

Přenosová funkce spojitých systémů. Stabilita spojitých systémů.

Modelování systémů a procesů (11MSP)

Bohumil Kovář

Ústav aplikované matematiky
ČVUT v Praze, Fakulta dopravní

8. přednáška 11MSP
7. dubna 2022

verze: 2022-04-06 10:56

Obsah přednášky

① Zpětná Laplaceova transformace – dokončení

Obecné řešení diferenciální rovnice druhého řádu

Přenosová funkce

② Přenosová funkce a vnitřní popis

③ Vyšetřování stability spojitých systémů

④ Vnější popis

⑤ Vnitřní popis

Obecné řešení diferenciální rovnice druhého řádu

Diferenciální rovnici

$$\frac{d^2}{dt^2}y(t) + 2a \frac{d}{dt}y(t) + (a^2 + b^2)y(t) = u(t)$$

s počátečními podmínkami ve tvaru

$$y(0) = c_1 \quad \text{a} \quad y'(0) = c_2,$$

řešíme pomocí Laplaceovy transformace.

Obecné řešení diferenciální rovnice druhého řádu

Protože platí

$$\mathcal{L} \left\{ \frac{d}{dt} y(t) \right\} = pY(p) - y(0),$$

$$\mathcal{L} \left\{ \frac{d^2}{dt^2} y(t) \right\} = p^2 Y(p) - py(0) - \frac{d}{dt} y(0),$$

nalezneme Laplaceovou transformací diferenciální rovnice její algebraický tvar

$$p^2 Y(p) - py(0) - y'(0) + 2a(pY(p) - y(0)) + (a^2 + b^2)Y(p) = U(p).$$

Obecné řešení diferenciální rovnice druhého řádu

Předchozí rovnici vyřešíme vzhledem k obrazu výstupní veličiny $Y(p)$ a dostáváme

$$(p^2 + 2ap + (a^2 + b^2)) Y(p) = U(p) + py(0) + y'(0) + 2ay(0)$$

neboli

$$Y(p) = \frac{U(p) + c_2 + (p + 2a)c_1}{(p + a + ib)(p + a - ib)}$$

Přenosová funkce

Přenosová funkce $H(p)$ je definována jako podíl obrazu výstupu k obrazu vstupu

$$H(p) = \frac{Y(p)}{U(p)}$$

pro nulové počáteční podmínky a tedy

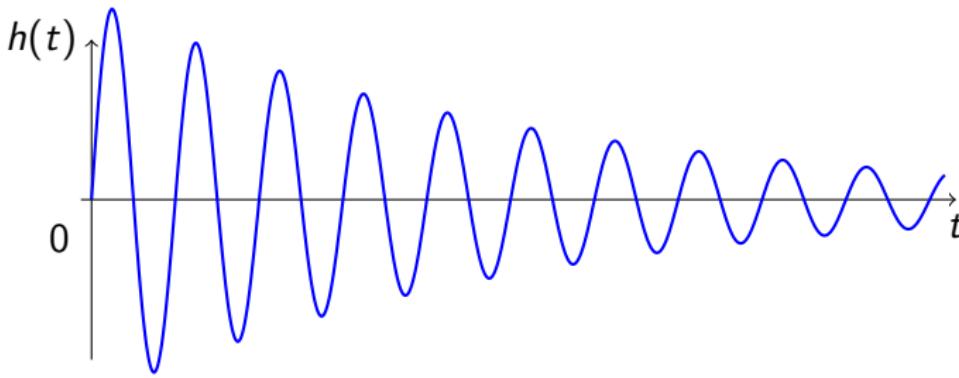
$$H(p) = \frac{Y(p)}{U(p)} = \frac{1}{(p + a + ib)(p + a - ib)}$$

Přenosová funkce

Impulsní odezva

Impulsní odezvu určíme jako zpětnou Laplaceovu transformaci přenosové funkce

$$\mathcal{L}^{-1}\{H(p)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(p+a)^2 + b^2}\right\} = \frac{1}{b}e^{-at} \sin bt$$



