

# Základní signály Linearita, stacionarita, kauzalita

Modelování systémů a procesů (11MSP)

Bohumil Kovář

Katedra aplikované matematiky  
ČVUT v Praze, Fakulta dopravní

3. přednáška 11MSP  
2024

verze: 2024-02-29 16:04

# Obsah přednášky

- ① Úvod do teorie signálů
- ② Základní spojité signály
- ③ Základní diskrétní signály
- ④ Odezva systému

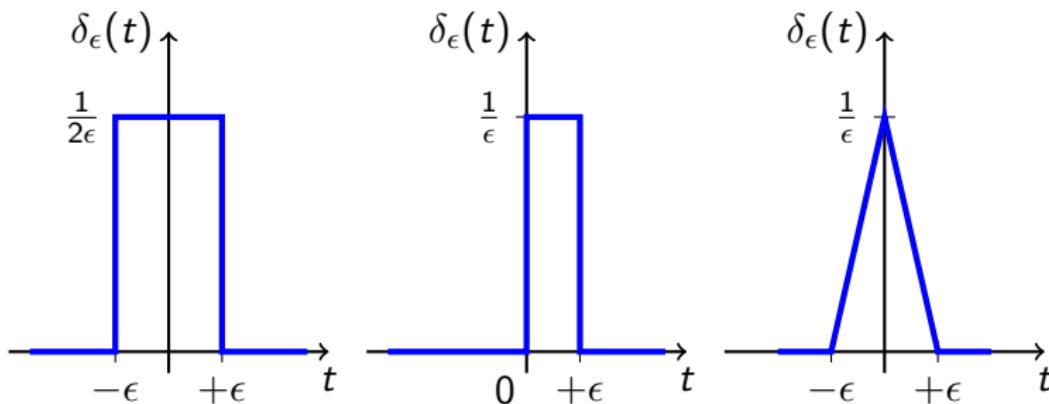


# Diracův impuls

## Přiblžení

Tato funkce je definována na časovém intervalu pro všechna  $t$  a její nenulovou hodnotu předpokládáme pouze v okolí bodu  $t = 0$ .

Plocha těchto funkcí je rovna 1 pro každé  $\epsilon > 0$ .



Funkci  $\delta(t)$  definujeme jako  $\delta(t) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \delta_\epsilon(t)$ .

# Diracův impuls

## Definice

Funkce  $\delta(t)$  se nazývá **Diracův impuls**, Diracova  $\delta$ -funkce nebo jednotkový impuls. Hodnota  $\delta(t)$  pro  $t \neq 0$  je  $\delta(t) = 0$ . Její hodnota v  $t = 0$  není definována jako funkce, používá se integrální definice

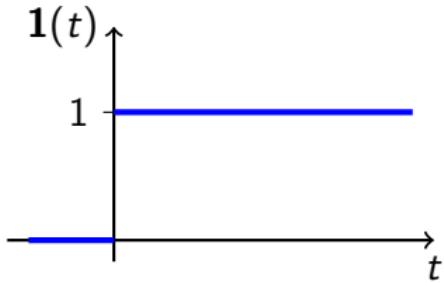
$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) \, dt = \int_{-\epsilon}^{\epsilon} \delta(t) \, dt = \int_{0-}^{0+} \delta(t) \, dt = 1$$

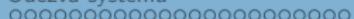
pro každé  $\epsilon > 0$ .

# Jednotkový skok

Funkce jednotkového skoku bývá obvykle značena  $\mathbf{1}(t)$  a je definována jako

$$\mathbf{1}(t) = \begin{cases} 1 & \text{pro } t \geq 0 \\ 0 & \text{pro } t < 0. \end{cases}$$



