

11MSP: Domácí příprava č. 1

Typy systémů, typy signálů, odezvy. Iterativní řešení diferenčních rovnic

Bohumil Kovář, Jan Příkryl, Lucie Kárná

27. května 2020

Obsah

1	Typy systémů	1
2	Typy signálů	2
3	Odezvy systému	3
4	Iterativní řešení diferenčních rovnic	6

Do této verze pro LS 2019/2020 jsme přidali výsledky k většině příkladů. Výsledky jsou bez záruky, případné další korekce budeme zmiňovat na tomto místě.

1 Typy systémů

Úkol 1. Dynamický systém je popsán rovnicí

$$y''(t)^2 - y^3(t) = a_1 y(t) + b_1 u(t).$$

Uvedený systém je

- | | |
|---|--|
| <input type="checkbox"/> spojitý | <input type="checkbox"/> diskrétní |
| <input type="checkbox"/> autonomní | <input type="checkbox"/> neautonomní |
| <input type="checkbox"/> lineární | <input type="checkbox"/> nelineární |
| <input type="checkbox"/> časově invariantní | <input type="checkbox"/> časově proměnný |

V uvedených dvojicích odpovědi označte správnou odpověď.

Úkol 2. Dynamický systém je popsán rovnicí

$$y''(t) + t(t^2 + 1)y'(t) + y(t) = t(1 + t^2)^2 + tu(t)$$

Uvedený systém je

- | | |
|---|--|
| <input type="checkbox"/> spojitý | <input type="checkbox"/> diskrétní |
| <input type="checkbox"/> autonomní | <input type="checkbox"/> neautonomní |
| <input type="checkbox"/> lineární | <input type="checkbox"/> nelineární |
| <input type="checkbox"/> časově invariantní | <input type="checkbox"/> časově proměnný |

V uvedených dvojicích odpovědí označte správnou odpověď.

Úkol 3. Dynamický systém je popsán rovnicí

$$y''(t) - t y'(t) = 4y(t) + \mathbb{1}(t).$$

Uvedený systém je

- | | |
|---|--|
| <input type="checkbox"/> spojitý | <input type="checkbox"/> diskrétní |
| <input type="checkbox"/> autonomní | <input type="checkbox"/> neautonomní |
| <input type="checkbox"/> lineární | <input type="checkbox"/> nelineární |
| <input type="checkbox"/> časově invariantní | <input type="checkbox"/> časově proměnný |

V uvedených dvojicích odpovědí označte správnou odpověď.

Úkol 4. Dynamický systém je popsán rovnicí

$$y[n + 2] + (\sin n)y[n] = \frac{1}{n}$$

Uvedený systém je

- | | |
|---|--|
| <input type="checkbox"/> spojitý | <input type="checkbox"/> diskrétní |
| <input type="checkbox"/> autonomní | <input type="checkbox"/> neautonomní |
| <input type="checkbox"/> lineární | <input type="checkbox"/> nelineární |
| <input type="checkbox"/> časově invariantní | <input type="checkbox"/> časově proměnný |

V uvedených dvojicích odpovědí označte správnou odpověď.

Úkol 5. Dynamický systém je popsán rovnicí

$$y[n - 2] + \sqrt{y[n]} = y[n + 1]$$

Uvedený systém je

- | | |
|---|--|
| <input type="checkbox"/> spojitý | <input type="checkbox"/> diskrétní |
| <input type="checkbox"/> autonomní | <input type="checkbox"/> neautonomní |
| <input type="checkbox"/> lineární | <input type="checkbox"/> nelineární |
| <input type="checkbox"/> časově invariantní | <input type="checkbox"/> časově proměnný |

V uvedených dvojicích odpovědí označte správnou odpověď.

2 Typy signálů

Úkol 6. Mějme dva periodické signály $x(t)$ a $y(t)$ s různými periodami $T_x \neq T_y$. Určete, za jakých podmínek je signál

$$z(t) = x(t) + y(t)$$

periodický a jaká je jeho fundamentální perioda.

Výsledek: [Viz přednášky.]

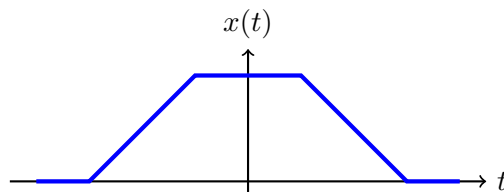
Úkol 7. Je signál

$$x(t) = 2 \sin 2t - \sin \pi t$$

periodický? Jaká je jeho fundamentální perioda?

Výsledek: [$f_1 = \sin 2t, f_2 = \sin \pi t, T_1 = \pi, T_2 = 2, T_f = \text{neex.}$]

Úkol 8. Mějme signál $x(t)$ s průběhem



Určete \dot{x} a \ddot{x} .

Výsledek: [Graficky, derivace lineární funkce je směrnice přímky, druhá derivace je derivace první derivace.]

Úkol 9. Je signál

$$x(t) = 3 \sin 2t + 2 \sin \left(3t + \frac{\pi}{6} \right)$$

periodický? Jaká je jeho fundamentální perioda?

Výsledek: [$f_1 = \sin 2t, f_2 = \left(3t + \frac{\pi}{6} \right), T_1 = \pi, T_2 = \frac{2\pi}{3}, T_f = 2\pi.$]

Úkol 10. Je signál

$$x(t) = \begin{cases} \sin 4\pi t & t \in \langle -2, 2 \rangle \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$$

periodický? Jaká je jeho fundamentální frekvence?

