Matematické modelování

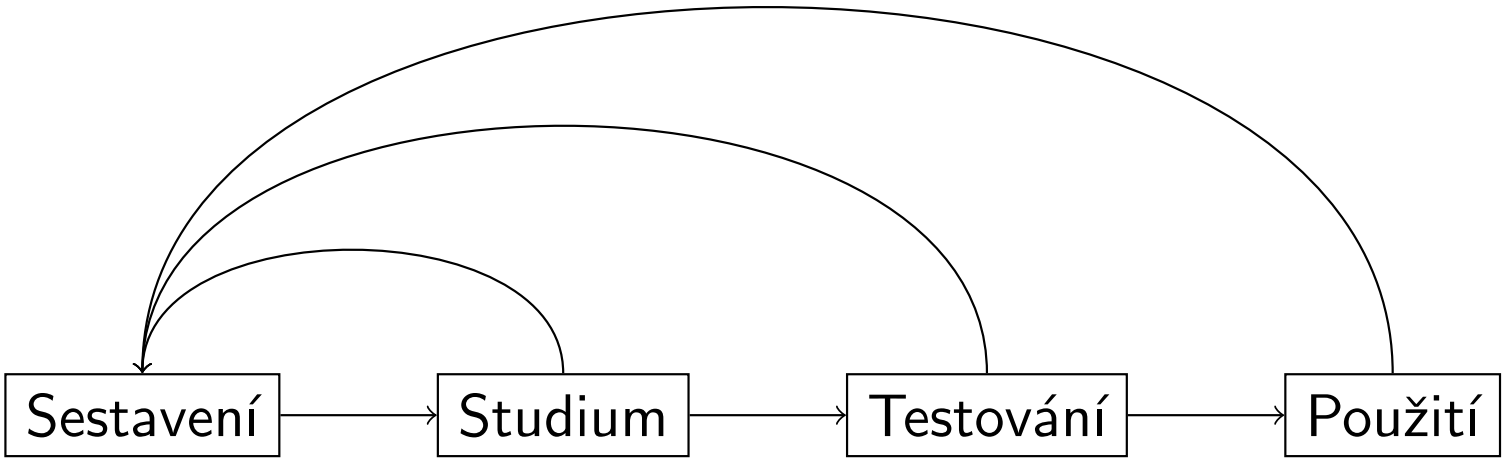
Modelování systémů a procesů (11MSP)

Bohumil Kovář

Katedra aplikované matematiky
ČVUT v Praze, Fakulta dopravní

2. přednáška 11MSP
2024

verze: 2024-02-29 16:03



Tento proces opakovaných iterací je pro modelovací projekty typický a je jedním z nejužitečnějších aspektů modelování, pokud jde o lepší pochopení toho, jak systém funguje. Toto rozdělení činnosti v oblasti modelování budeme používat i nadále a bude tvořit strukturu pro zbytek tohoto kurzu.

Systém

Definice (Systém)

Charakteristické vlastnosti, se kterými vystačíme při modelování:

- systém považujeme za část prostředí, kterou lze od jejího okolí oddělit fyzickou nebo myšlenkovou hranicí,
- systém se skládá z podsystémů, vzájemně propojených součástí.

Je to část našeho světa, která se svým okolím nějak interaguje, například prostřednictvím vstupu a výstupu.