Přenosová funkce

Přechodová odezva

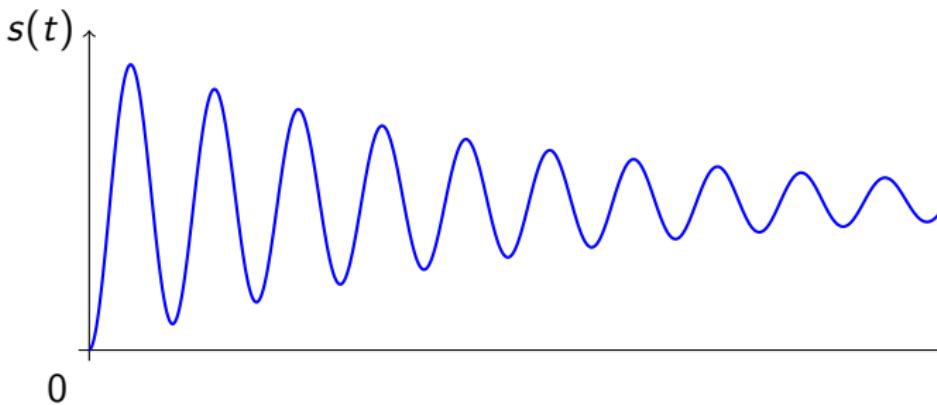
Přechodovou odezvu $s(t)$ určíme zpětnou Laplaceovou transformaci

$$s(t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ H(p) \frac{1}{p} \right\}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{-1} \left(\frac{1}{p((p+a)^2 + b^2)} \right) &= \mathcal{L}^{-1} \left(\frac{1}{a^2 + b^2} \left[\frac{1}{p} - \frac{p+2a}{(p+a)^2 + b^2} \right] \right) = \\ &= \mathcal{L}^{-1} \left(\frac{1}{a^2 + b^2} \left[\frac{1}{p} - \frac{p+a}{(p+a)^2 + b^2} - \frac{a}{(p+a)^2 + b^2} \right] \right) \\ &= \frac{1}{a^2 + b^2} \left[1 - e^{-at} \cos bt - \frac{a}{b} e^{-at} \sin bt \right].\end{aligned}$$

Obecné řešení diferenciální rovnice druhého řádu

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{a^2 + b^2} \left[\frac{1}{p} - \frac{p + 2a}{(p + a)^2 + b^2} \right] \right\} &= \\ &= \frac{1}{a^2 + b^2} \left[1 - e^{-at} \cos bt - \frac{a}{b} e^{-at} \sin bt \right]\end{aligned}$$



Obsah přednášky

① Zpětná Laplaceova transformace – dokončení

② Přenosová funkce a vnitřní popis

Odvození

Příklad

③ Vyšetřování stability spojitých systémů

④ Vnější popis

⑤ Vnitřní popis

Přenosová funkce a vnitřní popis

Přenosová funkce vnitřního popisu je určena opět jako

$$H(p) = \frac{Y(p)}{U(p)},$$

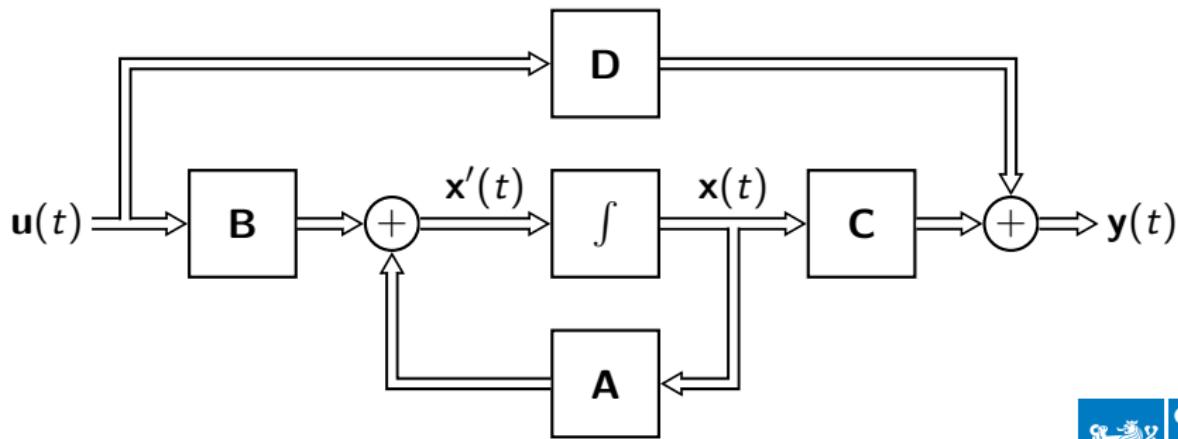
ovšem $Y(p)$ nyní závisí na stavových proměnných.

