Laplaceova transformace

Modelování systémů a procesů (11MSP)

Bohumil Kovář

Katedra aplikované matematiky
ČVUT v Praze, Fakulta dopravní

6. přednáška 11MSP
2024

verze: 2024-03-09 15:24

Obsah přednášky

Vlastní funkce systému

$$\mathbf{A}\vec{x} = \lambda\vec{x}$$

Vstup systému $u(t)$, výstup $\lambda u(t)$.

λ je vlastní číslo

Fourierova transformace

Komplexní exponenciála

Odezva LTI systému na komplexní exponenciálu je ta samá komplexní exponenciála, pouze se změněnou amplitudou:

$$\text{spojitý systém: } e^{st} \longrightarrow H(s) \cdot e^{st}$$
$$\text{diskrétní systém: } z^n \longrightarrow H(z) \cdot z^n$$

kde $H(s)$ respektive $H(z)$ je komplexní škálovací faktor, jež obecně může záviset na komplexní proměnné s nebo z.

Signál, pro nějž je výstup systému roven vstupu až na násobení konstantou, nazýváme **vlastní funkce** systému a odpovídající škálovací faktor pak nazýváme **vlastní číslo** systému.

Fourierova transformace

Komplexní exponenciála

Uvažujme spojitý LTI systém s impulsní odezvou $h(t)$ a vstupním signálem $u(t) = e^{st}$, kde $s \in \mathbb{C}$:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)\, u(t-\tau)\, \mathrm{d}\tau = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)\, e^{s(t-\tau)}\, \mathrm{d}\tau.$$

Platí $e^{s(t-\tau)} = e^{st} e^{-s\tau}$ a člen e^{st} nezávisí na integrandu, je tedy

$$y(t) = e^{st} \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)\, e^{-s\tau}\, \mathrm{d}\tau.$$

Fourierova transformace

Komplexní exponenciála

$$y(t) = H(s) \cdot e^{st},$$

kde $H(s)$ je komplexní konstanta závisející jednak na s a jednak na impulsní odezvě systému vztahem

$$H(s) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)\, e^{-s\tau}\, \mathrm{d}\tau.$$

Obsah přednášky

Laplaceova transformace

Odkud se bere?

Pro imaginární s odpovídá $H(s)$ Fourierově transformaci signálu impulsní odezvy $h(t)$.

Pokud budeme uvažovat namísto ryze imaginárních komplexních hodnot obecná komplexní čísla p, bude výsledkem generalizace Fourierovy transformace – tak zvaná **Laplaceova transformace**.

Bude potom

$$e^{pt} \longrightarrow H(p) \cdot e^{pt}, \quad p = a + bi$$

a $H(p)$ odpovídá Laplaceově transformaci signálu impulsní odezvy $h(t)$.

Obsah přednášky

Laplaceova transformace

Důvody pro použití

Laplaceova transformace významně zjednodušuje některé operace v oblasti analýzy spojitých LTI systémů, například

- derivace $\Rightarrow$ násobení proměnnou p
- integrace $\Rightarrow$ dělení proměnnou p
- diferenciální rovnice n-tého řádu s konstantními koeficienty $\Rightarrow$ algebraické rovnice n-tého řádu
- konvoluce $f(t) * g(t) \Rightarrow$ součin $F(p) \cdot G(p)$

Laplaceova transformace

Definice

Definice (Laplaceova transformace)

Laplaceova transformace funkce $f(t)$, která je nanejvýš polynomiálního růstu

$$f(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \cdots + a_n t^n$$

je definována integrálem

$$F(p) = \int_0^\infty f(t) e^{-pt} \, \mathrm{d}t \equiv \mathcal{L}\{f(t)\}.$$

Funkci $f(t)$ nazýváme **vzorem** a funkci $F(p)$ Laplaceovým **obrazem**.