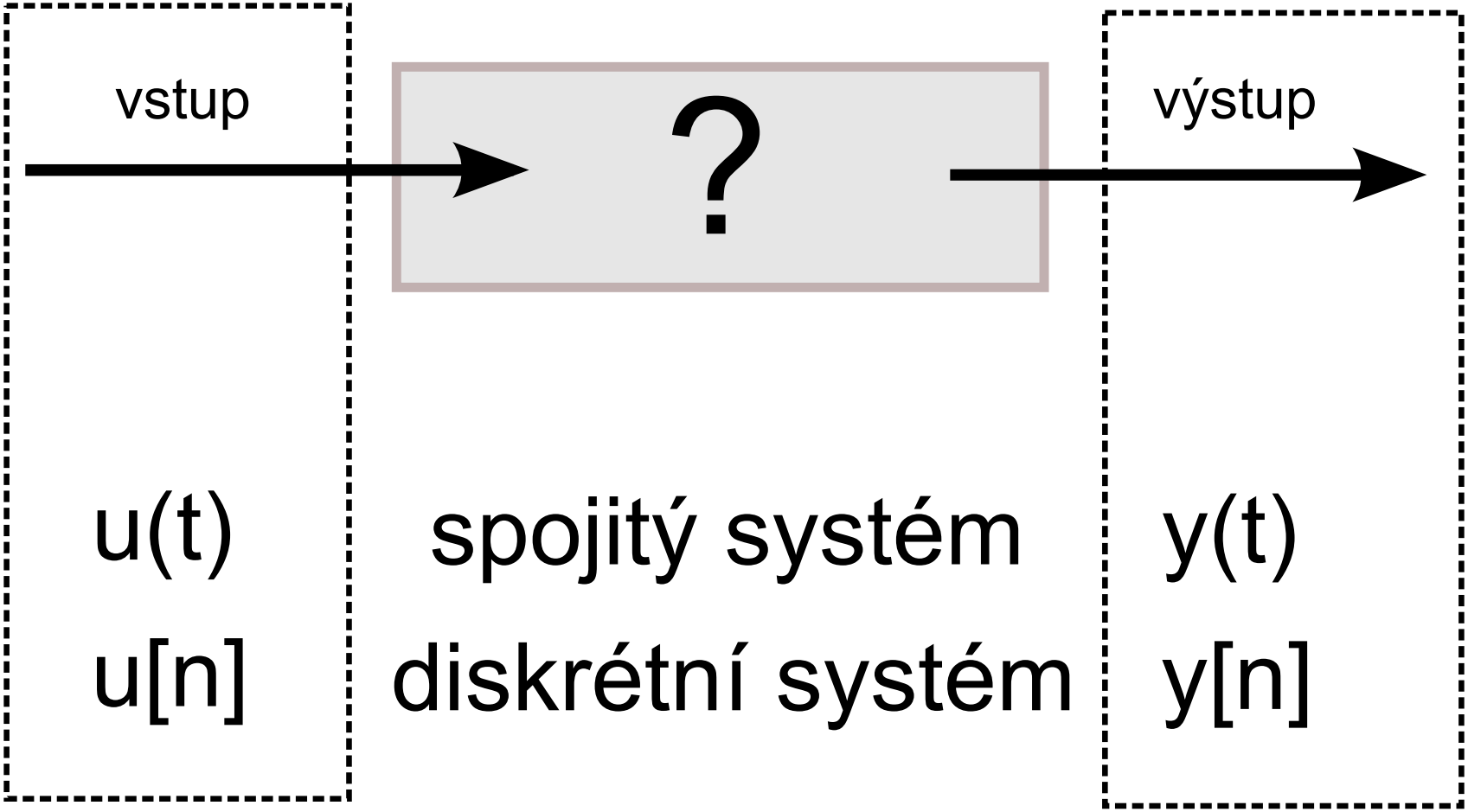
Co je modelování?

Model

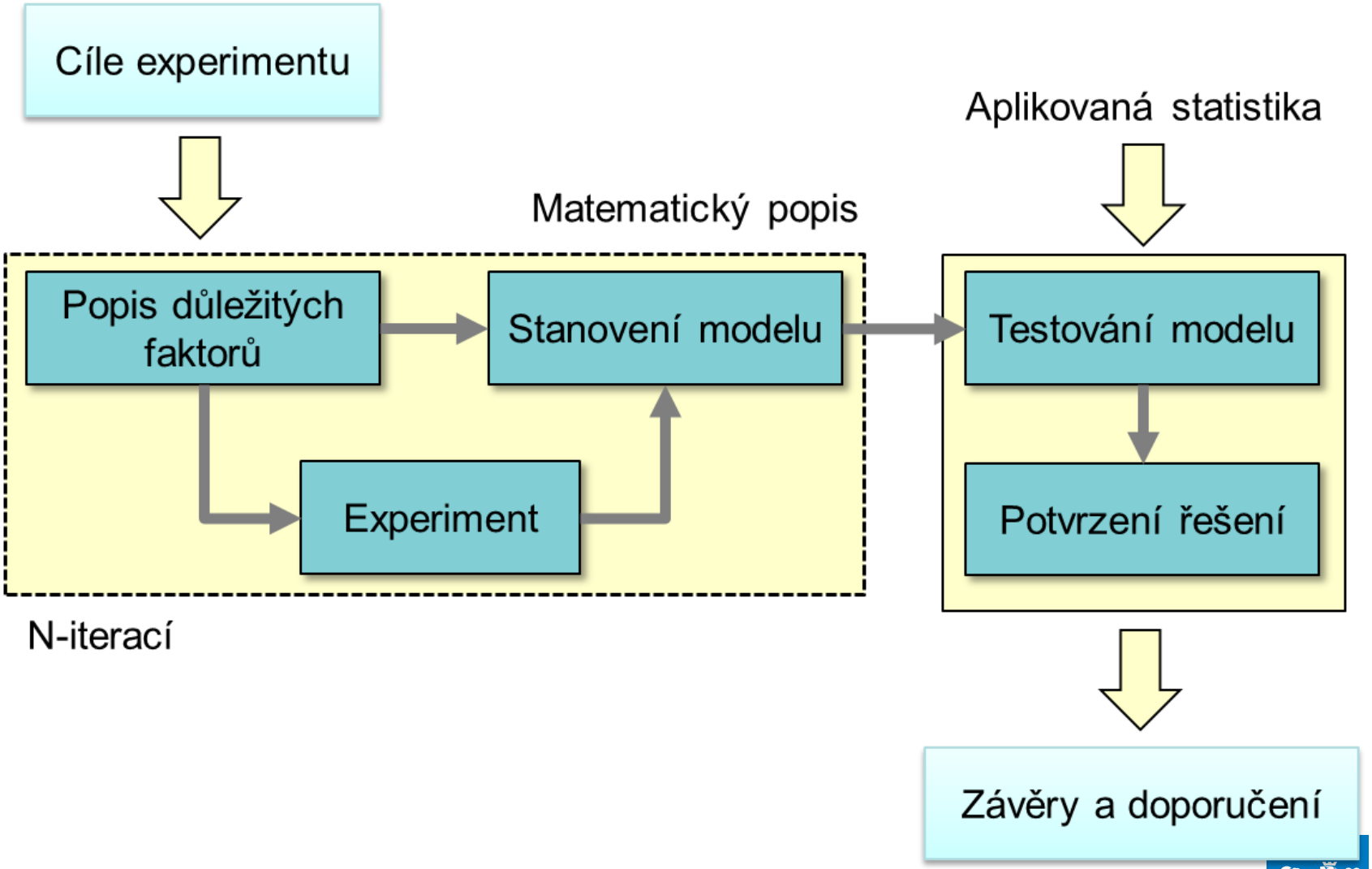
Za model můžeme pokládat náhradu nebo zjednodušení **skutečného objektu reálného světa** z hlediska jeho vlastností a funkčnosti.

