Cvičení 9 – Stabilita spojitých systémů

Modelování systémů a procesů

Lucie Kárná

karna@fd.cvut.cz

April 21, 2020

Opakování z přednášky: přenosová funkce

Definice přenosové funkce

$$H(p) = \frac{Y(p)}{U(p)}$$

za nulových počátečních podmínek

Vztah vstupu a výstupu

$$y(t) = u(t) * h(t)$$

Vztah přenos – impulsní odezva

$$h(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{H(p)\right\}$$

Pozor!

Hvězdička znamená konvoluci, nikoliv násobení!

Opakování z přednášky: určení přenosové funkce z diferenciální rovnice vnějšího popisu

- LTI systém:

$$\sum_{k=0}^{n} a_k y^{(k)}(t) = u(t)$$

- nulové počáteční podmínky: $y^{(k)}(0) = 0 \ \forall k$
- po Laplacově transformaci:

$$\sum_{k=0}^{n} a_k p^k Y(p) = U(p)$$

- po úpravě:

$$H(p) = \frac{Y(p)}{U(p)} = \frac{1}{\sum a_k p^k}.$$

Příklad 1: přenos obecného LTI systému druhého řádu

Zadání:

Nalezněte přenosovou funkci a impulsní odezvu systému

$$y''(t) + 4\,y'(t) + 13\,y(t) = u(t)$$

s počátečními podmínkami

$$y(0) = c_0 \quad \text{a} \quad y'(0) = c_1$$

Řešení:

Po Laplaceově transformaci:

$$p^2\,Y(p) - pc_0 - c_1 + 4\,(p\,Y(p) - c_0) + 13\,Y(p) = U(p)$$

Po úpravě:

$$Y(p)\left(p^2 + 4pY(p) + 13\right) = U(p) + pc_0 + c_1 + 4c_0$$

odezva LTI systému	=	**přechodová složka** odezva na počáteční podmínky	+	**ustálená složka** odezva na vstupní signál

Příklad 1:

$$Y(p) = \frac{U(p) + c_1 + (p+4)c_0}{p^2 + 4p + 13} = \frac{c_1 + (p+4)c_0}{p^2 + 4p + 13} + \frac{U(p)}{p^2 + 4p + 13}$$

$$= \text{přechodová složka} + \text{ustálená složka}$$

Příklad 1 – přenosová funkce a impulsní odezva

- nulové počáteční podmínky $c_0 = 0, c_1 = 0$:

$$Y(p) = \frac{U(p)}{p^2 + 4p + 13}$$

Přenosová funkce

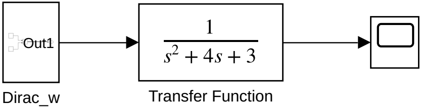
$$H(p) = \frac{Y(p)}{U(p)} = \frac{1}{(p^2 + 4\,p + 4) + 9} = \frac{1}{(p+2)^2 + 9}$$

Impulsní odezva = inverzní Laplaceova transformace přenosové funkce

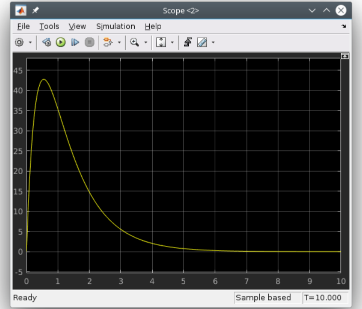
$$h(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{H(p)\right\} = \frac{1}{3} \cdot e^{-2t} \sin 3t.$$

Blok Transfer Fcn

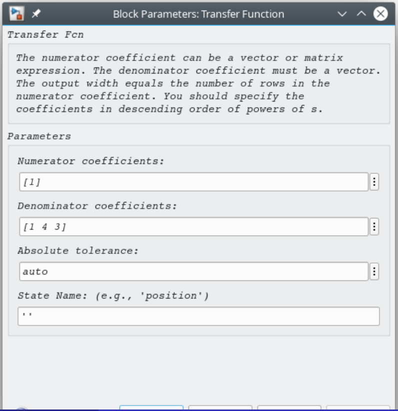
Vykreslení ustálené složky



t



- Numerator coefficients = koeficienty čitatele
- Denominator coefficients = koeficienty jmenovatele



1. Přenosová funkce

2. Stabilita spojitých systémů
   - Stabilní systém
   - Nestabilní systém
   - Mez stability

3. Přenosová funkce vnitřního popisu

Stabilita spojitých systémů

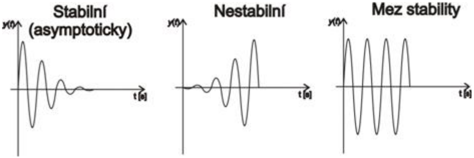
- **(Asymptoticky) stabilní LTI systém:** pro impulsní odezvu platí

$$\lim_{t \to \infty} h(t) = 0.$$

- **Nestabilní systém:**

$$\lim_{t \to \infty} |h(t)| = \infty.$$

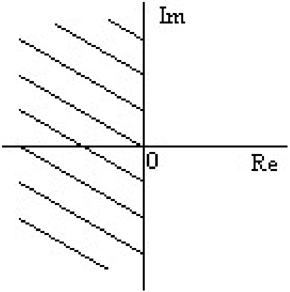
- **Systém na mezi stability (metastabilní):**
  $h(t)$ nemá nulovou limitu, ale je omezená
  (tj. $\lim h(t) = c \neq 0$ nebo limita neexistuje – např. periodická funkce).