Laplaceova transformace

Definice inverzní transformace

Zpětná Laplaceova transformace má tvar integrálu podél křivky v komplexní rovině p

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} F(p)\, e^{pt}\, \mathrm{d}p \equiv \mathcal{L}^{-1}\left\{F(p)\right\}.$$

Praktické počítání zpětné Laplaceovy transformace vychází z residuové věty, která pro racionálně lomené funkce v proměnné p vede v operátorovém počtu na **Heavisideovu větu**.

(Oliver Heaviside, 1850-1925)

Laplaceova transformace

Vlastnosti - linearita

Věta (Linearita)

Laplaceova transformace je lineární:

$$\mathcal{L}\left\{\sum_k a_k f_k(t)\right\} = \sum_k a_k \mathcal{L}\left\{f_k(t)\right\} = \sum_k a_k F_k(p)$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\sum_m b_m F_m(p)\right\} = \sum_m b_m \mathcal{L}^{-1}\left\{F_m(p)\right\} = \sum_m b_m f_m(t)$$

Laplaceova transformace

Vlastnosti – změna měřítka

Věta (O změně měřítka)

Pro $F(p) = \mathcal{L}\{f(t)\}$ *je*

$$\mathcal{L}\{f(at)\} = \frac{1}{a} F\left(\frac{p}{a}\right)$$

Důkaz.

Substitucí $at = \tau$

$$\mathcal{L}\{f(at)\} = \int_0^\infty f(at) e^{-pt}\,\mathrm{d}t = \int_0^\infty f(\tau) e^{-\frac{p}{a}\tau} \frac{1}{a}\,\mathrm{d}\tau = \frac{1}{a} F\left(\frac{p}{a}\right)$$

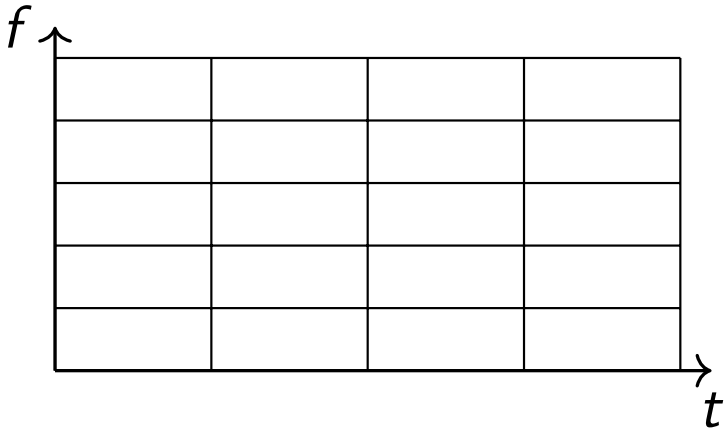
□

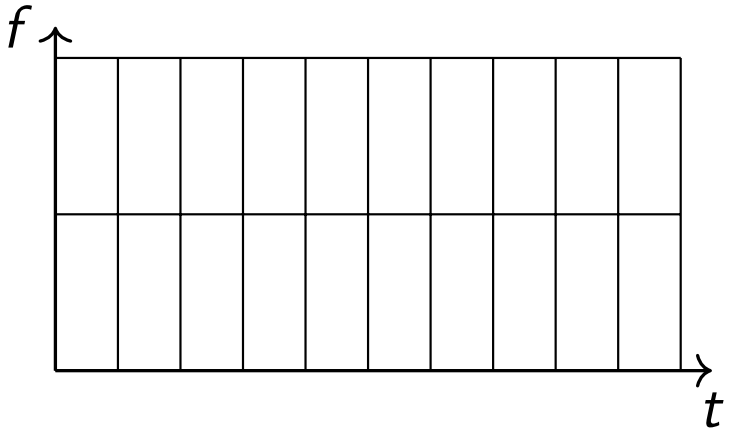
Laplaceova transformace – vlastnosti

Věta o změně měřítka platí samozřejmě i obráceně:

$$\frac{1}{b} f\left(\frac{t}{b}\right) = \mathcal{L}^{-1}\left\{F(bp)\right\}$$

Všechny integrální transformace (Laplace, Fourier, Wavelets) podléhají Hesienbergově principu neurčitosti v časovém a kmitočtovém rozlišení.