Modelování je možné pouze pokud zavedeme **určitý stupeň** abstrakce a aproximace.

Diskrétní a spojitý model



Tvorba modelu

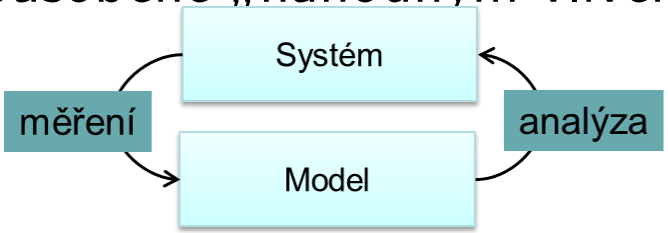


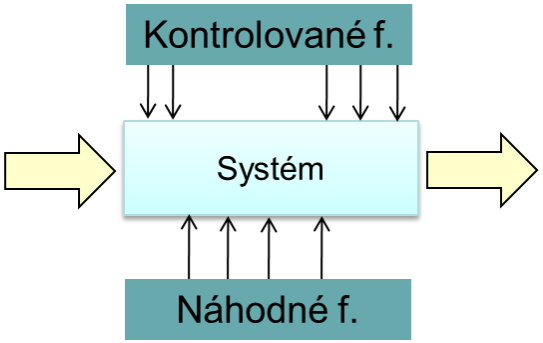
Tvorba modelu

Při analýze navrženého modelu chceme učinit co možná nejsilnější rozhodnutí na základě malého množství dat. Správnost našeho návrhu je nutné statisticky vyhodnotit.

Problémy:

1. Významné diference ve sledovaných parametrech mohou být způsobeny špatným návrhem modelu, případně měřením dat
2. Je těžké rozlišit, zda diference v datech jsou skutečné nebo způsobené „náhodným vlivem“.





Proč modelování systémů?

Otázky:

- Jak ověříme správnost výpočtu rychlosti šíření ptačí chřipky?
- Jak ověříme pevnost nového mostu?
- Jak ověříme bezpečnost softwaru?

Pokud nemůžeme předem prokázat určité vlastnosti na samotného systému, prokážeme hledané vlastnosti na jeho modelu!

