11MAMY LS 2017/2018
Cvičení č. 2: 21. 2. 2018
Úvod do Matlabu.

Jan Přikryl

21. února 2018

Po skupinách, na které jste se doufám rozdělili samostatně včera, vyřešte tak, jak nejlépe svedete, níže uvedená zadání. Nepředpokládám, že by bylo více, než 10 skupin, a předpokládám, že jste rozumní a svéprávní a dokážete se dohodnout na tom, kdo si vybere které číslo skupiny. Teoreticky by mělo být možné se již rozřadit přímo po přihlášení na web předmětu, nedokážu ale zkontrolovat, že je vše opravdu funkční.

Řešením každého zadání bude ZIP soubor s dávkovými M soubory nazvanými `reseni1.m`, `reseni2.m` a tak dále + M souborem zadané funkce z příkladu 3 + souborem `skupina.txt` v němž uvedete svá nacionále. Pokud vše bude fungovat, řešení nahrává jeden ze skupiny po přihlášení na `https://zolotarev.fd.cvut.cz/mamy` do 21.2.2018 16:00. V případě nouze, protože nemám možnost zasáhnout, mi můžete soubor poslat e-mailem na školní adresu `prikryl@fd.cvut.cz`, přičemž opět platí výše uvedený časový limit.

U příkladů 4 a 5 předpokládám v některých případech určité základní znalosti lineární algebry a záměrně vám nebudu radit více, rád ale případné dotazy zodpovím příští týden. Chci pouze vědět, jak na tom jste, čtvrteční test to prověří jenom z části.

Skupina 01

Příklad 1:

Je dán vektor $\mathbf{a} = (1 \;\; 2 \;\; 3)$ a $\mathbf{b} = (4 \;\; 5 \;\; 6)$. Uveďte, jak v Matlabu vynásobíte vektor $\mathbf{a}$ s vektorem $\mathbf{b}$ operací typu *prvek s prvkem*?

Příklad 2:

Je dána matice `A=[1 2 4; 6 8 5; 2 2 1]` a matice `B=[0 2 5; 6 9 3; 1 1 4]`. Jak v Matlabu zjistíte, zda jsou prvky matice `A` menší nebo rovny prvkům matice `B`? Zapište výsledek této operace.

Příklad 3:

Naprogramujte M-funkci, implementující jednoduchý diskrétní dynamický lineární systém tzv. *exponenciálního zapomínání* s koeficientem zapomínání α. Výstup tohoto systému v n-tém kroku simulace je pro $n \geq 0$ dán vztahem

$$y[n] = \alpha\, u[n] + (1-\alpha)\, y[n-1].$$

Počáteční podmínka je $y[-1] = 0$.

Funkci budete v Matlabu volat jako

```
>> y = ExpSmooth(u,alpha)
```

kde `u` je vektor vstupních hodnot, `alpha` je hodnota koeficientu zapomínání, přičemž $\alpha \in (0,1)$, a `y` je vektor výstupních hodnot o stejné délce, jako `u`. Nezapomeňte, že Matlab indexuje pole od jedničky, platí tedy $u[0] \equiv$ `u(1)`.

Zapište, jak pro $u = (0,1,0,1,-1,1,0,1)$ a $\alpha = 0{,}9$ vykreslíte do jednoho grafu průběhy hodnot `u` a `y`.

Příklad 4:

Určete $\mathbf{AB} - \mathbf{BA}$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 5 & -2 \\ 0 & 2 & -1 \\ -3 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \ \mathbf{B} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ -2 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

Příklad 5:

Řešte soustavu lineárních rovnic

$$\begin{aligned} 2x + y - z - u &= 4, \\ x + y + z + u &= 2, \\ x + 2y + 3z + 4u &= 7, \\ 3x + 2y - 7z + 2u &= 13. \end{aligned}$$

Skupina 02

Příklad 1:

Jak vytvoříte sloupcový vektor **v**, jež obsahuje posloupnost hodnot od -10 do 10 s krokem 0,1? Jak pomocí vnitřní funkce Matlabu zjistíme délku vektoru **v**?