Laplaceova transformace

Vlastnosti – posunutí

Věta (O posunutí)

Je-li $F(t) = \mathcal{L}\{f(t)\}$, *pak*

$$\mathcal{L}\{\mathbf{1}(t-\tau)f(t-\tau)\} = e^{-p\tau}\mathcal{L}\{f(t)\} = e^{-p\tau}F(p).$$

Důkaz.

Substitucí $t - \tau = \vartheta$ obdržíme

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{f(t-\tau)\} &= \int_0^\infty f(t-\tau)e^{-pt}\,\mathrm{d}t = \int_{-\tau}^\infty f(\vartheta)e^{-p(\tau+\vartheta)}\,\mathrm{d}\vartheta \\ &= e^{-p\tau}\int_{-\tau}^{-0} f(\vartheta)e^{-p\vartheta}\,\mathrm{d}\vartheta + e^{-p\tau}\int_0^\infty f(\vartheta)e^{-p\vartheta}\,\mathrm{d}\vartheta \\ &= e^{-p\tau}\int_0^\infty f(\vartheta)e^{-p\vartheta}\,\mathrm{d}\vartheta \equiv e^{-p\tau}F(p)\end{aligned}$$

□

Laplaceova transformace

Vlastnosti – transformace konvoluce

Věta (O konvoluci)

$$\mathcal{L}\left\{f(t) * g(t)\right\} = \mathcal{L}\left\{\int_0^\infty f(t-\tau)\cdot g(\tau)\,d\tau\right\} = F(p)\cdot G(p)$$

Důkaz se snáze provádí v diskrétním čase.

Důsledek

$$\mathcal{L}\left\{y(t) = \int_0^\infty h(\tau)\cdot u(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau\right\} \Leftrightarrow Y(p) = H(p)\cdot U(p)$$

Laplaceova transformace

Vlastnosti – obraz derivace

Věta (O obrazu derivace funkce)

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(p)$$

$$\mathcal{L}\left\{\frac{d}{dt}f(t)\right\} = pF(p) - f(0)$$

$$\mathcal{L}\left\{\frac{d^2}{dt^2}f(t)\right\} = p^2F(p) - pf(0) - \frac{d}{dt}f(0)$$

$$\vdots$$

$$\mathcal{L}\left\{\frac{d^n}{dt^n}f(t)\right\} = p^nF(p) - p^{n-1}f(0) - p^{n-2}\frac{d}{dt}f(0)\ldots - f^{(n-1)}(0)$$

Laplaceova transformace – vlastnosti

Důkaz.

Integrováním per partes, $\int_a^b u'v = [uv]_a^b - \int_a^b uv'$:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\left\{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}f(t)\right\} &= \int_0^\infty \frac{d}{dt}f(t)e^{-pt}\,\mathrm{d}t \\ &= \Big[f(t)e^{-pt}\Big]_0^\infty - (-p)\int_0^\infty f(t)e^{-pt}\,\mathrm{d}t \\ &= -f(0) + pF(p).\end{aligned}$$

Opakováním tohoto procesu získáme postupně

$$\mathcal{L}\left\{\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}f(t)\right\} = p^2F(p) - pf(0+) - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}f(0+)$$

□

Laplaceova transformace – vlastnosti

Věta (O obrazu integrálu funkce)

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(\tau)\,d\tau\right\} = \frac{1}{p}F(p)$$

Důkaz.