Modely reálného světa

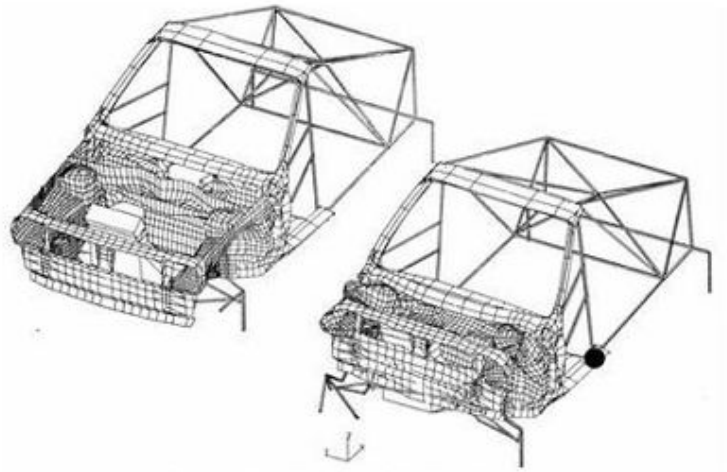
Antoni Gaudí

Modely reálného světa

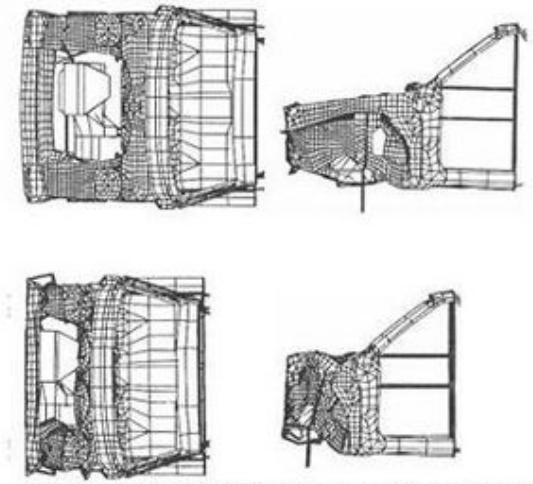
Antoni Gaudí

Modely reálného světa

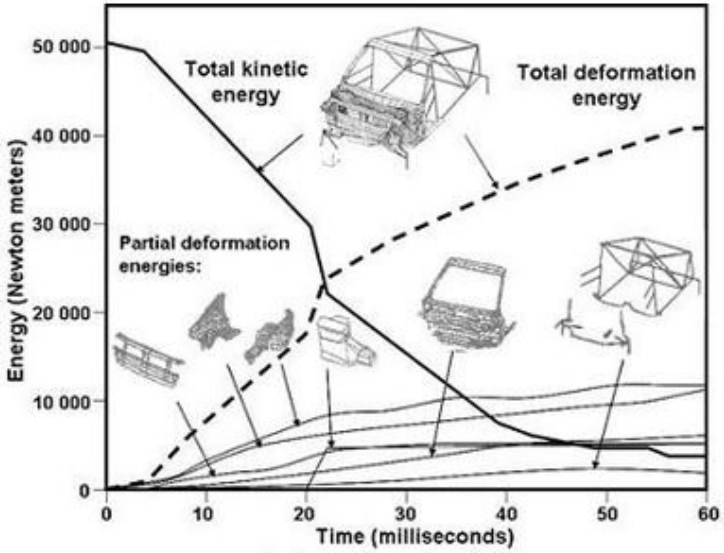
VW Polo crash test



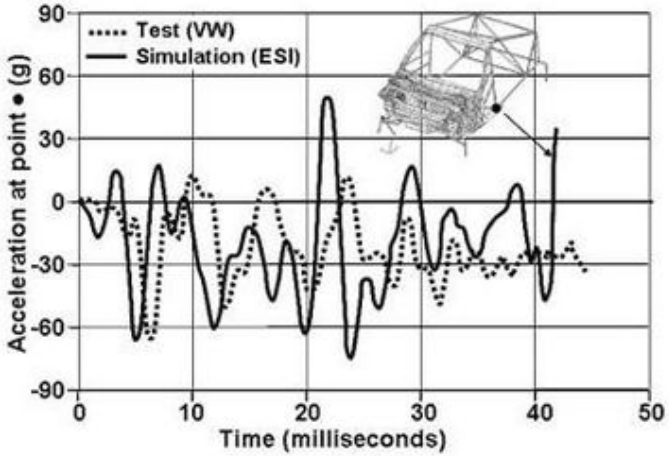
(a) crash simulation



(b) top and side views of simulation



(c) energy balance



(d) acceleration at point in cabin

Vnější popis systémů

Vnější popis vychází z popisu systému vektorem vstupu **u** a vektorem výstupu **y**.

Systém tak chápeme jako černou skříňku, o jejíchž vlastnostech se dozvíme pouze tehdy, jestliže budeme zkoumat její reakci na vnější události (signály, data).

Vnější model popisujeme diferenciální rovnicí pro systémy se spojitým časem a diferenční rovnicí pro systémy s diskrétním časem. Uvedená rovnice je obecně vyššího řádu, než 1.

Vnitřní popis systémů

Vnitřní, tzv. **stavový popis** systému používá k popisu dynamiky systému vektor **vnitřních stavů x**.

Vektor vstupů **u** a vektor výstupních veličin **y** jsou druhotné veličiny vnitřního popisu.

Stavové modely popisujeme

- soustavou diferenciálních rovnic prvního řádu pro systémy se spojitým časem a
- soustavou diferenčních rovnic prvého řádu pro systémy s diskrétním časem.

Role matematiky

Modelování není samospasitelné:

- výstupy modelu je vždy třeba ověřovat,
- možné chyby jsou jak v modelu, tak i v jeho výpočtu.

Verifikace: Počítáme správný model.

Validace: Model počítá správně.

Šíření epidemie

SIR model (1/8)

Šíření epidemie

SIR model(2/8)

Rovnice SIR modelu

$$S'(t) = -\alpha I(t)S(t)$$

$$R'(t) = \beta I(t)$$

$$I'(t) = -S'(t) - R'(t) = \alpha I(t)S(t) - \beta I(t)$$

$S(t)$	počet zdravých jedinců
$I(t)$	počet infikovaných
$R(t)$	počet mrtvých nebo imunních

$$S(t) + I(t) + R(t) = c$$

$$S'(t) + I'(t) + R'(t) = 0$$

Šíření epidemie

SIR model - Numerické řešení (3/8)

Co nám tyto rovnice říkají? Předpokládejme, populaci $S(0) = 100000$ zdravých jedinců, $I(0) = 10$ infikovaných a $R(0) = 10$ imunních s mírou šíření nákazy $\alpha = 0.0001$ a úmrtností $\beta = 0.1$. V čase $t = 0$, tedy dnes:

$$S'(0) = -\alpha I(0)S(0) = -100$$

$$R'(0) = \beta I(0) = 1$$

$$I'(0) = -S'(0) - R'(0) = \alpha I(0)S(0) - \beta I(0) = 99$$

První den epidemie se počet zdravých jedinců sníží o 100, jeden člověk zemře a množství infikovaných vzroste o 99.