Příklad 2:

Je dána matice $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 6 \\ 5 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. Jak pouze pomocí indexů a bez pomocných proměnných obrátíte pořadí sloupců matice `A`? Vypište výsledek této operace.

Příklad 3:

Naprogramujte M-funkci, implementující lineární systém váženého klouzavého průměru posledních tří hodnot, popsaný pro $n \geq 0$ vztahem

$$y[n] = \frac{1}{4}\,u[n] + \frac{1}{2}\,u[n-1] + \frac{1}{4}\,u[n-2].$$

Systém je kauzální, hodnoty $u[-1]$ a $u[-2]$ volte nulové.

Funkci budete v Matlabu volat jako

```
>> y = WeightedAvg(u)
```

kde `u` je vektor vstupů systému a `y` je vektor výstupních hodnot o stejné délce, jako vektor `u`. Nezapomeňte, že Matlab indexuje pole od jedničky, platí tedy $u[0] \equiv$ `u(1)`.

Zapište, jakým způsobem do jednoho grafu vykreslíte průběhy hodnot `u` a `y`.

Příklad 4:

Vypočtěte

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 3 & -2 & -2 \\ 1 & 0 & 5 \end{pmatrix}^{1} 2.$$

Příklad 5:

Řešte soustavu lineárních rovnic

$$\begin{aligned} 2x + 3y \phantom{{}+ 5z} + 5u &= 2, \\ x + y + 5z + 2u &= 1, \\ 2x + y + 3z + 2u &= 3, \\ x + y + 3z + 4u &= 3. \end{aligned}$$

Skupina 03

Příklad 1:

Jak v prostředí systému Matlab nadefinujete vektor $\mathsf{a} = (5.0, 4.9, 4.8, \ldots, 1.1, 1.0)$? Napište jakým příkazem zjistíte délku vektoru a.

Příklad 2:

Jak v MATLABu jedním příkazem zjistíte, zda jsou prvky druhého řádku matice `A` větší nebo rovny než odpovídající prvky v prvním sloupci matice `B`? Zapište výsledek této operace pro matice `A=[1 2 4 5; 6 8 5 1; 2 2 1 7]` a
`B=[3 3 2 9; 8 1 2 7; 6 3 5 0; 2 1 3 2]`.

Příklad 3:

Naprogramujte M-funkci, implementující tak zvaný *statický model* opakovaně měřených dat. Vstupem systému je k časových posloupností $u_1, u_2, \ldots, u_k$ měření té samé veličiny, výstup systému v časovém kroku n je pro $n \geq 0$ dán aritmetickým průměrem z k vstupních hodnot $u_1[n], u_2[n], \ldots, u_k[n]$, čili vztahem

$$y[n] = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^{k} u_i[n].$$

Funkci budete v MATLABu volat jako

```
>> y = StaticModel(U)
```

kde `U` je matice sloupcových vektorů vstupních hodnot u_i (počet sloupců matice je tedy roven k, v prvním sloupci je uložena posloupnost u_1, v posledním u_k) a `y` je vektor výstupních hodnot o stejné délce, jako počet řádek matice `U`.

Zapište, jakým způsobem do jednoho grafu vykreslíte průběhy hodnot `u` a `y`.

Příklad 4:

Určete matice $\mathbf{A}\mathbf{A}^{\mathrm{T}}$, $\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}$,

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & 3 & 0 \\ -3 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Příklad 5:

Řešte soustavu lineárních rovnic

$$\begin{aligned} x + 2y \quad\quad\quad &= -1, \\ y + z \quad\; &= 0, \\ x \quad\quad\quad - u &= -1, \\ x + y - z + u &= 2. \end{aligned}$$

Skupina 04

Příklad 1:
Mějme zadaný vektor $\mathbf{v} = (12, 34, 56, 78, 91, 23, 45, 54, 21, 25, 0, 4)$. Jakým způsobem vytvoříte vektor $\mathbf{w}$, jenž obsahuje třetí, pátý, sedmý a devátý prvek vektoru $\mathbf{v}$?