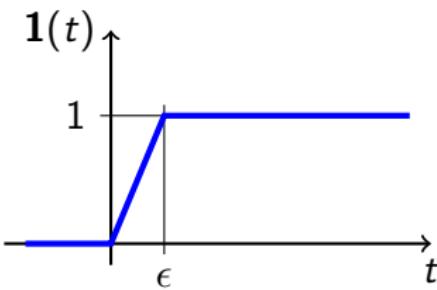


# Jednotkový skok

Vztah  $\delta(t)$  a  $\mathbf{1}(t)$

Platí

$$\delta(t) = \frac{d}{dt} \mathbf{1}(t).$$



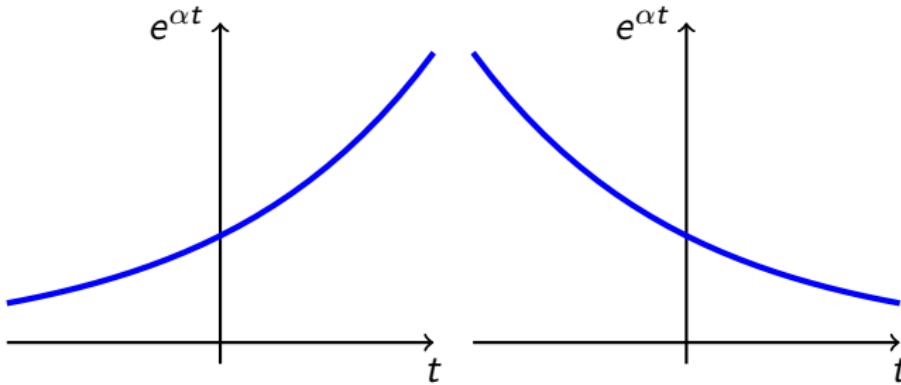
# Exponenciála

Reálná

Uvažujme exponenciální funkci

$$f(t) = e^{\alpha t},$$

kde  $\alpha$  je reálná konstanta, podle následujícího obrázku.



# Exponenciála

## Komplexní

### Exponenciální funkce

$$f(t) = A e^{\alpha t},$$

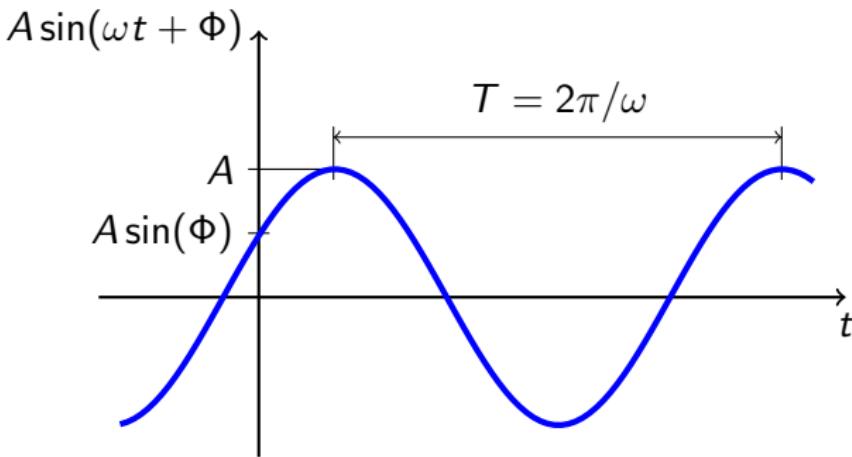
kde  $\alpha \in \mathbb{C}$  je zajímavá hlavně v případě, kdy  $\alpha = i\omega$ ,

$$f(t) = A e^{i\omega t} = A(\cos \omega t + i \sin \omega t).$$



# Sinusová funkce

$$f(t) = A \sin(\omega t + \Phi),$$



Konstanty  $A$ ,  $\omega$  a  $\Phi$  se nazývají **amplituda, úhlová frekvence a fázový posun**. Sinusovka je periodická se základní periodou  $T = 2\pi/\omega$ .

# Obsah přednášky

- ① Úvod do teorie signálů
- ② Základní spojité signály
- ③ Základní diskrétní signály
  - Diskrétní jednotkový impuls a skok
  - Diskrétní sinusová posloupnost
- ④ Odezva systému

# Vznik diskrétních signálů

Jak diskrétní signály vznikají?