Šíření epidemie

SIR model - Numerické řešení(4/8)

Zítra, v čase $t = 1$ můžeme tedy očekávat

$$S(1) \approx S(0) + S'(0) = 99900$$

$$R(1) \approx R(0) + R'(0) = 11$$

$$I(1) \approx I(0) + I'(0) = 109$$

a

$$S'(1) = -\alpha I(1)S(1) = -1088.91$$

$$R'(1) = \beta I(1) = 10.9$$

$$I'(1) = -S'(1) - R'(1) = \alpha I(1)S(1) - \beta I(1) = 1078.01$$

Šíření epidemie

SIR model - Numerické řešení (5/8)

Rovnice nám umožňují odhadovat změny S, I, R i v minulosti. Pokud známe stav epidemie dnes (v čase $t = 0$), pak můžeme odhadnout hodnoty včera (v čase $t = -1$) jako

$$S(-1) \approx S(0) - S'(0)$$

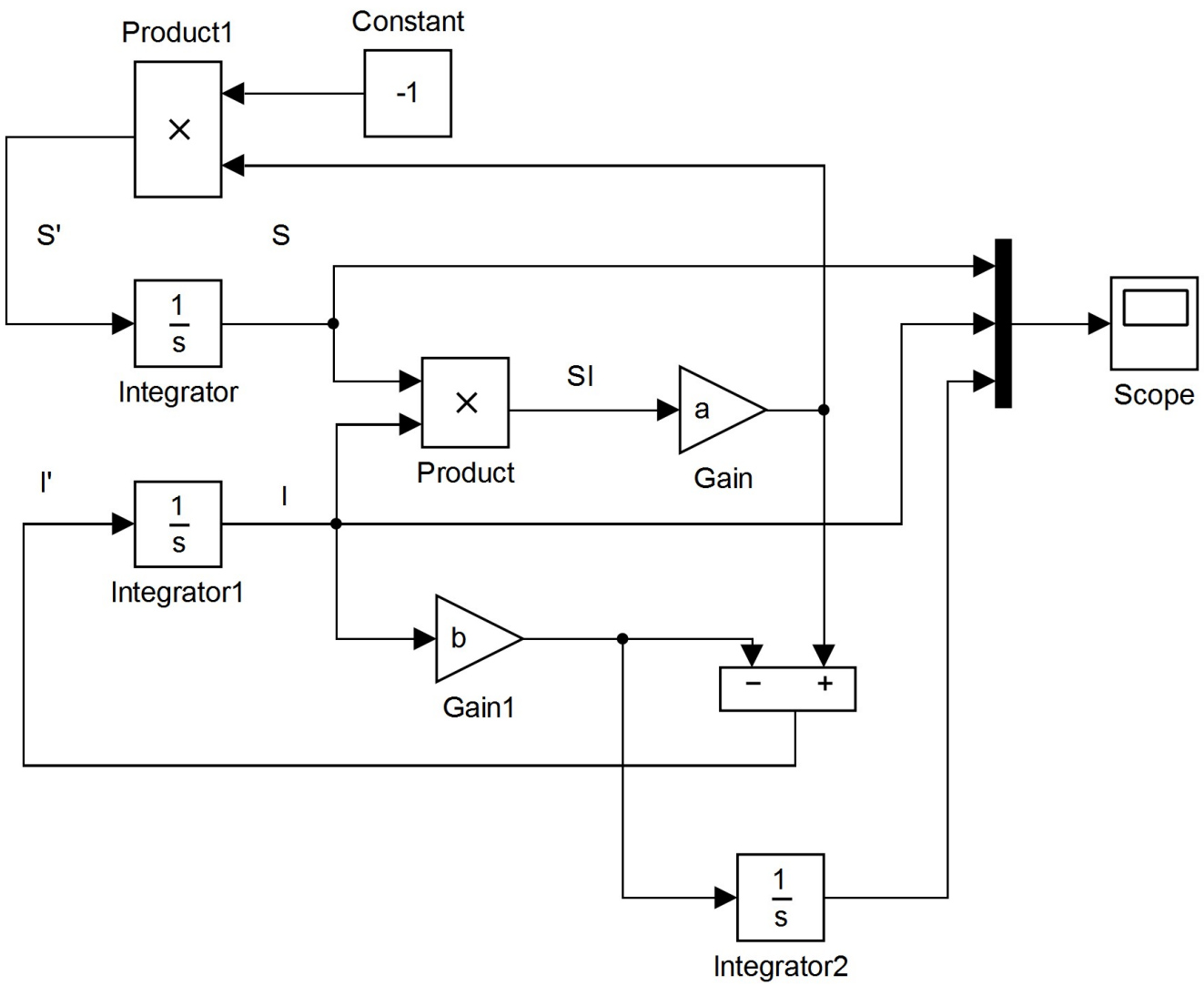
$$R(-1) \approx R(0) - R'(0)$$

$$I(-1) \approx I(0) - I'(0)$$