Integrováním per partes, $\int_a^b uv' = [uv]_a^b - \int_a^b u'v$:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(\tau)\,\mathrm{d}\tau\right\} &= \int_0^\infty \left(\int_0^t f(\tau)\,\mathrm{d}\tau\right) e^{-pt}\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{-p}\left[\int_0^t f(\tau)\,\mathrm{d}\tau e^{-pt}\right]_0^\infty - \frac{1}{-p}\int_0^\infty f(t)e^{-pt}\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{p}F(p).\end{aligned}$$

□

Tabulky Laplaceovy transformace (1/4)

$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(p)\}$	$F(p) = \mathcal{L}\{f(t)\}$
$f(t) = \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} F(p)\, e^{pt}\, \mathrm{d}p$	$F(p) = \displaystyle\int_{0}^{\infty} f(t)\, e^{-pt}\, \mathrm{d}t$
$\delta(t)$	1
$\mathbf{1}(t)$	$\dfrac{1}{p}$

Tabulky Laplaceovy transformace (2/4)

$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(p)\}$	$F(p) = \mathcal{L}\{f(t)\}$
$e^{-\alpha t}$	$\dfrac{1}{p+\alpha}$
$\sin \omega t$	$\dfrac{\omega}{p^2+\omega^2}$
$\cos \omega t$	$\dfrac{p}{p^2+\omega^2}$

Tabulky Laplaceovy transformace (3/4)

$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(p)\}$	$F(p) = \mathcal{L}\{f(t)\}$
$e^{-\alpha t}\sin\omega t$	$\dfrac{\omega}{(p+\alpha)^2+\omega^2}$
$e^{-\alpha t}\cos\omega t$	$\dfrac{p+\alpha}{(p+\alpha)^2+\omega^2}$
t^n	$\dfrac{n!}{p^{n+1}}$

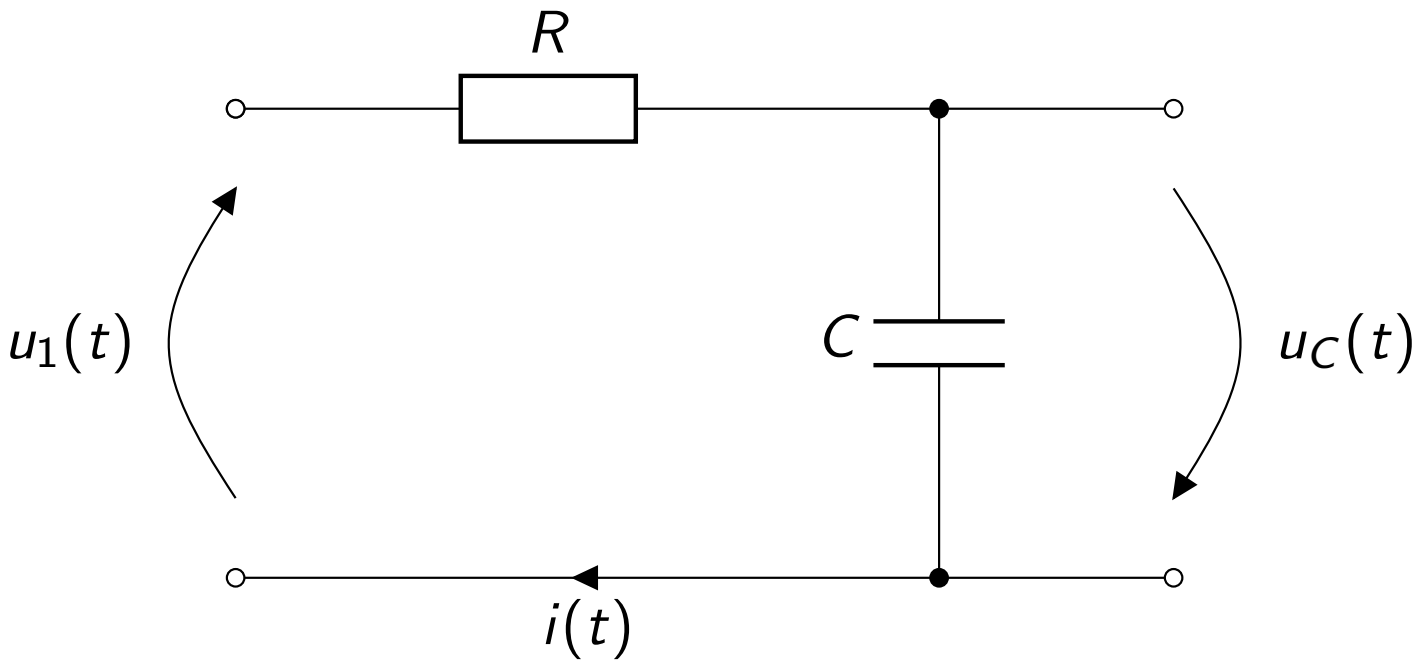
Tabulky Laplaceovy transformace (4/4)