- **přirozeně** (průměrné denní teploty, denní kurzy, počty studentů)
- **vzorkováním spojitých signálů** (naměření teploty každou hodinu, měřením průtoku každých 15 minut)

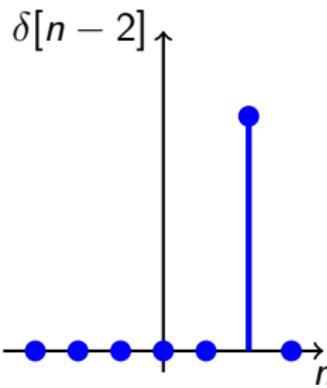
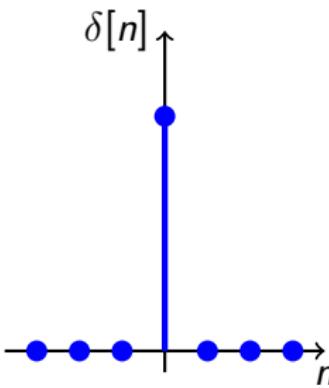
Diskrétní signály, jimiž se budeme v předmětu zabývat, jsou diskrétní v čase, ale **spojitě ve funkční hodnotě**.

Digitální signál je totiž často **kvantovaný**, nabývá tedy v každém  $n$  pouze diskrétní množiny funkčních hodnot, například  $\{0, 1, 2, \dots, 65535\}$ .

# Diskrétní jednotkový impuls

Diskrétní jednotkový impuls  $\delta[n]$  je definován vztahem

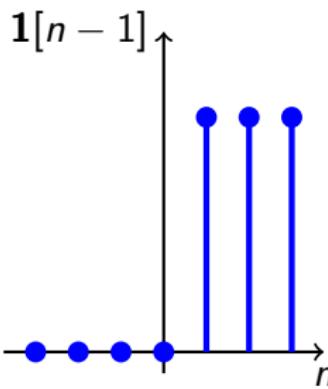
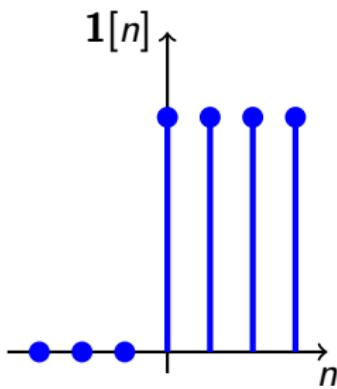
$$\delta[n] = \begin{cases} 1 & \text{pro } n = 0 \\ 0 & \text{pro } n \neq 0. \end{cases}$$



# Diskrétní jednotkový skok

Diskrétní jednotkový skok  $\mathbf{1}[n]$  je definován vztahem

$$\mathbf{1}[n] = \begin{cases} 1 & \text{pro } n \geq 0 \\ 0 & \text{pro } n < 0 \end{cases}$$





# Periodický signál

Diskrétní signál  $f[n]$  je periodický, jestliže existuje kladné celé číslo  $N$  takové, že platí

$$f[n] = f[n + N] = f[n + 2N] = \dots = f[n + k \cdot N]$$

pro všechna  $n \in \mathbb{Z}$  (z intervalu  $(-\infty, \infty)$ ) a pro libovolné  $k \in \mathbb{Z}$ .  $N$  se nazývá **perioda diskrétního signálu**.

Nejmenší možné  $N$  nazýváme **fundamentální perioda** a značíme  $N_0$ .

# Periodický signál

Diskrétní sinusová posloupnost nemusí být periodická!

Diskrétní sinusový signál **nemusí být nutně periodický**, záleží na volbě vzorkovací periody  $T_s$ . Pro periodický diskrétní sinusový signál s periodou  $N$  musí platit

$$N = m \cdot \frac{2\pi}{T_s},$$

kde  $m \in \mathbb{N}$ . Máme i  $N \in \mathbb{N}$ , proto  $2\pi/T_s$  musí být racionální číslo.

## Příklad (Neperiodický sinusový signál)

Signál

$$y[n] = \sin n$$

není pro  $T_s = 0.1\text{ s}$  periodický, protože  $2\pi/T_s$  není racionální číslo.