Přenosová funkce a vnitřní popis

Původní soustava

Mějme spojitý lineární časově invariantního systém

$$\begin{aligned}\mathbf{x}'(t) &= \mathbf{A} \mathbf{x}(t) + \mathbf{B} \mathbf{u}(t), \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{C} \mathbf{x}(t) + \mathbf{D} \mathbf{u}(t).\end{aligned}$$



Přenosová funkce a vnitřní popis

Laplaceova transformace

Stavový popis převedeme pomocí Laplaceovy transformace na algebraické rovnice tvaru

$$\begin{aligned} pX(p) - \mathbf{x}(0) &= \mathbf{A} X(p) + \mathbf{B} U(p) \\ Y(p) &= \mathbf{C} X(p) + \mathbf{D} U(p) \end{aligned}$$

a upravíme na

$$(p\mathbf{I} - \mathbf{A}) X(p) = \mathbf{x}(0) + \mathbf{B} U(p)$$

a vypočítáme

$$X(p) = (p\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{x}(0) + (p\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{B} U(p).$$

Přenosová funkce a vnitřní popis

Přenosová funkce je definována pro nulovou počáteční podmínu
 $x(0) = 0$. Po dosazení dostaváme

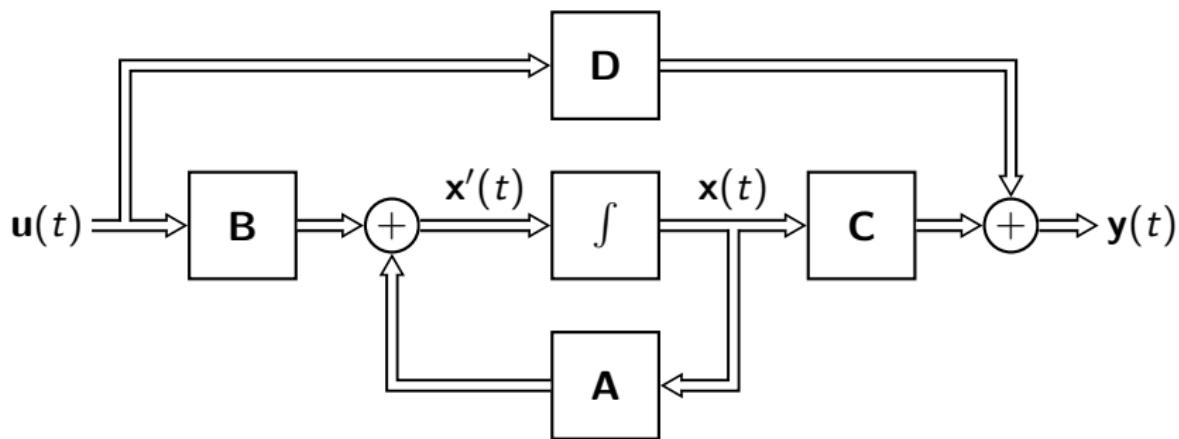
$$\begin{aligned} Y(p) &= \mathbf{C} (p\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{B} U(p) + \mathbf{D} U(p) \\ &= \left[\mathbf{C} (p\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{B} + \mathbf{D} \right] U(p) \end{aligned}$$

a přenosová funkce je

$$H(p) = \mathbf{C} (p\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{B} + \mathbf{D}$$

Přenosová funkce a vnitřní popis

$$H(p) = \mathbf{C} (p\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{B} + \mathbf{D}$$



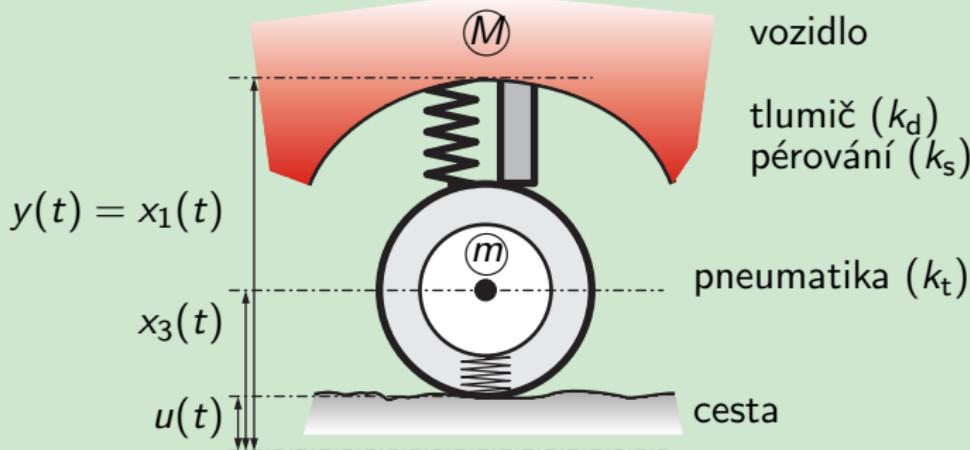
Přenosová funkce a vnitřní popis

Pokud se jedná o ryzí systém, který nemá žádnou přímou vazbu ze vstupu na výstup a tedy $\mathbf{D} = \mathbf{0}$, potom