Příklad 2:

Jak v MATLABu vytvoříte matici identity (matici samých jedniček) $\mathbf{B}$ se 3 řádky a 4 sloupci? Je dána matice $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 9 \\ 9 & 12 \end{pmatrix}$. Jak v MATLABu vytvoříte z matic $\mathbf{A}$ a $\mathbf{B}$ matici $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 9 \\ 1 & 1 & 9 & 12 \end{pmatrix}$?

Příklad 3:

Numerický postup výpočtu odmocniny reálného čísla a Newtonovou metodou lze popsat nelineární diferenční rovnicí

$$y[n+1] = \frac{1}{2}\left(y[n] + \frac{a}{y[n]}\right).$$

Naprogramujte M-funkci, implementující výše popsaný nelineární systém. Počáteční hodnotu posloupnosti volte $y[0] = a/2$, výpočet ukončete po n iteracích. Funkci budete v MATLABu volat takto:

```
>> y = Odmocnina(a,n)
```

Zapište, jakým způsobem do jednoho grafu vykreslíte průběhy hodnot `y` a referenční hodnotu `sqrt(a)` (tu lze vykreslit pro $x = [0, n]$ jako $y = [\sqrt{a}, \sqrt{a}]$.

Příklad 4:

Určete inverzní matici k matici $\mathbf{A}$, pokud existuje

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & 0 & 0 & 0 \\ 7 & 0 & 1 & 1 \\ -17 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Příklad 5:

Vypočtěte vlastní čísla a vlastní vektory následující matice:

$$\begin{pmatrix} -9 & 8 & -3 \\ -19 & 17 & -7 \\ -12 & 10 & -4 \end{pmatrix}.$$

Skupina 05

Příklad 1:

Mějme zadaný vektor $\mathbf{v} = (12, 34, 56, 78, 91, 23, 45)$. Jakým způsobem vytvoříte vektor $\mathbf{w}$, jenž obsahuje druhý, čtvrtý a šestý prvek vektoru $\mathbf{v}$?

Příklad 2:

Je dána matice `A=[ 1 2 ; 3 4 ]`.

Jak z matice $\mathbf{A}$ vytvoříte matici $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 3 & 4 \end{pmatrix}$? Pokud byste neznali dimenze $\mathbf{B}$, jakou vnitřní funkci MATLABu použijete ke zjištění počtu řádek a sloupců této matice?

Příklad 3:

Naprogramujte M-funkci, implementující nelineární systém modelující relativní odchylku referenční a alternativní časové řady nenulových pozitivních hodnot. Systém lze popsat diferenční rovnicí

$$y[n] = \frac{u_{\mathrm{ref}}[n] - u_{\mathrm{alt}}[n]}{u_{\mathrm{ref}}[n]}.$$

Funkci budete v MATLABu volat jako

```
>> y = RelDiff(uref,ualt)
```

kde `uref` je vektor s daty referenční časové řady, `ualt` je vektor s daty alternativní časové řady (oba vektory mají stejnou délku) a `y` je vektor výstupních hodnot. Nezapomeňte, že Matlab indexuje pole od jedničky, platí tedy $u_{\mathrm{ref}}[0] \equiv$ `uref(1)` a analogicky $u_{\mathrm{alt}}[0] \equiv$ `ualt(1)`.

Zapište, jakým způsobem do jednoho obrázku vykreslíte vlevo graf s průběhy hodnot `uref` a `ualt` a vpravo graf hodnot `y`.

Příklad 4:

Určete matici X tak, aby platila rovnost

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 0 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{X} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 5 & 6 & 0 \\ -1 & 2 & -3 \end{pmatrix}.$$

Příklad 5:

Nalezněte všechny hodnoty $\sqrt[3]{-27}$.