# Diskrétní systém

## Impulsní odezva

### Definice (Impulsní odezva)

Odezvu systému na jednotkový impuls  $\delta[n]$  budeme nazývat **impulsní odezva** a značit  $h[n]$ ,

$$h[n] = \mathcal{S}\{\delta[n]\}$$

$$h[n, m] = \mathcal{S}\{\delta[n - m]\} .$$

# Diskrétní systém

## Přechodová odezva

### Definice (Přechodová odezva)

Odezvu systému na jednotkový skok  $\mathbf{1}[n]$  budeme nazývat **přechodová odezva** a značit  $s[n]$ ,

$$s[n] = \mathcal{S}\{\mathbf{1}[n]\} = \mathcal{S}\left\{ \sum_{m=0}^n \delta[n-m] \right\}.$$

# Lineární systém

## Definice (Linearita)

V matematice označujeme funkci  $f(x)$  jako lineární v případě, že je

- ① aditivní  $f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2)$  a
- ② homogenní,  $f(\alpha x) = \alpha f(x)$ .

Obdobně to platí i pro lineární systémy.

## Definice (Lineární systém)

Systém je lineární, pokud pro dva různé vstupní signály  $u_1[n]$  a  $u_2[n]$  platí

$$\begin{aligned}\mathcal{S}\{u_1[n] + u_2[n]\} &= \mathcal{S}\{u_1[n]\} + \mathcal{S}\{u_2[n]\}, \\ \mathcal{S}\{\alpha u[n]\} &= \alpha \mathcal{S}\{u[n]\}.\end{aligned}$$

# Princip superpozice

## Definice (Princip superpozice)

Pro dva různé vstupní signály  $u_1[n]$  a  $u_2[n]$  platí

$$\begin{aligned}y_1[n] &= \mathcal{S}\{u_1[n]\} \\y_2[n] &= \mathcal{S}\{u_2[n]\}\end{aligned}$$

a pro  $u[n] = \alpha u_1[n] + \beta u_2[n]$  také

$$\alpha y_1[n] + \beta y_2[n] = y[n] = \mathcal{S}\{u[n]\} = \mathcal{S}\{\alpha u_1[n] + \beta u_2[n]\}$$

Obecně platí

$$u[n] = \sum_i a_i u_i[n] \quad \rightarrow \quad y[n] = \sum_i a_i y_i[n] = \sum_i a_i \mathcal{S}\{u_i[n]\}$$

# Příklad

## Příklad (Lineární systém)

Uvažujme systém

$$y[n] + a y[n - 1] = u[n].$$

Je-li na vstupu lineární kombinace dvou různých signálů

$$u[n] = b_1 u_1[n] + b_2 u_2[n]$$

je na výstupu

$$y[n] = b_1 (y_1[n] + a y_1[n - 1]) + b_2 (y_2[n] + a y_2[n - 1])$$

kde

$$y_1[n] + a y_1[n - 1] = u_1[n]$$

$$y_2[n] + a y_2[n - 1] = u_2[n]$$

# Příklad

## Příklad (Nelineární systém)

Numerický výpočet druhé odmocniny lze zapsat rekurentním vztahem

$$y[n+1] = \frac{1}{2} \left( y[n] + \frac{u[n]}{y[n]} \right).$$

Odmocnina z čísla 10 je s přesností na 10 desetinných míst rovna  $\sqrt{10} = 3,16227766017$ . Pro  $u[n] = u[0] = 10$  dostáváme postupně

$n$	$y[n]$	$y^2[n]$
1	3	9
2	3,165	10,017225
3	3,162278	10,00000214928
4	3,162277660	9,999999999568
:	:	:

# Lineární systém

Odezva na obecný vstupní signál

Pro obecný vstupní signál  $u[n]$  je pak odezva lineárního systému

$$\begin{aligned}
 y[n] &= \mathcal{S}\{u[n]\} = \mathcal{S}\left\{\sum_{m=-\infty}^{\infty} u[m] \delta[n-m]\right\} \\
 &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} u[m] \mathcal{S}\{\delta[n-m]\} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} u[m] h[n, m]
 \end{aligned}$$

Vidíme, že chování systému je zcela určeno jeho odezvami na různě posunuté jednotkové pulsy  $h[n, m]$ .