$$H(p) = \mathbf{C} (p\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{B} = \mathbf{C} \frac{\text{adj}(p\mathbf{I} - \mathbf{A})}{\det(p\mathbf{I} - \mathbf{A})} \mathbf{B}$$

Přenosová funkce a vnitřní popis – příklad I

Příklad (Odpružení kola)



Na obrázku je model zavěšení kola vozidla a jeho odpružení s koeficienty tuhosti k_t , k_s a k_d .

Přenosová funkce a vnitřní popis – příklad II

Příklad (Odpružení kola)

Jestliže platí pohybové rovnice

$$\begin{aligned} Mx_3''(t) + k_t [x_3(t) - u(t)] - \\ - k_s [x_1(t) - x_3(t)] - k_d [x_1'(t) - x_3'(t)] &= 0 \\ mx_1''(t) + k_s [x_1(t) - x_3(t)] + k_d [x_1'(t) - x_3'(t)] &= 0 \end{aligned}$$

nalezněte stavový popis s použitím vektoru stavových proměnných
 $\mathbf{x} = [x_1(t), x_2(t), x_3(t), x_4(t)]^T$.

Nalezněte přenosovou funkci $H(p) = Y(p)/U(p)$, která charakterizuje chování vozidla v závislosti na povrchu vozovky.

Přenosová funkce a vnitřní popis – příklad III

Příklad (Odpružení kola)

Zvolíme

$$x_1(t) = y(t),$$

$$x'_1(t) = x_2(t)$$

$$x_3(t),$$

$$x'_3(t) = x_4(t)$$

a dostáváme soustavu rovnic

$$x'_1(t) = x_2(t),$$

$$x'_2(t) = -\frac{k_s}{m} [x_1(t) - x_3(t)] - \frac{k_d}{m} [x'_1(t) - x'_3(t)]$$

$$x'_3(t) = x_4(t)$$

$$x'_4(t) = -\frac{k_t}{M} [x_3(t) - u(t)] + \frac{k_s}{M} [x_1(t) - x_3(t)] + \frac{k_d}{M} [x'_1(t) - x'_3(t)]$$

Přenosová funkce a vnitřní popis – příklad IV

Příklad (Odpružení kola)

Rovnice převedeme na stavový popis

$$\begin{bmatrix} x'_1(t) \\ x'_2(t) \\ x'_3(t) \\ x'_4(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{k_s}{m} & -\frac{k_d}{m} & \frac{k_s}{m} & \frac{k_d}{m} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{k_s}{M} & \frac{k_d}{M} & -\frac{k_s + k_t}{M} & -\frac{k_d}{M} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{k_t}{M} \end{bmatrix} u(t)$$

a

$$y(t) = [1 \ 0 \ 0 \ 0] \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \end{bmatrix}.$$

Přenosová funkce a vnitřní popis – příklad V

Příklad (Odpružení kola)

Máme matice stavového popisu ve tvaru

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{k_s}{m} & -\frac{k_d}{m} & \frac{k_s}{m} & \frac{k_d}{m} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{k_s}{M} & \frac{k_d}{M} & -\frac{k_s + k_t}{M} & -\frac{k_d}{M} \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{k_t}{M} \end{bmatrix}$$

a

$$\mathbf{C} = [1 \ 0 \ 0 \ 0]$$

Přenosová funkce a vnitřní popis – příklad VI

Příklad (Odpružení kola)

a platí $H(p) = \mathbf{C} (p\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{B}$, t.j.

$$\begin{aligned} H(p) &= \frac{1}{\Delta} [1 \ 0 \ 0 \ 0] \begin{bmatrix} * & * & * & -\Delta_{41} \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{k_t}{M} \end{bmatrix} = \\ &= \frac{(k_d p + k_s) k_t}{(M p^2 + k_t)(m p^2 + k_d p + k_s) + m(k_d p + k_s) p^2}, \end{aligned}$$

kde * označuje prvky inverzní matice, které nemusíme pro přenosovou funkci počítat a $\Delta = \det(p\mathbf{I} - \mathbf{A})$.