$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(p)\}$	$F(p) = \mathcal{L}\{f(t)\}$
$t^n e^{-\alpha t}$	$\dfrac{n!}{(p+\alpha)^{n+1}}$
$t\cos\omega t$	$\dfrac{p^2-\omega^2}{(p^2+\omega^2)^2}$
$t\sin\omega t$	$\dfrac{2\omega p}{(p^2+\omega^2)^2}$

Obsah přednášky

Laplaceova transformace – příklad 1

Hledejme odezvu integračního RC článku na vstupní signál.



Diferenciální rovnice výstupního napětí u_C pro vstupní napětí u_1 je:

$$RC\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}u_C(t) + u_C(t) = u_1(t).$$

Laplaceova transformace – příklad 1

Pro $\alpha = \dfrac{1}{RC}$ a vstupní $u_1(t) = U_0 \cdot \mathbf{1}(t)$ je

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} y(t) + \alpha y(t) = \alpha U_0 \cdot \mathbf{1}(t).$$

Protože je to diferenciální rovnice s konstantními koeficienty, můžeme použít Laplaceovu transformaci a její vlastnosti

$$\mathcal{L}\left\{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} y(t)\right\} + \mathcal{L}\left\{\alpha y(t)\right\} = \mathcal{L}\left\{\alpha U_0 \cdot \mathbf{1}(t)\right\},$$

a obdržíme algebraickou rovnici pro neznámou $Y(p)$

$$pY(p) - y(0) + \alpha Y(p) = \alpha U_0 \cdot \frac{1}{p}.$$

Laplaceova transformace – příklad 1

Rovnici upravíme tak, že neznámá bude na levé straně a všechny známé konstanty na straně pravé