# Lineární systém

## Přechodová odezva

Přechodová odezva diskrétního lineárního systému  $s[n]$  je dána prostým součtem impulsních odezv pro  $0 \leq m \leq n$

$$\begin{aligned}s[n] &= \mathcal{S}\{\mathbf{1}[n]\} = \mathcal{S}\left\{\sum_{m=0}^n \delta[n-m]\right\} \\&= \sum_{m=0}^n \mathcal{S}\{\delta[n-m]\} = \sum_{m=0}^n h[n, m].\end{aligned}$$

Lze za nějakých podmínek zjednodušit  $h[n, m]?$

# Časově invariantní systém

Systém se nazývá **časově invariantní**, jestliže jsou všechny události závislé pouze na časovém intervalu (rozdílu časových událostí)  $n - m$  a nikoliv na každém časovém okamžiku  $n$  a  $m$  samostatně.

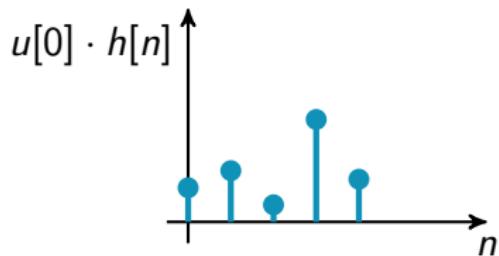
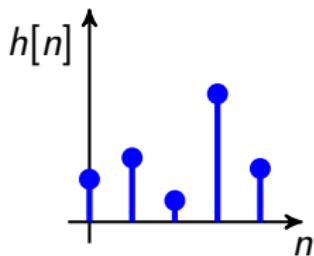
$$\begin{array}{ll} \text{dnes} & \dots & y[n] = \mathcal{S}[u[n]] \\ \text{včera} & \dots & y[n-1] = \mathcal{S}[u[n-1]] \\ & & \vdots \end{array}$$

Potom také rovnice pro impulsní odezvu přejde z maticového tvaru na prostý vektorový zápis

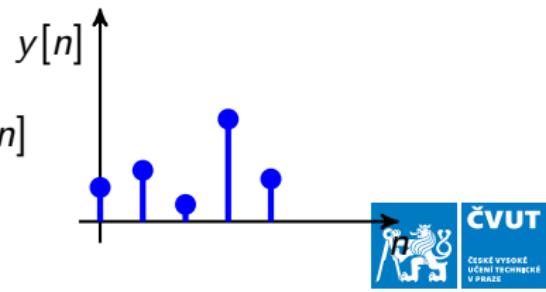
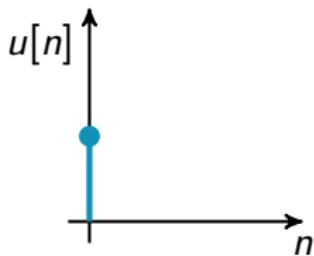
$$h[n, m] \rightarrow h[n-m] = \mathcal{S}\{\delta[n-m]\}.$$

# Časově invariantní systém

Superpozice odezvy  $y[n]$  z  $h[n - k]$

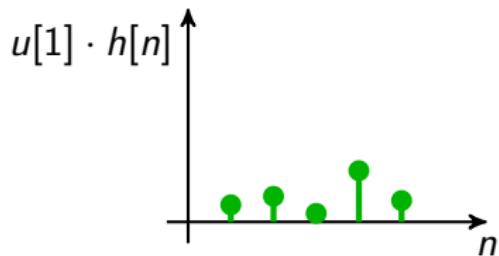
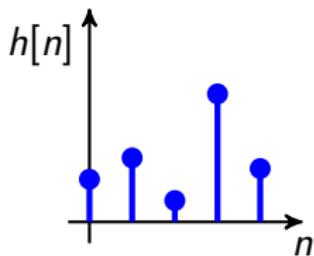


$$y[n] = u[0] \cdot h[n]$$

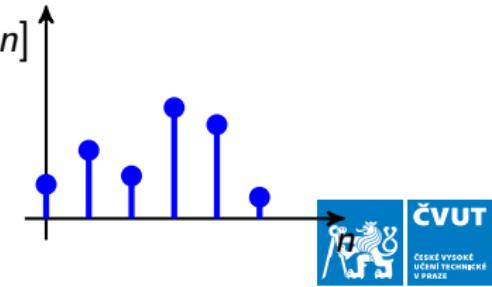
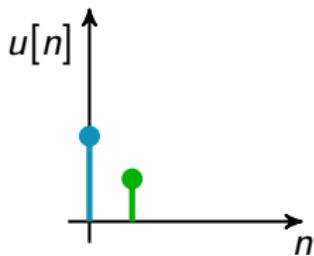