Takto můžeme numericky analyzovat změny S, I a R v čase a predikovat, jak se bude apokalypsa vyvíjet. Jedná se o rekurentní výpočty, které jsou s použitím počítače velmi snadné.

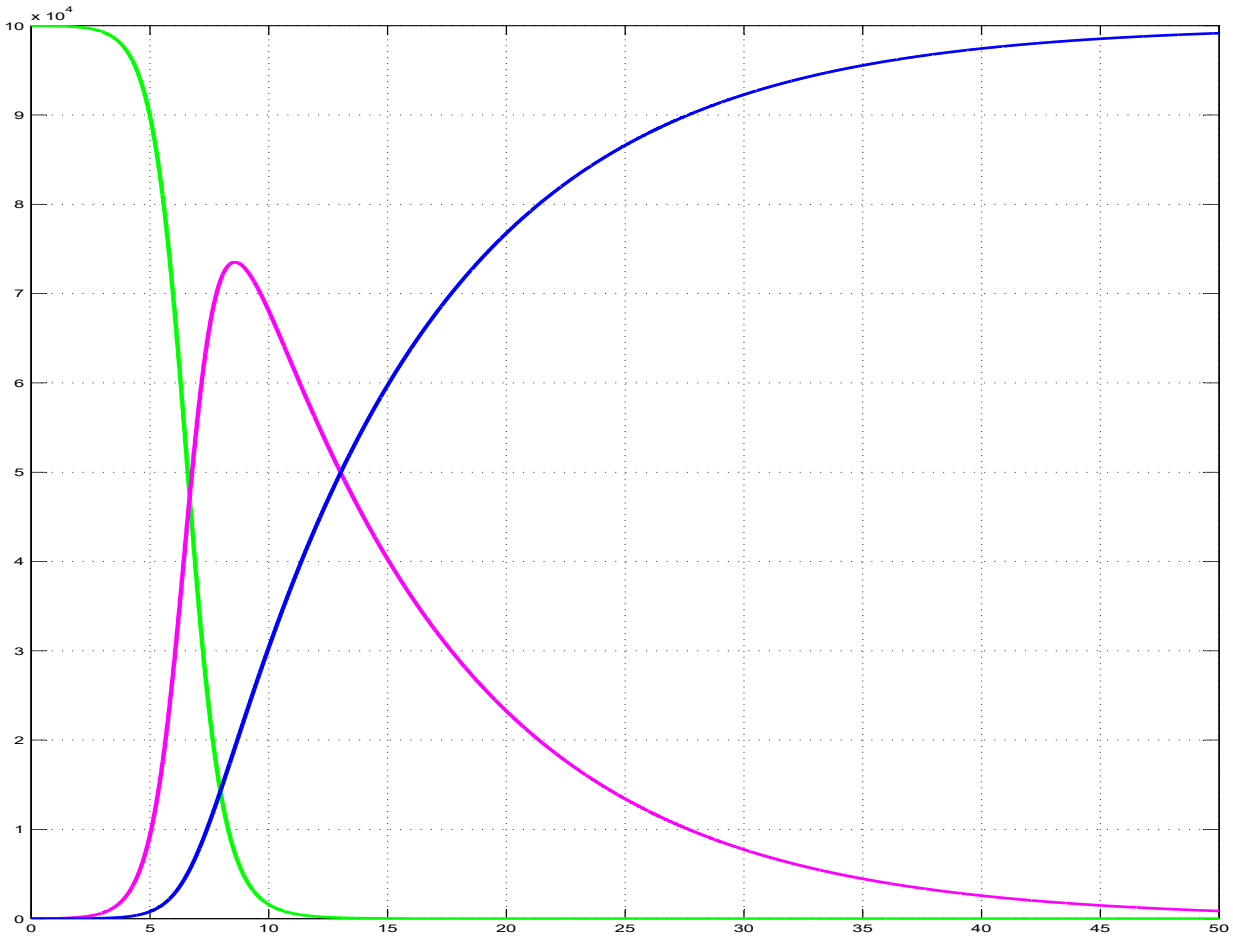
Šíření epidemie

SIR model - Simulink (6/8)



Šíření epidemie

SIR model - Simulink (7/8)



$\alpha = 0.00015, \ \beta = 0.11, \ S(0) = 100000, \ I(0) = R(0) = 10$

Šíření epidemie

SIR model - Analytické řešení (8/8)

Analýza rovnice pro infikované

$$I'(t) = \alpha S(t)I(t) - \beta I(t) = (\alpha S(t) - \beta)I(t)$$

Pokud

- $S(t) > \frac{\beta}{\alpha}$ pak $I'(t) > 0$ a tedy epidemie se zhoršuje a počet infikovaných roste,
- $S(t) < \frac{\beta}{\alpha}$ pak $I'(t) < 0$ situace se lepší a počet infikovaných klesá,
- $\Rightarrow \frac{\beta}{\alpha}$ je práh.

