Cvičení 10 – Diskrétní systémy

Modelování systémů a procesů

Lucie Kárná

karna@fd.cvut.cz

April 28, 2020

1. Diskrétní vs. spojité systémy
   - Shody
   - Rozdíly
2. Stabilita diskrétních systémů
   - Kritérium stability
   - Příklad 1 - vnější popis
   - Příklad 2 - vnitřní popis
   - Příklad 3
3. Diferenční rovnice
   - Samostatná práce - řešení diferenční rovnice
   - Příklad 4 - vnější popis z impulsní odezvy
   - Příklad 5 - $\mathcal{Z}$-transformace periodické posloupnosti

Co je stejné pro spojité a diskrétní systémy

Definice přenosové funkce

$H(\cdot) = \frac{Y(\cdot)}{U(\cdot)}$ za nulových počátečních podmínek

Vztah vstupu a výstupu

$y(\cdot) = u(\cdot) * h(\cdot)$ – hvězdička je konvoluce, nikoliv násobení!

Princip superpozice pro LTI systémy

odezva = přechodová složka + ustálená složka

Stabilita

- lze určit z pólů přenosové funkce
- všechny póly uvnitř určité otevřené množiny $\Rightarrow$ stabilní

V čem jsou rozdíly

Spojitý	Diskrétní
Laplaceova transformace	$\mathcal{Z}$-transformace
$Y(p) = \mathcal{L}\left\{y(t)\right\}, \ldots$	$Y(z) = \mathcal{Z}\left\{y[n]\right\}, \ldots$
$(f * g)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) g(t-\tau) \, \mathrm{d}\tau$	$(f * g)[n] = \sum_{i=-\infty}^{\infty} f[n-i] \cdot g[i]$
stabilita: všechny póly v levé polorovině	stabilita: všechny póly uvnitř jednotkové kružnice

1 Diskrétní vs. spojité systémy

2 Stabilita diskrétních systémů
- Kritérium stability
- Příklad 1 - vnější popis
- Příklad 2 - vnitřní popis
- Příklad 3

3 Diferenční rovnice

Definice stability pro diskrétní systémy

- **(Asymptoticky) stabilní LTI systém:** pro impulsní odezvu platí

$$\lim_{n\to\infty} h[n] = 0.$$

- **Nestabilní systém:**

$$\lim_{n\to\infty} |h[n]| = \infty.$$

- **Systém na mezi stability (metastabilní):**

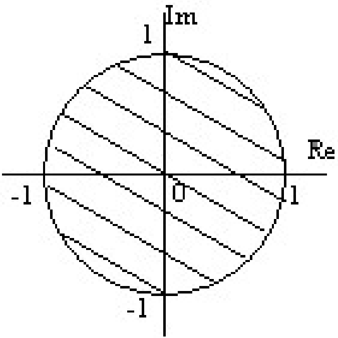
$$\lim_{n\to\infty} h[n] = c \neq 0,$$

nebo limita neexistuje.

Kritérium (ne)stability diskrétních systémů

Diskrétní LTI systém je

- stabilní $\iff$ všechny póly přenosové funkce $H(z)$ leží uvnitř jednotkové kružnice (jejich velikost je menší než jedna: $|z_i| < 1 \quad \forall i$),
- nestabilní $\iff$ přenosová funkce $H(z)$ má alespoň jeden pól vně jednotkové kružnice (jeho velikost je větší než jedna: $\exists i : \ |z_i| > 1$).



Příklad 1: vnější popis

Zadání

Určete stabilitu diskrétní LTI systému 2. řádu

$$8y[n+2] - 2y[n+1] - y[n] = u[n]$$

Řešení: přenosová funkce

$$H(z) = \frac{1}{8z^2 - 2z - 1} = \frac{1}{(2z-1)(4z+1)}$$

má póly $z_1 = \frac{1}{2}$, $z_2 = -\frac{1}{4}$;
oba jsou v absolutní hodnotě menší než jedna
(leží uvnitř jednotkové kružnice) $\Rightarrow$ systém je **stabilní**.