# Časově invariantní systém

Superpozice odezvy  $y[n]$  z  $h[n - k]$

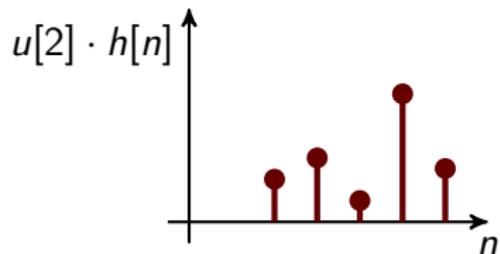
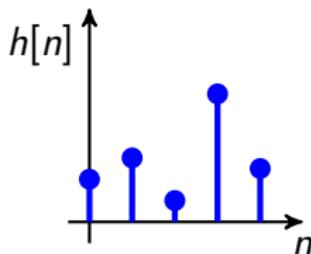


$$y[n] = u[0] \cdot h[n] + u[1] \cdot h[n - 1]$$

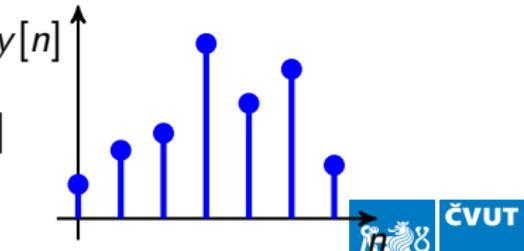
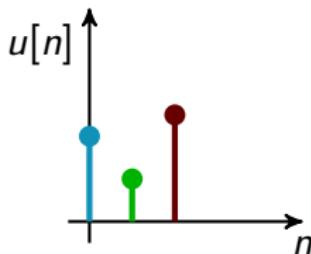


# Časově invariantní systém

Superpozice odezvy  $y[n]$  z  $h[n - k]$



$$y[n] = u[0] \cdot h[n] + u[1] \cdot h[n - 1] + u[2] \cdot h[n - 2]$$



# Konvoluce

V důsledku časové invariance dostáváme z rovnice **konvoluční sumu**

$$y[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} h[n-m] \cdot u[m] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k] \cdot u[n-k],$$

kterou pro úsporu místa značíme

$$y[n] = h[n] * u[n].$$

Pozor: nejde o násobení!

$$h[n] \neq \frac{y[n]}{u[n]}$$

# Příklad

## Příklad (Časově invariantní systém)

Uvažujme mikroekonomický systém variace ceny popsaný diferenční rovnici

$$y[n] + a y[n - 1] = u[n].$$

Protože její koeficienty nezávisí na čase, tj.  $a$  je konstantní a není funkcí  $n$ , zachovává tato rovnice tvar při záměně  $n \rightarrow n - m$ .

Impulsní odezva je potom

$$h[n] = (-a)^n \mathbf{1}[n].$$

# Příklad

## Příklad (Časově proměnný systém)

Uvažujme nyní obměněnou diferenční rovnici

$$y[n] + n \cdot y[n - 1] = u[n].$$

Koeficient u  $y[n - 1]$  závisí na čase a tato rovnice nezachovává tvar při záměně  $n \rightarrow n - m$ . Impulsní odezvu lze psát ve tvaru

$$h[n] = (-1)^n n! \mathbf{1}[n].$$

# Kauzální systém

Systém je **kauzální**, pokud jeho výstup závisí pouze na současných a minulých hodnotách vstupů.

Výstupní signál  $y[n]$  kauzálního systému tedy závisí pouze na  $\{u[n], u[n - 1], u[n - 2], \dots\}$ . V konvoluční sumě proto

$$\begin{aligned}y[n] &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k] u[n - k] \\&= \underbrace{\sum_{k=-\infty}^{-1} h[k] u[n - k]}_0 + \sum_{k=0}^{\infty} h[k] u[n - k]\end{aligned}$$

musíme položit všechny členy impulsní odezvy  $h[n] = 0$  pro  $n < 0$ .