Počet infikovaných tedy bude klesat, pokud se nám podaří snížit hodnotu koeficientu α, případně i β.

Příklady systémů

Příklad variace ceny (1/2)

Rovnice nabídky

Nabídka dnes závisí na včerejší ceně a to tak, že nabídka stoupá s rostoucí cenou. Pro $\mathcal{C} > 0$ platí

$$n[k] = \mathcal{C}c[k-1] + \mathcal{A}u[k].$$

Rovnice poptávky

Poptávka dnes závisí na dnešní ceně a to tak, že poptávka klesá s rostoucí cenou. Pro $\mathcal{D} > 0$ platí

$$p[k] = -\mathcal{D}c[k] + \mathcal{B}u[k].$$

Příklady systémů

Příklad variace ceny (2/2)

Rovnost nabídky a poptávky

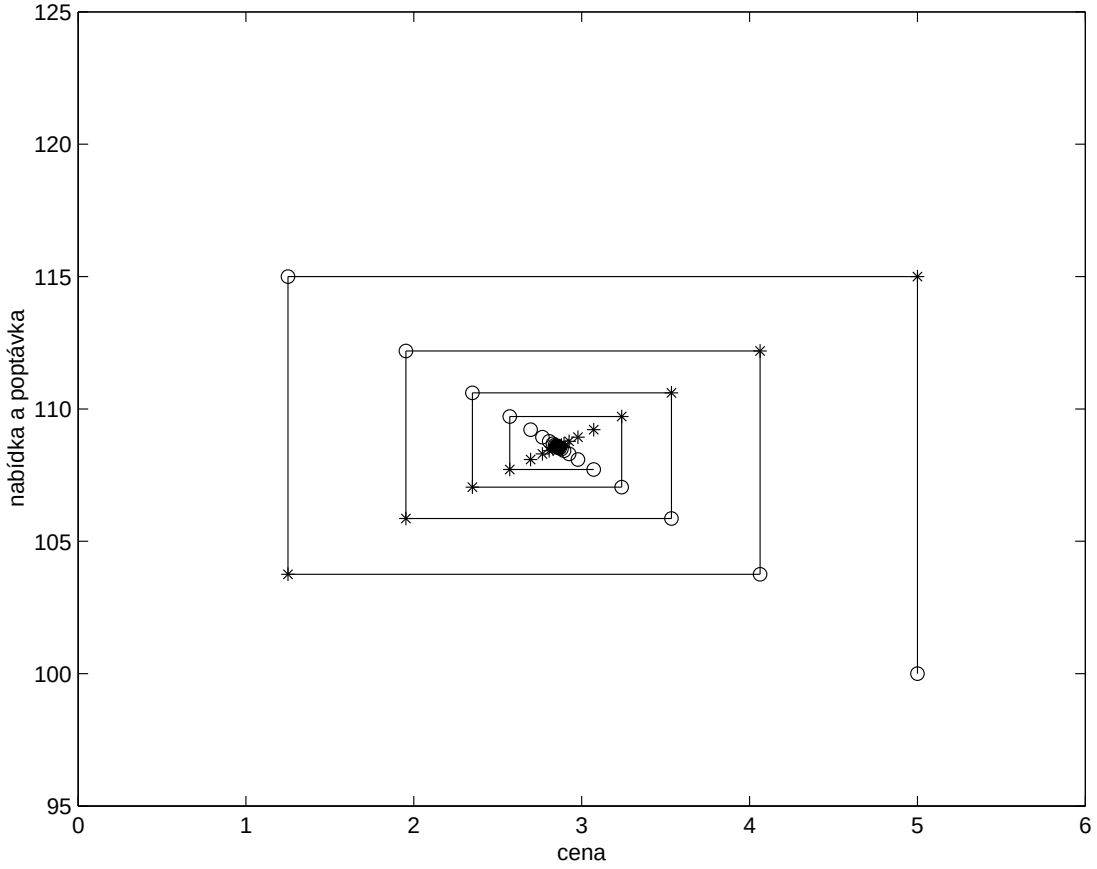
$$n[k] = p[k]$$

pak vede na diferenční rovnici prvního řádu

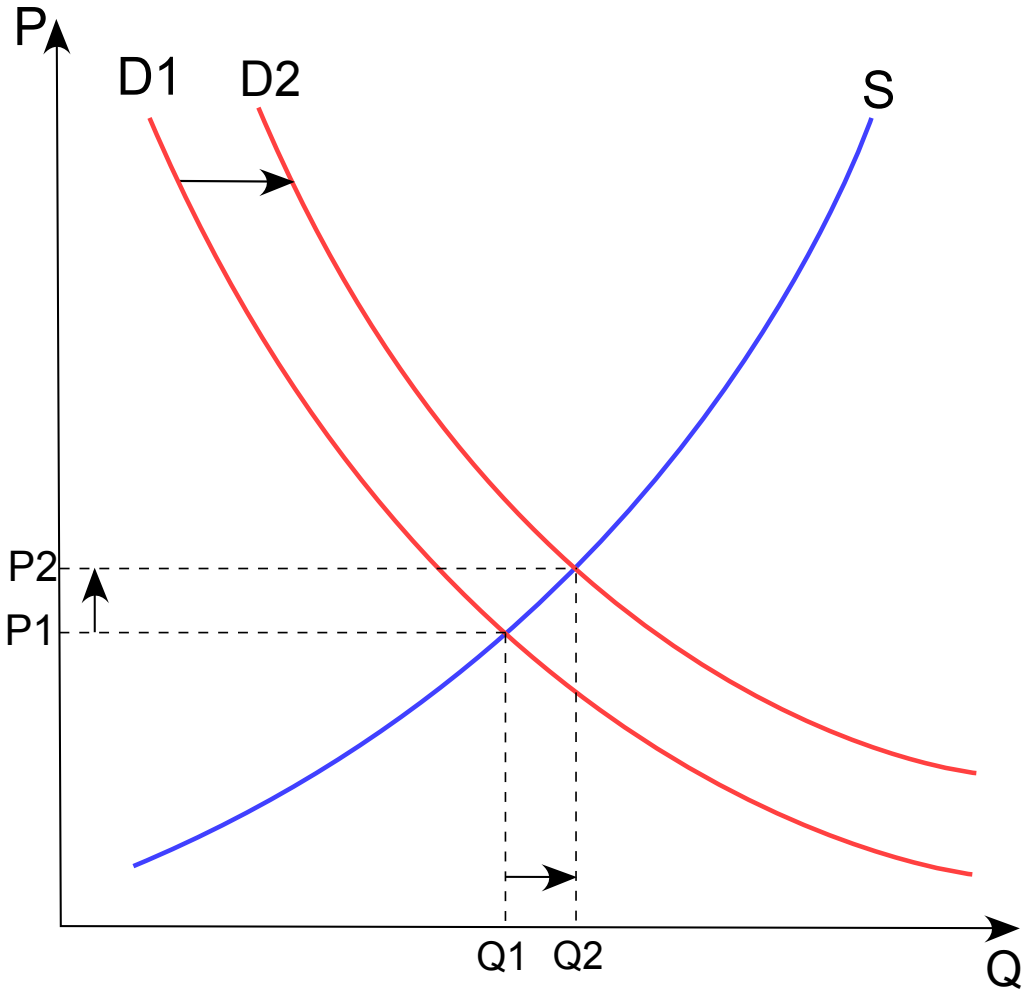
$$c[k] + \frac{\mathcal{C}}{\mathcal{D}} c[k-1] = \frac{\mathcal{B} - \mathcal{A}}{\mathcal{D}} u[k].$$

Příklady systémů

Příklad variace ceny



Rozdíl mezi lineárním a linearizovaným



Iterace rovnice ceny

Diferenční rovnici, kterou jsme odvodili