Příklad 1 - impulsní odezva

Přenosovou funkci $H(z) = \frac{1}{8z^2-2z-1}$ vydělíme z
a rozložíme na parciální zlomky:

$$\frac{H(z)}{z} = \frac{1}{z(8z^2-2z-1)} = \frac{2/3}{2z-1} + \frac{8/3}{4z+1} - \frac{1}{z}$$

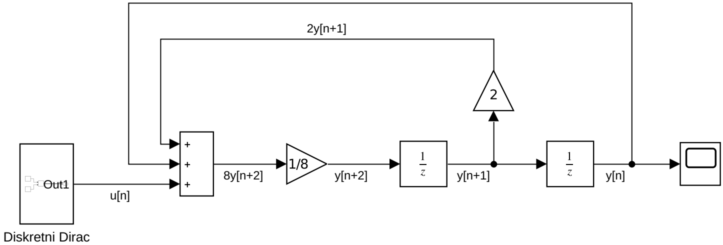
Vynásobíme zpět z a upravíme:

$$H(z) = \frac{2}{3}\frac{z}{2z-1} + \frac{8}{3}\frac{z}{4z+1} - 1 = \frac{1}{3}\frac{z}{z-\frac{1}{2}} + \frac{2}{3}\frac{z}{z+\frac{1}{4}} - 1$$

Zpětná $\mathcal{Z}$-transformace:

$$h[n] = z^{-1}\left\{H(z)\right\} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^n + \frac{2}{3}\left(-\frac{1}{4}\right)^n - \delta[n]$$

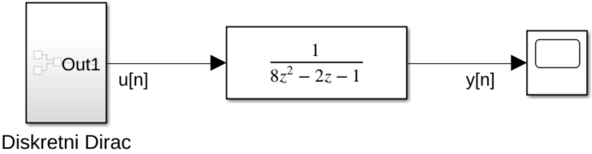
Příklad 1 - Simulink

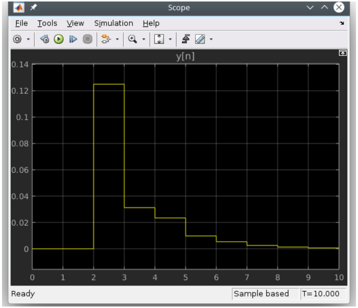


Parametry simulace pro diskrétní modely:

- `Solver options/Type` → *Fixed-step*
- `Solver options/Solver` → *discrete*
- `Fixed-step size` → 1

Blok Discrete Transfer Fcn





Příklad 2: vnitřní popis

Zadání

Diskrétní LTI systém 2. řádu je dán stavovou rovnicí

$$\begin{pmatrix} x_1[n+1] \\ x_2[n+1] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 8 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1[n] \\ x_2[n] \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 10 \\ 20 \end{pmatrix} u[n].$$

Určete jeho stabilitu.

Řešení: najdeme vlastní čísla systému:

$$\det \begin{pmatrix} \lambda - 2 & -2 \\ -8 & \lambda - 2 \end{pmatrix} = \lambda^2 - 4\lambda - 12 = (\lambda - 6)(\lambda + 2).$$

Obě vlastní čísla $\lambda_1 = 6$, $\lambda = -2$ jsou v absolutní hodnotě větší než jedna (leží vně jednotkové kružnice), systém je nestabilní.

Příklad 3

Zadání

Časová odezva diskrétního lineárního systému na vstupní posloupnost

$$u[n] = \frac{\alpha^n + \beta^n}{2}$$

je

$$y[n] = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}.$$

Pro jaké hodnoty α a β je uvedený systém stabilní?

Příklad 3 – řešení

- pro $u[n] = \frac{1}{2}(\alpha^n + \beta^n)$ je

$$U(z) = \frac{1}{2}\left(\frac{z}{z-\alpha} + \frac{z}{z-\beta}\right) = \frac{z^2 - \frac{\alpha+\beta}{2}z}{(z-\alpha)(z-\beta)}.$$

- pro $y[n] = \frac{1}{\alpha-\beta}(\alpha^n - \beta^n)$ je

$$Y(z) = \frac{1}{\alpha-\beta}\left(\frac{z}{z-\alpha} - \frac{z}{z-\beta}\right) = \frac{z}{(z-\alpha)(z-\beta)}.$$

- přenosová funkce:

$$H(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{1}{z - \frac{\alpha+\beta}{2}}.$$

- systém je stabilní, jestliže $\left|\frac{\alpha+\beta}{2}\right| < 1.$

Příklad 3 – navazující úloha

Zadání

Z přenosové funkce $H(z)$ určete impulsní odezvu.