# Kauzální systém

Konvoluční suma pro lineární, časově invariantní a kauzální systém má tvar

$$y[n] = \sum_{k=0}^{\infty} h[k] \cdot u[n - k] = \sum_{k=-\infty}^0 u[k] \cdot h[n - k].$$

Jestliže navíc budeme požadovat, aby vstupní a výstupní signály měly dobře definovaný počátek, tj. aby  $\forall n < 0 : u[n] = 0, y[n] = 0$  (oba signály mohou mít nenulové členy pouze pro  $n \geq 0$ ), potom platí

$$y[n] = \sum_{k=0}^n h[k] \cdot u[n - k] = \sum_{k=0}^n h[n - k] \cdot u[k].$$

# Spojité systémy

Impulsní a přechodová odezva

## Definice (Impulsní odezva)

Odezvu systému na Diracův impuls  $\delta(t)$  budeme nazývat **impulsní odezva** a značit  $h(t)$ ,

$$h(t) = \mathcal{S}\{\delta(t)\}$$
$$h(t, \tau) = \mathcal{S}\{\delta(t - \tau)\}.$$

## Definice (Přechodová odezva)

Odezvu systému na jednotkový skok  $\mathbf{1}(t)$  budeme nazývat **přechodová odezva** a značit  $s(t)$ ,

$$s(t) = \mathcal{S}\{\mathbf{1}(t)\} = \mathcal{S}\left\{ \int_0^t \delta(t - \tau) dt \right\}.$$

# Spojité systémy

## Konvoluce

V případě spojitého casu postupujeme podobně a odvodíme pro lineární časově invariantní systém konvoluční integrál

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)u(t - \tau) \, d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} h(t - \tau) \cdot u(\tau) \, d\tau.$$

Operaci často zapisujeme ve zjednodušené formě jako

$$y(t) = h(t) * u(t).$$

Opět připomínáme, že se v tomto zápisu nejedná o násobení!

# Spojity systém

Pro  $u(t) = \delta(t)$  platí pro lineární a časové invariantní systém samozřejmě

$$y(t) = \mathcal{S}\{u(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) \cdot \delta(t - \tau) \, d\tau = h(t).$$

# Spojité systémy

## Kauzální systém

Výstupní signál  $y(t)$  spojitého kauzálního systému závisí pouze na hodnotách vstupů pro předešlé časové okamžiky. Z důvodu, které klademe na kauzální chování systému, přejde konvoluční integrál na tvar

$$\begin{aligned} y(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) u(t - \tau) \, d\tau \\ &= \underbrace{\int_{-\infty}^0 h(\tau) u(t - \tau) \, d\tau}_{0} + \int_0^{\infty} h(\tau) u(t - \tau) \, d\tau \end{aligned}$$

a hodnoty impulsní odezvy pro  $t < 0$  uvažujeme opět  $h(t) = 0$ .

# Spojité systémy

Konvoluce pro kauzální LTI systém

Konvoluční integrál pro lineární, časově invariantní a kauzální systém má tvar

$$y(t) = \int_0^{\infty} h(\tau) \cdot u(t - \tau) \, d\tau = \int_{-\infty}^0 u(\tau) \cdot h(t - \tau) \, d\tau.$$

Jestliže navíc budeme požadovat, aby vstupní a výstupní signály měly dobře definovaný počátek, tj. aby  $\forall t < 0 : u(t) = 0, y(t) = 0$  (oba signály mohou být nenulové členy pouze pro  $t \geq 0$ ), potom platí

$$y(t) = \int_0^t h(\tau) \cdot u(t - \tau) \, d\tau = \int_0^t u(\tau) \cdot h(t - \tau) \, d\tau.$$

# Charakteristiky systémů

## Autonomní systém

### Definice (Autonomní systém)

Za autonomní systém považujeme takový, který **nemá vstup**.

Diskrétní autonomní systém je popisuje tedy například diferenční rovnice vnějšího popisu

$$y[n+1] + a y[n] = 0.$$

Výstup autonomního systému je odezvou na počáteční podmínky.

V případě, že systém má vstup  $u[n]$ , tedy

$$y[n] + a y[n - 1] = u[n],$$

systém pokládáme za neautonomní.