Výsledek: [$\forall T_f \in \mathbb{R} : f(t) \neq f(t + T_f).$]

3 Odezvy systému

Příklad 1. Určete prvních deset hodnot odezvy diskrétního systému, jenž je popsán diferenční rovnicí

$$y[n + 2] - 2y[n + 1] + y[n] = u[n]$$

s počátečními podmínkami $y[0] = -1$ a $y[1] = 0$ na vstupní posloupnost

$$u[n] = \{1, -1, 0, -1, 1, -1, 0, -1, 1, 0, 1, \dots\}$$

a zakreslete je do grafu.

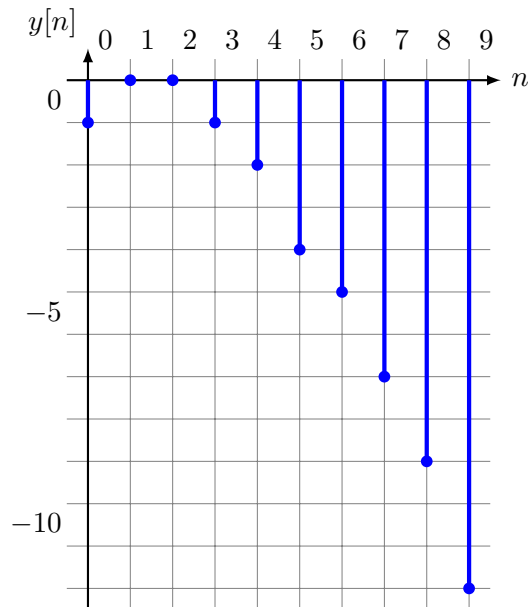
Řešení:

Systém je druhého řádu, první dvě hodnoty posloupnosti $y[n]$ jsou dány, pro $n = 0, 1, \dots, 7$ počítáme tedy hodnoty $y[2]$ až $y[9]$ jako

$$y[n + 2] = 2y[n + 1] - y[n] + u[n].$$

Výsledek shrnuje následující tabulka a graf:

n	$u[n]$	$y[n]$
0	1	-1
1	-1	0
2	0	0
3	-1	-1
4	1	-2
5	-1	-4
6	0	-5
7	-1	-7
8	1	-9
9	0	-12



□

Úkol 11. Určete prvních deset hodnot posloupnosti impulsní odezvy diskrétního systému, jenž je popsán diferenční rovnicí

$$y[n + 2] - 2y[n + 1] + y[n] = u[n]$$

a zakreslete je do grafu.

$$\text{Výsledek: } \left[y[n] = h[n] \Leftrightarrow u[n] = \delta[n] \right]$$

Úkol 12. Určete prvních pět hodnot odezvy diskrétního systému s impulsní odezvou

$$h[n] = 2^{-n}$$

na vstupní signál

$$u[n] = (-1)^n$$

a zakreslete je do grafu.

$$\text{Výsledek: } \left[y[n] = \sum_{k=0}^n h[k]u[n-k] \right]$$

Úkol 13. Určete prvních deset hodnot posloupnosti přechodové odezvy diskrétního systému, jenž je popsán diferenční rovnicí

$$y[n+2] - 2y[n+1] + y[n] = u[n].$$

a zakreslete je do grafu.

$$\text{Výsledek: } \left[y[n] = s[n] \Leftrightarrow u[n] = \mathbf{1}[n] \right]$$

Úkol 14. Diskrétní systém, na jehož vstup je přiveden signál $x[n]$, je pro $n \geq 0$ definován impulsní odezvou $h[n]$. Pro případ, kdy

$$\begin{aligned} x[n] &= \alpha^n \mathbf{1}[n], & 0 < \alpha < 1, \\ h[n] &= \mathbf{1}[n], \end{aligned}$$

odvodte vztah pro $y[n]$. Pro hodnotu $\alpha = 0,5$ spočítejte prvních pět členů $y[n]$ a zakreslete je spolu s $x[n]$ do jednoho grafu.

$$\text{Výsledek: } \left[\text{iteračně, } y[n] = \sum_{k=0}^n \alpha^k = \frac{1 - \alpha^{n+1}}{1 - \alpha} \right]$$

Úkol 15. Určete prvních deset hodnot posloupnosti impulsní odezvy diskrétního systému, jenž je popsán diferenční rovnicí

$$y[n+2] + y[n+1] + n y[n] = u[n]$$

a zakreslete je do grafu.

$$\text{Výsledek: } \left[h[n] \Rightarrow \text{mulové p.p., } y[n] = \{0, 0, 1, -1, -1, 5, \dots\} \right]$$

4 Iterativní řešení diferenčních rovnic

Úkol 16. Nalezněte vztah pro výstup systému $y[n]$, je-li systém popsán diferenční rovnicí

$$y[n + 1] - 2y[n] = u[n]$$

s počáteční podmínkou $y[0] = 0$.

$$\text{Výsledek: } \left[y[n] = \sum_{m=0}^{n-1} 2^{n-m-1} u[m] \right]$$

Úkol 17. Nalezněte vztah pro výstup systému $y[n]$, je-li systém popsán diferenční rovnicí

$$y[n + 1] - 4y[n] = 0$$

s počáteční podmínkou $y[0] = \beta$.

$$\text{Výsledek: } \left[y[n] = \beta \cdot 4^n \right]$$

Úkol 18. Nalezněte vztah pro výstup systému $y[n]$, je-li systém popsán diferenční rovnicí

$$y[n + 1] + ay[n] = \mathbf{1}[n]$$

s počáteční podmínkou $y[0] = 1$.

$$\text{Výsledek: } \left[y[n] = \sum_{k=0}^n (-a)^k = \frac{1 - (-a)^{n+1}}{1 + a} \right]$$