Platí

$$H(z) = \frac{1}{z - \frac{\alpha+\beta}{2}} = z^{-1} \cdot \frac{z}{z - \frac{\alpha+\beta}{2}} = z^{-1} \cdot H_1(z)$$

a tedy

$$h_1[n] = \left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)^n .$$

Podle věty o posunutí je

$$h[n] = \left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)^{n-1} .$$

1 Diskrétní vs. spojité systémy

2 Stabilita diskrétních systémů

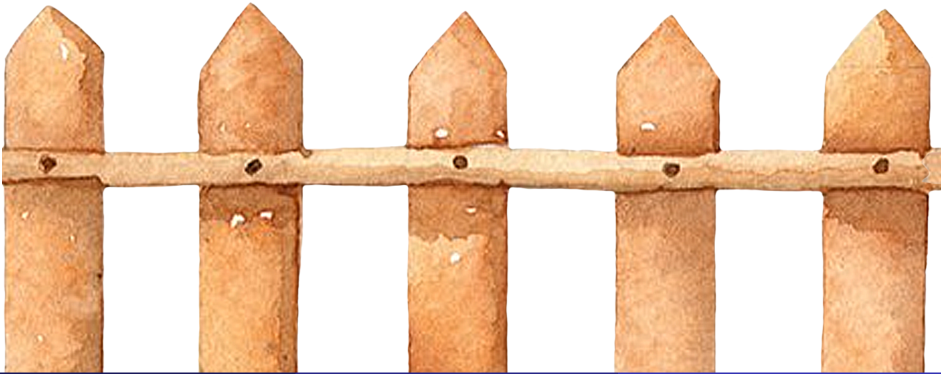
3 Diferenční rovnice
- Samostatná práce - řešení diferenční rovnice
- Příklad 4 - vnější popis z impulsní odezvy
- Příklad 5 - $\mathcal{Z}$-transformace periodické posloupnosti

Diferenční rovnice – samostatná práce

Úloha

Namodelovat a $\mathcal{Z}$-transformací vyřešit diferenční rovnici

$$y[n+2] - \frac{9}{2}y[n+1] - \frac{5}{2}y[n] = -5(-1)^n, \quad y[0] = -2, y[1] = 0$$



Příklad 4

Zadání

Sestavte rovnici vnějšího popisu systému, je-li jeho impulsní odezva

$$h[n] = 5\left(\frac{1}{2}\right)^n - 2\left(\frac{4}{5}\right)^n .$$

Řešení:

$$H(z) = 5\,\frac{z}{z-\frac{1}{2}} - 2\,\frac{z}{z-\frac{4}{5}} = \cdots = \frac{3z^2-3z}{z^2-\frac{13}{10}z+\frac{2}{5}} = \frac{Y(z)}{U(z)},$$

odsud plyne, že

$$Y(z)\left[z^2-1{,}3z+0{,}4\right] = U(z)\left[3z^2-3z\right],$$

což je $\mathcal{Z}$-obraz diferenční rovnice

$$y[n+2]-1{,}3\,y[n+1]+0{,}4\,y[n] = 3\,u[n+2]-3\,u[n+1].$$

Příklad 5

Zadání

Najděte $\mathcal{Z}$-transformaci posloupnosti, která je periodická s periodou 3 a platí pro ni $f[0] = 2$, $f[1] = 1$ a $f[2] = 0$.

Řešení:

- perioda 3 $\Rightarrow f[n+3] = f[n]$
- $\mathcal{Z}$-transformace:

$$z^3 F(z) - z^3 f[0] - z^2 f[1] - z\, f[2] = F(z)$$

- dosadíme počáteční podmínky a dále upravujeme:

$$\begin{aligned} z^3 F(z) - 2z^3 - z^2 &= F(z) \\ F(z)\left(z^3 - 1\right) &= 2z^3 + z^2 \\ F(z) &= \frac{2z^3 + z^2}{z^3 - 1} \end{aligned}$$

END