Obsah přednášky

- ① Zpětná Laplaceova transformace – dokončení
- ② Přenosová funkce a vnitřní popis
- ③ Vyšetřování stability spojitých systémů
- ④ Vnější popis
- ⑤ Vnitřní popis

Definice stability

BIBO stabilita systému

BIBO stabilita – bounded input bounded output

Odezva na omezený vstupní signál musí být vždy omezená – systém je BIBO stabilní.

Odezva systému je kombinací

- odezvy na vstupní signál
- odezvy na počáteční podmínky

Obsah přednášky

① Zpětná Laplaceova transformace – dokončení

② Přenosová funkce a vnitřní popis

③ Vyšetřování stability spojitých systémů

④ Vnější popis

Stabilní systém

Nestabilní systém

Mez stability

⑤ Vnitřní popis

V případě přenosové funkce dané rovnicí

$$\frac{d^2}{dt^2}y(t) + 2a \frac{d}{dt}y(t) + (a^2 + b^2)y(t) = u(t)$$

jsou póly přenosové funkce komplexní čísla ve tvaru

$$p_1 = -a + bi,$$

$$p_2 = -a - bi.$$

Pro stabilitu systému jsou rozhodující hodnoty $\Re(p_1)$ a $\Re(p_2)$.
Jedná se o póly komplexně sdružené (jiné ani u LTI systémů být nemohou), platí proto $\Re(p_1) = \Re(p_2) = -a$ a pro stabilitu systému je proto rozhodující pouze hodnota parametru a .

Stabilní spojitý LTI systém

Věta (Stabilní spojitý LTI systém)

Reálná část všech pólů přenosové funkce H(p) stabilního systému leží v levé části p-roviny.

Příklad (Přenos spojitého LTI 2. řádu – jednoduché póly)

Spojitý systém 2. řádu má přenosovou funkci

$$H(p) = \frac{1}{p^2 + 4p + 3} = \frac{1}{(p+1)(p+3)}.$$

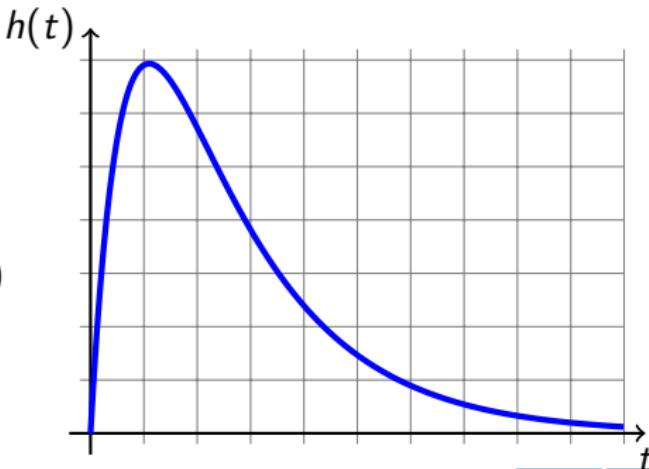
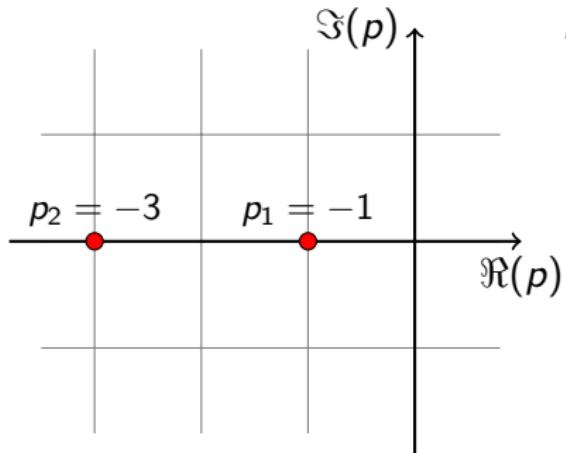
Póly přenosové funkce $p_1 = -1$ a $p_2 = -3$ leží v levé části p-roviny a jedná se proto o stabilní systém. Připomeňme, že

$$h(t) = \mathcal{L}^{-1}\{H(p)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{k_1}{p+1} + \frac{k_2}{p+3}\right\} = \frac{1}{2}e^{-t} - \frac{1}{2}e^{-3t}.$$

Stabilní spojitý LTI systém

Věta (Stabilní spojitý LTI systém)

Reálná část všech pólů přenosové funkce $H(p)$ stabilního systému leží v levé části p -roviny.