Skupina 06

Příklad 1:

Je dán vektor $\mathsf{v} = (2, 5, 8, 11, 14, 17, 20)$. Jak tento vektor nadefinujete v prostředí systému MATLAB pomocí příkazu sekvence? Napište příkaz, pomocí něhož z libovolného vektoru v délky větší, než tři, odstraníte první až třetí prvek.

<u>Příklad 2:</u>

Jak v MATLABu zjistíte, které prvky libovolné matice **A** jsou větší nebo rovny odpovídajícím prvkům libovolné matice **B**, jež má stejný rozměr? Jsou dány konkrétní matice

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 6 & 8 & 5 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 5 \\ 2 & 2 & 1 & 7 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 6 & 7 & 4 & 0 \\ 2 & 2 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Vypište výsledek výše uvedené operace porovnání pro tyto dvě matice.

<u>Příklad 3:</u>

Naprogramujte M-funkci, která pro vstupní vektor dat **v** vykreslí do grafu hodnoty jednotlivých prvků vektoru **v** a hodnoty větší, než m, barevně zvýrazní. Návratovou hodnotou funkce bude počet prvků vstupního vektoru **v**, které jsou větší, než zadaná vstupní hodnota m.

Funkci budete v MATLABu volat takto:

```
>> pocet = PocetVetsich(v,m)
```

<u>Příklad 4:</u>

Vypočtěte následující determinant

$$\begin{vmatrix} -1 & -2 & 3 & -1 \\ 2 & 4 & -3 & 2 \\ 1 & 2 & -2 & -1 \\ -2 & 1 & 1 & -2 \end{vmatrix}.$$

<u>Příklad 5:</u>

Vypočtěte vlastní čísla a vlastní vektory následující matice:

$$\begin{pmatrix} -9 & 8 & -3 & 1 \\ -9 & 8 & 3 & 2 \\ -19 & 17 & -7 & 4 \\ -12 & 10 & -4 & 0 \end{pmatrix}.$$

Skupina 07

<u>Příklad 1:</u>

Je dán sloupcový vektor $\mathbf{v} = (1000, 998, 996, \ldots, 2)^{\mathrm{T}}$. Jak tento vektor efektivně nadefinujete v prostředí systému MATLAB? Jak tento sloupcový vektor změníte na vektor řádkový?

Příklad 2:

Je dána matice

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 3 & 9 & 12 \\ 0 & 12 & 0 \\ 12 & 9 & 3 \end{pmatrix}.$$

Jak v MATLABu určíte matici $\mathbf{N}$, jež je inverzní maticí k matici $\mathbf{M}$ (platí tedy $\mathbf{N} = \mathbf{M}^{-1}$)? Jakým způsobem získáte matici $\mathbf{Q}$, pro niž platí $\mathbf{Q} = (\mathbf{MN})^{\mathrm{T}}$? Vypište její hodnoty.

Příklad 3:

Naprogramujte M-funkci s dvěma parametry $\mathbf{v}$ (vektor kladných reálných hodnot) a n (reálné číslo). Výstupem funkce bude vektor $\mathbf{y}$ stejné délky, jako $\mathbf{v}$, obsahující na odpovídajících si pozicích buď hodnotu prvku $v[i]$, pokud je tato hodnota menší, než n, v opačném případě číslo -1.

Funkce zároveň do grafu vykreslí hodnoty jednotlivých prvků vektoru $\mathbf{v}$, a odlišnou barvou hodnoty vektoru $\mathbf{y}$ větší, než 0.

