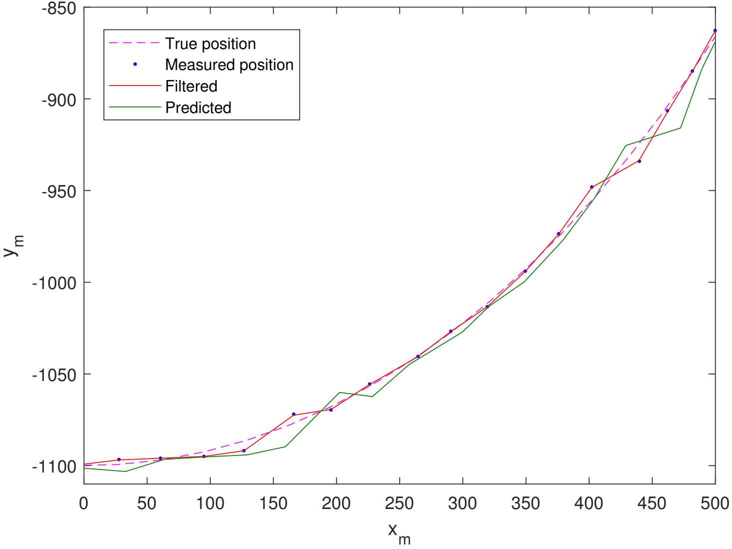
Kalmanův filtr – Obrázek filtrované trajektorie

Vykreslíme

```
figure(1);
plot(coord0(:,1),coord0(:,2),'-m', ...
     coords(:,1),coords(:,2),'.b', ...
     filt_history(1,:),filt_history(2,:),'-r', ...
     pred_history(1,:),pred_history(2,:),'-g');
legend('True␣position', 'Measured␣position', 'Filtered',
'Predicted');
xlabel('x_m');
ylabel('y_m');
```

Příklad 2

Obrázek části filtrované trajektorie



Příklad 3

Pohyb po čtvercové dráze

Pohyb po čtvercové dráze: Místo kruhové modulované dráhy z příkladu 2 použijte dráhu, která má tvar čtverce.

Pohybové rovnice nechte stejné.

Samostatná práce.