$$(p+\alpha)Y(p) = \frac{\alpha U_0}{p} + y(0).$$

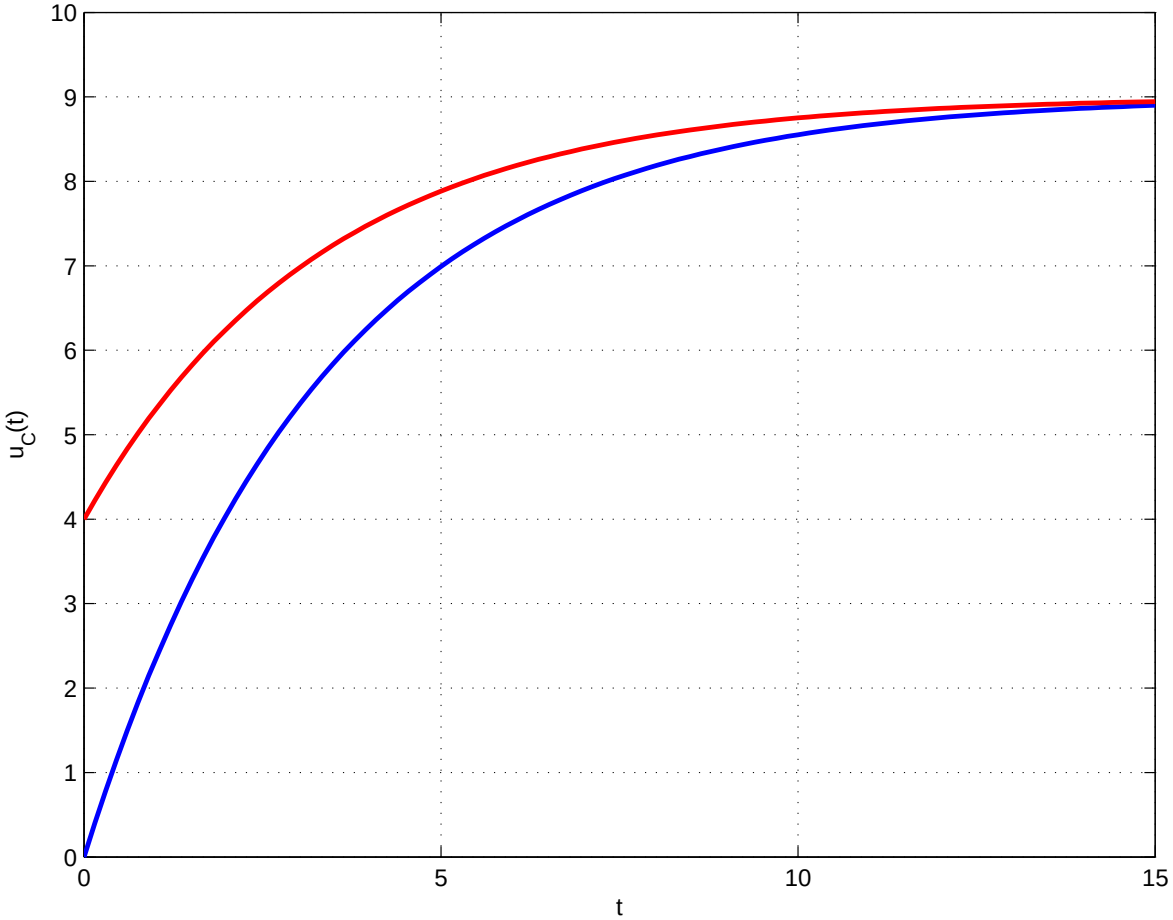
a nalezneme řešení v rovině p

$$Y(p) = \frac{\alpha U_0}{p(p+\alpha)} + \frac{y(0)}{p+\alpha} = \frac{U_0}{p} - \frac{U_0}{p+\alpha} + \frac{y(0)}{p+\alpha}$$

S pomocí tabulek pak můžeme nalézt pro $t > 0$ řešení

$$y(t) = U_0\left(1 - e^{-\alpha t}\right) + y(0)e^{-\alpha t}$$

Laplaceova transformace – příklad 1



Laplaceova transformace – příklad 2

Uvažujte LTI systém, který je pro $t > 0$ popsán naměřenými hodnotami vstupu

$$u(t) = e^{-t} + e^{-3t}$$

a výstupu

$$y(t) = te^{-3t}.$$

Jak nalezneme impulsní odezvu?

Laplaceova transformace – příklad 2

Protože platí

$$U(p) = \frac{1}{p+1} + \frac{1}{p+3} = 2\frac{p+2}{(p+1)(p+3)}$$
$$Y(p) = \frac{1}{(p+3)^2}$$

a protože

$$Y(p) = H(p) \cdot U(p),$$

je

$$H(p) = \frac{Y(p)}{U(p)} = \frac{1}{2}\frac{p+1}{(p+2)(p+3)} = \frac{1}{2}\left[\frac{2}{p+3} - \frac{1}{p+2}\right].$$

Laplaceova transformace – příklad 2

S pomocí tabulek pak můžeme nalézt pro $t > 0$ řešení

$$h(t) = e^{-3t} - \frac{1}{2}e^{-2t}.$$