Funkci budete v MATLABu volat takto:

```
>> y = RPozice(v,n)
```

Příklad 4:

Zjistěte, zda jsou vektory $\mathbf{p}$, $\mathbf{q}$, $\mathbf{r}$ a $\mathbf{s}$ lineárně závislé či nezávislé.

$$\begin{aligned} \mathbf{p} &= (2, 1, 3, -1), \\ \mathbf{q} &= (-1, 1, -3, 1), \\ \mathbf{r} &= (4, 5, 3, -1), \\ \mathbf{s} &= (1, 5, -3, 1). \end{aligned}$$

Příklad 5:

Vypočtěte vlastní čísla a vlastní vektory následující matice:

$$\begin{pmatrix} -12 & 8 & -3 & 1 \\ -19 & 8 & 3 & 2 \\ -9 & 1 & -7 & 4 \\ 9 & 0 & -4 & 0 \end{pmatrix}.$$

Skupina 08

Příklad 1:

Zapište, jak pomocí příkazu sekvence vytvoříte vektor $\mathbf{v}$, jenž obsahuje klesající posloupnost hodnot od 2π do 0 do s krokem $\pi/36$ (použijte vnitřní proměnnou MATLABu `pi`). Jak pomocí vnitřní funkce MATLABu zjistíte počet prvků tohoto vektoru?

Příklad 2:

Jsou dány matice

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 6 & 8 & 5 \\ 1 & 2 & 4 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \ \mathbf{Z} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

přičemž matice $\mathbf{Z}$ je výsledkem operace porovnání, zadané na příkazové řádce MATLABu jako `Z=(A<=B)`. Zapište příkaz MATLABu, jímž zadáte nějakou matici $\mathbf{A}$ takovou, že výsledkem operace porovnání `A<=B` jejích prvků s prvky matice $\mathbf{B}$ bude matice $\mathbf{Z}$. Pokud byste neznali dimenze $\mathbf{B}$, jakou vnitřní funkci MATLABu použijete ke zjištění počtu řádek a sloupců této matice?

Příklad 3:

Naprogramujte M-funkci implementující systém, jenž každý prvek posloupnosti $u[0]$, $u[1]$, $\ldots$, $u[k]$, uložené ve vstupním vektoru $\mathbf{u}$, podrobí nelineární transformaci popsané pro $n \geq 0$ diferenční rovnicí

$$y[n] = k \cdot u[n]u[n-1] + q.$$

Uvažujte počáteční podmínku $u[-1] = 0{,}1$.

Funkci budete v MATLABu volat takto:

```
>> y = NLTrafo(u,k,q)
```

kde `u` je vstupní vektor dat, `k` a `q` jsou parametry. Nezapomeňte, že Matlab indexuje pole od jedničky, platí tedy $u[0] \equiv$ `u(1)`.

Vektory $\mathbf{u}$ a $\mathbf{y}$ pro parametry $k = 1/2$ a $q = 1$ vykreslete do jednoho obrázku.

Příklad 4:

Napište vektor $\mathbf{u} = (11, -6, 5)$ jako lineární kombinaci vektorů $\mathbf{p}$, $\mathbf{q}$ a $\mathbf{r}$.

$$\begin{aligned} \mathbf{p} &= (3, -2, 1), \\ \mathbf{q} &= (-1, 1, -2), \\ \mathbf{r} &= (2, 1, 3). \end{aligned}$$

Příklad 5:

Řešte soustavu lineárních rovnic

$$\begin{aligned} x + 8y \quad\quad\quad\;\; &= -1, \\ y + z \quad\;\; &= \;\;\, 0, \\ x \quad\quad\quad\quad - u &= -1, \\ x + \;\; y - z + u &= \;\;\, 2. \end{aligned}$$

Skupina 09

Příklad 1:

Jak zadáte v MATLABU sloupcový vektor $\mathbf{v} = (6, 8, 2, 4, 1)^{\mathrm{T}}$? Jakým způsobem vynásobíte vektor $\mathbf{v}$ s vektorem $\mathbf{u} = (2, 8, 1, 5, 1)$ tak, aby výsledkem byla jedna skalární hodnota?

Příklad 2:

Napište posloupnost příkazů, jejíž pomocí v libovolné čtvercové matici A rozměrů nejméně 2×2 vzájemně zaměníte prvky prvního řádku a druhého sloupce.
Je-li dána konkrétní matice

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 6 & 8 & 5 \\ 1 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 7 \end{pmatrix}^{-1},$$

vypište, jaký bude výsledek této záměny. Nezapomeňte na inverzi v zadání $\mathbf{A}$.