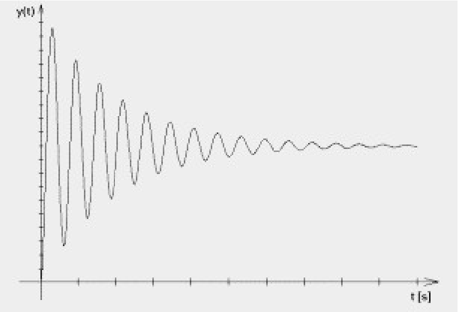


Stabilní systém

Stabilní spojitý LTI systém

Všechny póly přenosové funkce $H(p)$ stabilního systému leží v levé části p-roviny (jejich reálná část je záporná).

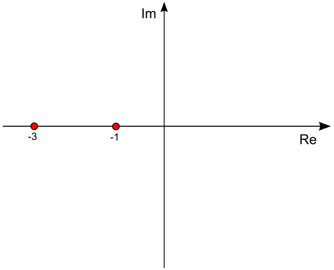




Příklad 2 – jednoduché póly

Spojitý systém 2. řádu má přenosovou funkci

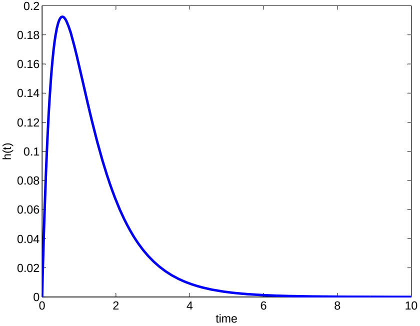
$$H(p) = \frac{1}{p^2 + 4p + 3} = \frac{1}{(p+1)(p+3)}.$$

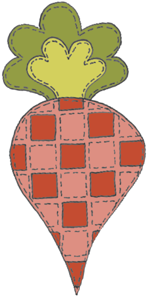


Póly přenosové funkce $p_1 = -1$ a $p_2 = -3$ leží v levé části p-roviny $\Rightarrow$ stabilní systém

Příklad 2 – impulsní odezva

$$h(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{H(p)\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{k_1}{p+1} + \frac{k_2}{p+3}\right\} = \frac{1}{2}e^{-t} - \frac{1}{2}e^{-3t}.$$





Příklad 3 – komplexně sdružené póly

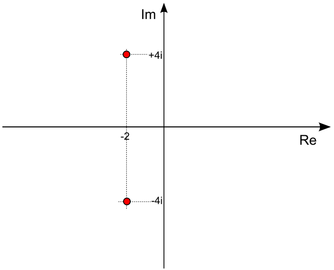
Spojitý systém 2. řádu má přenosovou funkci

$$H(p) = \frac{1}{p^2 + 4p + 20}.$$

Jeden pár komplexně sdružených pólů

$$p_{1,2} = -2 \pm 4i$$

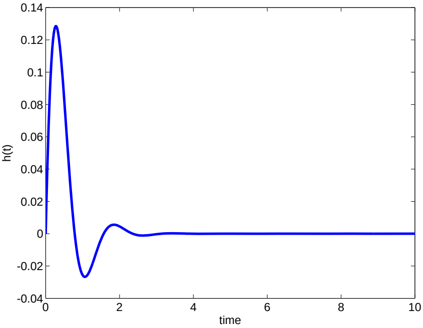
s reálnou částí v levé části p-roviny $\Rightarrow$ stabilní systém



Příklad 3 – impulsní odezva

$$h(t) = \mathcal{L}^{-1}\{H(p)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{p^2+4p+20}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{4}\frac{4}{(p+2)^2+16}\right\} = \dots$$

$$\dots = \frac{1}{4}e^{-2t}\sin(4t).$$



Zpět k příkladu 1 – dokončení

Zadání:

Nalezněte přenosovou funkci a impulsní odezvu systému

$$y''(t) + 4\,y'(t) + 13\,y(t) = u(t)$$

s počátečními podmínkami

$$y(0) = c_0 \quad \text{a} \quad y'(0) = c_1$$

Přenosová funkce: $H(p) = \frac{1}{(p^2+4\,p+4)+9} = \frac{1}{(p+2)^2+9}$ má póly

$$\begin{aligned} p_1 &= -2 + 3i, \\ p_2 &= -2 - 3i. \end{aligned}$$

Rozhodující je $\mathbf{Re}(p_1) = \mathbf{Re}(p_2) = -2$, systém je stabilní.