$$c[k] + \frac{\mathcal{C}}{\mathcal{D}} c[k-1] = \frac{\mathcal{B} - \mathcal{A}}{\mathcal{D}} x[k]$$

přepíšeme do kanonického tvaru

$$y[k] + \gamma y[k-1] = \beta u[k]$$

a postupnými iteracemi nalezneme pro $u[k] = \mathbf{1}[k]$ a počáteční podmínku $y[-1] = 0$

Iterace rovnice ceny

Pro $k = 0$:

$$y[0] + \gamma y[-1] = \beta u[0]$$
$$y[0] = \beta - \gamma y[-1] = \beta$$

Pro $k = 1$:

$$y[1] + \gamma y[0] = \beta u[1]$$
$$y[1] = \beta - \gamma y[0] = \beta - \beta\gamma$$

Iterace rovnice ceny

Pro $k = 2$:

$$y[2] + \gamma y[1] = \beta u[2]$$
$$y[2] = \beta - \gamma y[1] = \beta - \beta\gamma + \beta\gamma^2$$

Pro obecné n:

$$y[n] + \gamma y[n-1] = \beta u[n]$$
$$y[n] = \beta - \gamma y[n-1] = \beta \left(1 - \gamma + \gamma^2 + \cdots + (-\gamma)^n\right)$$

Iterace rovnice ceny

$$y[n] = \beta \sum_{m=0}^{n} (-\gamma)^m = \beta \frac{1-(-\gamma)^{n+1}}{1+\gamma} = \frac{\beta}{1+\gamma} + \frac{\beta\gamma}{1+\gamma}(-\gamma)^n$$