Příklad 3:

Naprogramujte M-funkci, která v množině bodů v rovině, zadaných maticí kartézských souřadnic, nalezne dvojici bodů s minimální Euklidovskou vzdáleností. Vstupní matice $\mathbf{P}$ je zadána jako

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} x_0 & y_0 \\ x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ \vdots & \vdots \end{pmatrix},$$

jednotlivé body jsou tedy uloženy po řádcích. K určení počtu zpracovávaných bodů lze s výhodou použít funkci `size()`. Výstupem funkce budou souřadnice dvou bodů, p_1 a p_2, jež jsou si nejblíže.

Funkci budete v MATLABu volat takto:

```
>> [p1,p2] = NejblizsiBody ( P )
```

Použijte vytvořenou funkci na vámi vytvořená vzorová data, vykreslete vstupní množinu bodů a označte jinou barvou dvojici nalezených bodů.

Příklad 4:

Určete souřadnice vektoru $\mathbf{u}$ vzhledem k bázi $\mathcal{M}$.

$$\mathbf{u} = (-10, 7, -4),$$
$$M = \{(2,1,3), (-3,1,-2), (5,-2,4)\}$$

Příklad 5:

Řešte soustavu lineárních rovnic

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} x & + & 2y & & & & & = & -1, \\ & & y & + & z & & & = & 9, \\ x & & & & & - & u & = & -1, \\ x & + & y & - & z & + & u & = & 2. \end{array}$$

Skupina 10

Příklad 1:

Je dán vektor $\mathbf{v} = (1 \;\; 2 \;\; 3 \;\; 4 \;\; 5 \;\; 6)$. Jak tento vektor nadefinujete pomocí *dvojtečkové* konvence? Napište příkazy, pomocí kterých vzájemně zaměníte hodnotu druhého a předposledního prvku *libovolného* vektoru $\mathbf{z}$.

Příklad 2:

Je dána matice `A=[1 2 4; 6 8 5; 2 2 1]` a matice `B=[0 2 5; 6 9 3; 1 1 4]`. Zapište jediný příkaz, jímž nahradíte poslední dva sloupce matice `A` prvními dvěma řádky matice `B`.

Příklad 3:

Naprogramujte M-funkci, implementující tzv. *autoregresní model s externími vstupy (ARX)* druhého řádu. Výstup systému v n-tém kroku simulace bude uvažovat pouze jeden vstup a je pro $n \geq 0$ dán vztahem

$$y[n] = c_0\, y[n-1] + c_1\, y[n-2] + b\, u[n].$$

Počáteční podmínky nechť jsou $y[-1] = 0$ a $y[-2] = 0$.

Funkci budete v MATLABu volat jako

```
>> y = ModelARX(u,b,c)
```

kde `u` je vektor vstupních hodnot, `b` je zesílení vstupu, `c` je vektor autoregresních parametrů, $\mathbf{c} = [c_0, c_1]$, a `y` je vektor výstupních hodnot o stejné délce, jako `u`. Nezapomeňte, že Matlab indexuje pole od jedničky, platí tedy $u[0] \equiv$ `u(1)`.

Demonstrujte funkci pro vámi vygenerovaná data a do jednoho grafu vykreslete průběhy hodnot `u` a `y`.

Příklad 4:

Určete hodnotu parametru $a \in \mathbb{R}$ tak, aby vektor $\mathbf{u}$ ležel ve vektorovém prostoru generovaném množinou $\mathcal{M}$.

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= (3, 1, a, -2), \\ \mathcal{M} &= \{(2, 2, 4, 0), (-1, 1, 1, 1), (0, 0, 0, 1)\} \end{aligned}$$

Příklad 5:

Řešte soustavu lineárních rovnic

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} x & + & 2y & & & & & = & -10, \\ & & y & + & z & & & = & 0, \\ x & & & & & - & u & = & -1, \\ x & + & y & - & z & + & u & = & 2. \end{array}$$