Nestabilní systém

Nestabilní spojitý LTI systém

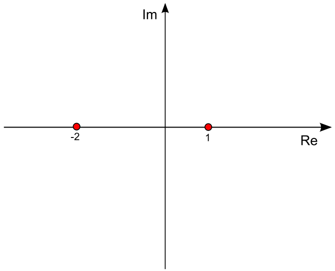
Nestabilní spojitý LTI systém splňuje jedno z následujících kritérií:

- alespoň jeden pól přenosové funkce $H(p)$
  leží v pravé části p-roviny (jeho reálná část je kladná), nebo
- přenosová funkce $H(p)$ má násobné póly na imaginární ose.

Příklad 4

Spojitý LTI systém 2. řádu má přenosovou funkci

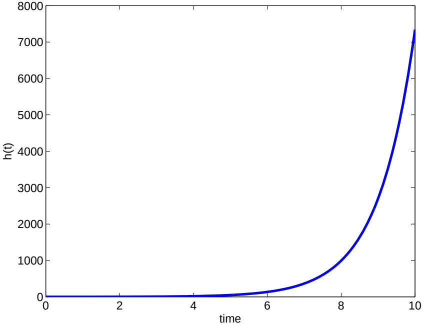
$$H(p) = \frac{1}{p^2 + p - 2} = \frac{1}{(p+2)(p-1)}.$$

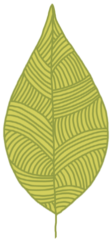


jeden z pólů přenosové funkce,
$p_2 = 1$ leží v pravé části p-roviny
$\Rightarrow$ nestabilní systém

Příklad 4 – impulsní odezva

$$h(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{H(p)\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{k_1}{p+2} + \frac{k_2}{p-1}\right\} = -\frac{1}{3}e^{-2t} + \frac{1}{3}e^{t}.$$





Příklad 5 – násobný pól v nule

Spojitý LTI systém 2. řádu má přenosovou funkci

$$H(p) = \frac{1}{p^3 + p^2} = \frac{1}{p^2(p+1)}.$$

dvojnásobný pól přenosové funkce $p_1 = p_2 = 0$
leží na imaginární ose $\Rightarrow$ nestabilní systém.

$$H(p) = \frac{1}{p^2(p+1)} = \frac{1}{p^2} - \frac{1}{p} + \frac{1}{p+1}$$

$$h(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{H(p)\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{p^2} - \frac{1}{p} + \frac{1}{p+1}\right\} = t - \mathbf{1}(t) + e^{-t}.$$

Úloha 1

Spojitý LTI systém 2. řádu má přenosovou funkci

$$H(p) = \frac{1}{p^2 - 4p + 5}.$$

Určete

- póly přenosové funkce,
- (ne)stabilitu systému,
- impulsní odezvu $h(t) = \dots$

Namodelujte impulsní odezvu (= odezva na $\delta(t)$) v Simulinku

Metastabilní systém

Spojitý LTI systém na mezi stability (metastabilní systém)

Metastabilní spojitý LTI systém splňuje následujících kritérium:

- žádný pól přenosové funkce $H(p)$
  neleží v pravé části p-roviny (všechny mají nekladnou reálnou část),
  a zároveň
- alespoň jeden pól přenosové funkce $H(p)$
  leží na imaginární ose (je ryze imaginární – má nulovou reálnou část),
  a zároveň
- póly ležící na imaginární ose nejsou násobné.

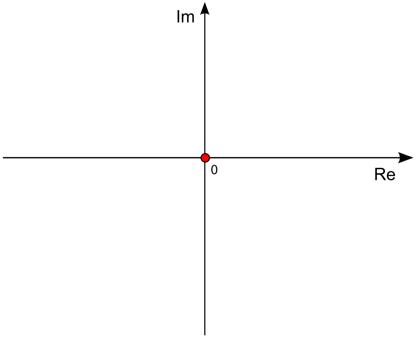
Příklad 6 – pól v nule

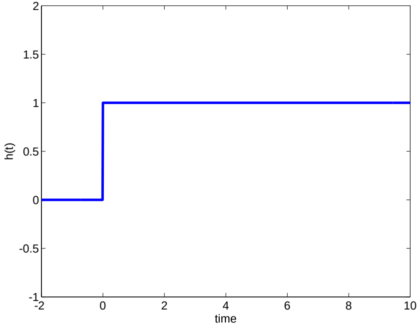
Spojitý LTI systém 1. řádu má přenosovou funkci

$$H(p) = \frac{1}{p}.$$

Jediný pól přenosové funkce je $p = 0 \Rightarrow$ systém na mezi stability.

