Cvičení 11 – diskretizace

Modelování systémů a procesů

Lucie Kárná

karna@fd.cvut.cz

May 6, 2020

1. Diskretizace spojitého modelu
   - Vnitřní popis
   - Vnější popis

2. Integrální rovnice
   - Domácí úkol

Diskretizace spojitého modelu

Spojitý LTI model

$$x'(t) = \mathbf{A}\,x(t) + \mathbf{B}\,u(t)$$
$$y(t) = \mathbf{C}\,x(t) + \mathbf{D}\,u(t)$$

perioda vzorkování T:

$$\begin{aligned}
\text{čas } t \quad &\rightarrow \quad \text{diskrétní okamžiky } t = nT \\
\text{spojitý signál} \quad &\rightarrow \quad \text{diskrétní posloupnost} \\
x(t) = x(nT) \quad &\rightarrow \quad x[n] \\
y(t) = y(nT) \quad &\rightarrow \quad y[n] \\
u(t) = u(nT) \quad &\rightarrow \quad u[n]
\end{aligned}$$

Dopředné diference

První derivaci nahradíme první dopřednou diferencí:

$$x'(t) \approx \frac{x(nT+T) - x(nT)}{T} = \frac{1}{T}\left(x[n+1] - x[n]\right)$$

dosadíme do stavové rovnice: $\frac{1}{T}\left(x[n+1] - x[n]\right) = \mathbf{A}\, x[n] + \mathbf{B}\, u[n]$,

upravíme: $x[n+1] = (\mathbf{I} + T\,\mathbf{A})\; x[n] + T\,\mathbf{B}\, u[n]$.

Rovnice diskrétního modelu

$$\begin{aligned} x[n+1] &= \mathbf{M}\, x[n] + \mathbf{N}\, u[n] \\ y[n] &= \mathbf{C}\, x[n] + \mathbf{D}\, u[n], \end{aligned}$$

Nové matice

$$\begin{aligned} \mathbf{M} &= \mathbf{I} + T\,\mathbf{A}, \\ \mathbf{N} &= T\,\mathbf{B}. \end{aligned}$$

Příklad 1 – vnitřní popis

Diskretizujte spojitý systém zadaný maticemi stavového popisu

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -20 & -4 \end{pmatrix}, \quad \mathrm{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathrm{C} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathrm{D} = \emptyset$$

s nulovými počátečními podmínkami, $0 \leq t \leq 10$.

V Simulinku namodelujte přechodovou odezvu pro:

- spojitý model;
  výsledek uložte do proměnné `sim_c` jako *Timeseries*,
- diskrétní model se vzorkovací periodou $T_1 = 0{,}1\,\mathrm{s}$;
  výsledek uložte do proměnné `sim_d1` jako *Array*,

Výstupy vyneste do jednoho společného grafu.

Příklad 1 – diskrétní model

Diskretizace

$$\mathbf{M} = \mathbf{I} + T\,\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & T \\ -20T & -4T + 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{N} = T\,\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ T \end{pmatrix}$$

Parametry simulace

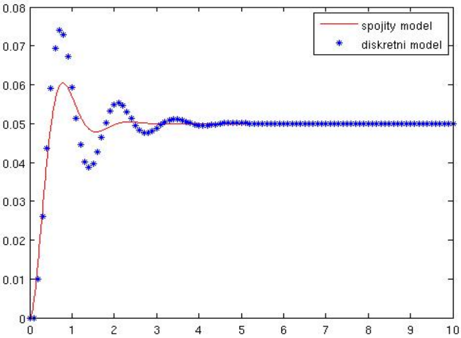
- `Solver options/Type` → *Fixed-step*
- `Solver options/Solver` → *discrete*
- `Fixed-step time` → 1
- délka simulace (`Stop time`) → 10/T

Nastavení `scope`: `sampling` → *sample time*

Příklad 1 – graf

pro diskrétní model vynášíme na ose x hodnoty 0:T:10

```
» plot( sim_c, 'r' )
» hold on
» plot( 0:T1:10 , sim_d , '*')
» legend( 'spojity model' , 'diskretni model' )
```



Příklad 2 - vnější popis

Diskretizujte spojitý systém zadaný rovnicí

$$2y''(t) + 5y'(t) + 2y(t) = 0$$

s počátečními podmínkami $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.

Řešení: první dopředná diference

$$y'(t) \approx \frac{y\left(nT + T\right) - y(nT)}{T} = \frac{1}{T}\left(y[n+1] - y[n]\right)$$

druhá dopředná diference

$$y''(t) \approx \frac{y'[n+1] - y'[n]}{T} \approx \frac{1}{T^2}\left(y[n+2] - 2y[n+1] - y[n]\right)$$

Příklad 2 - pokračování řešení

Dosadíme do rovnice:

$$2y''(t) + 5y'(t) + 2y(t) \approx$$

$$\approx 2\,\frac{y[n+2] - 2y[n+1] - y[n]}{T^2} + 5\,\frac{y[n+1] - y[n]}{T} + 2y[n] =$$

$$= \frac{2}{T^2}\,y[n+2] + \left(\frac{5}{T} - \frac{4}{T^2}\right)y[n+1] + \left(2 - \frac{5}{T} + \frac{2}{T^2}\right)y[n] = 0$$

Po úpravě

$$2y[n+2] + (5T - 4)\,y[n+1] + \left(2T^2 - 5T + 2\right)\,y[n] = 0$$

Příklad 2 - počáteční podmínky

Původní počáteční podmínky: $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.

- $y[0] = y'(0) = 1$
- $y[1]$ dopočítáme z první diference:

$$y'(t) \approx \frac{1}{T}\left(y[n+1] - y[n]\right),$$

$$y'(0) \approx \frac{1}{T}\left(y[1] - y[0]\right)$$

$$\Rightarrow y[1] = y[0] = 1.$$

Příklad 2 - stabilita

- původní spojitá rovnice: $2y''(t) + 5y'(t) + 2y(t) = 0$
  - charakteristický polynom: $2\lambda^2 + 5\lambda + 2 = (2\lambda + 1)(\lambda + 2)$
  - vlastní čísla $\lambda_1 = -\frac{1}{2} < 0$, $\lambda_2 = -2 < 0$
  - $\Rightarrow$ stabilní
- diskretizovaná rovnice:
  $2y[n+2] + (5T - 4)\,y[n+1] + \left(2T^2 - 5T + 2\right) y[n] = 0$
  - charakteristický polynom: $2\lambda^2 + (5T - 4)\,\lambda + \left(2T^2 - 5T + 2\right)$
  - diskriminant: $D = (5T - 4)^2 - 8\left(2T^2 - 5T + 2\right) = 9T^2$
  - vlastní čísla $\lambda_{1,2} = \frac{1}{4}(4 - 5T \pm 3T)$, tj. $\lambda_1 = 1 - \frac{T}{2}$, $\lambda_2 = 1 - 2T$
  - $\Rightarrow$ stabilní pro malé T ($T < 1$).

Domácí úkol

Pomocí Laplaceovy transformace najděte řešení integrální rovnice

$$y(t) - 2\int_0^t y(\tau)\,(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau = 4e^t.$$


The End