$$h(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{H(p)\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{p}\right\} = \mathbf{1}(t).$$



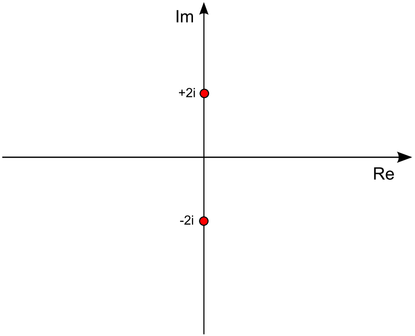


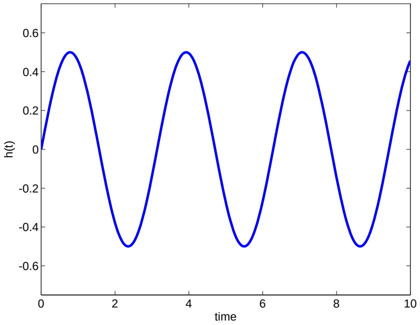
Příklad 7 - komplexně sdružené póly na imaginární ose

Spojitý LTI systém 2. řádu má přenosovou funkci

$$H(p) = \frac{1}{p^2 + 4}.$$

$$h(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{H(p)\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{2}\frac{2}{p^2 + 2^2}\right\} = \frac{1}{2}\sin 2t.$$





Přenosová funkce vnitřního popisu

Laplaceova transformace rovnic vnitřního popisu

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x(t) &= \mathbf{A}\,x(t) + \mathbf{B}\,u(t) \\ y(t) &= \mathbf{C}\,x(t) + \mathbf{D}\,u(t) \end{aligned} \quad \rightarrow \quad \begin{aligned} p \cdot X(p) &= \mathbf{A}\,X(p) + \mathbf{B}\,U(p) \\ Y(p) &= \mathbf{C}\,X(p) + \mathbf{D}\,U(p) \end{aligned}$$

- z 1. rovnice vyjádříme: $X(p) = (p\,\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}\,U(p)$
- dosadíme do 2. rovnice: $Y(p) = \mathbf{C}\,(p\,\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}\,U(p) + \mathbf{D}\,U(p)$
- přenosová funkce:

$$H(p) = \frac{Y(p)}{U(p)} = \mathbf{C}\,(p\,\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D}.$$

- pro stabilitu systému je rozhodující matice $\mathbf{A}$, respektive $\det(p\,\mathbf{I} - \mathbf{A})$

Póly přenosové funkce jsou vlastní čísla matice $\mathbf{A}$.

```
» eig(A)
```

Příklad 8

Vnitřní popis

$$\begin{aligned} x_1'(t) &= -3x_1(t) + x_2(t) + u(t) \\ x_2'(t) &= -17x_1(t) - x_2(t) - 2u(t) \\ y(t) &= x_1(t) - 2x_2(t) \end{aligned} \qquad \Rightarrow \mathbf{A} = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ -17 & -1 \end{bmatrix}$$

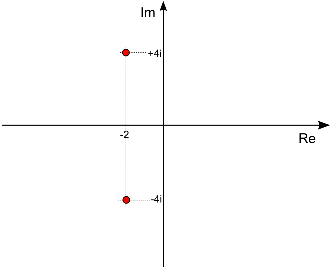
$$p\mathbf{I} - \mathbf{A} = \begin{bmatrix} p+3 & -1 \\ 17 & p+1 \end{bmatrix} \Rightarrow \det(p\,\mathbf{I} - \mathbf{A}) = p^2 + 4p + 20.$$

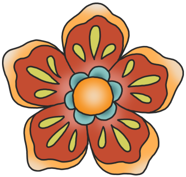
Polynom $p^2 + 4p + 20$ je charakteristický polynom systému,
jeho kořeny jsou póly přenosové funkce.

Kořeny charakteristického polynomu $p^2 + 4p + 20$:

$$p_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 80}}{2} = \frac{-4 \pm 8i}{2} = -2 \pm 4i$$

Přenosová funkce má jeden pár komplexně sdružených pólů $p_{1,2} = -2 \pm 4i$ s reálnou částí v levé části p-roviny $\Rightarrow$ stabilní systém





Domácí úkol

Vyšetřete stabilitu LTI systému zadaného vnitřním popisem

$$
\begin{aligned}
x_1'(t) &= -2x_1(t) + x_2(t)\\
x_2'(t) &= 3x_2(t) - 13x_3(t) - 2u_2(t)\\
x_3'(t) &= x_2(t) - x_3(t) + u_1(t)\\
y(t) &= x_1(t) - x_3(t).
\end{aligned}
$$


КОНЕЦ
ФИЛЬМА