Stabilní spojitý LTI systém

Věta (Stabilní spojitý LTI systém)

Reálná část všech pólů přenosové funkce H(p) stabilního systému leží v levé části p-roviny.

Příklad (Přenos spojitého LTI 2. řádu – komplexně sdružené póly)

Spojitý systém 2. řádu má přenosovou funkci

$$H(p) = \frac{1}{p^2 + 4p + 20}.$$

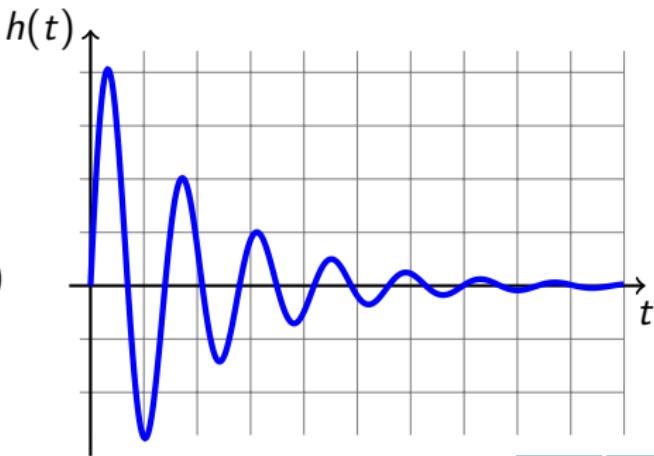
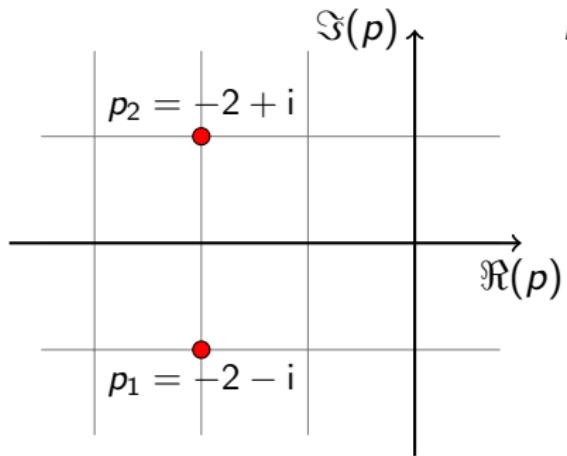
Dva komplexně sdružené póly v levé části p-roviny. Jedná se tedy o stabilní systém. Připomeňme, že

$$h(t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{4} \frac{4}{(p+2)^2 + 16} \right\} = \frac{1}{4} e^{-2t} \sin(4t).$$

Stabilní spojitý LTI systém

Věta (Stabilní spojitý LTI systém)

Reálná část všech pólů přenosové funkce $H(p)$ stabilního systému leží v levé části p -roviny.



Nestabilní spojitý LTI systém

Věta (Nestabilní spojitý LTI systém)

Reálná část alespoň jednoho pólu přenosové funkce $H(p)$ nestabilního spojitého LTI systému leží (i) v pravé části p -roviny, případně (ii) má takový systém násobný pól $H(p)$ na imaginární ose.

Příklad (Nestabilní spojitý LTI 2. řádu – reálné póly)

Spojitý LTI systém 2. řádu má přenosovou funkci

$$H(p) = \frac{1}{p^2 + p - 2} = \frac{1}{(p+2)(p-1)}.$$

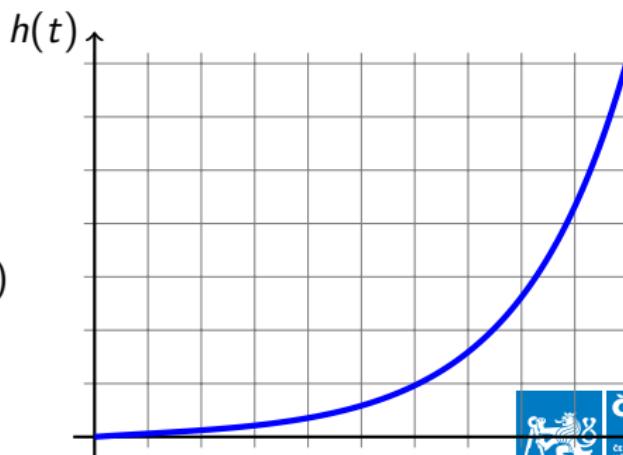
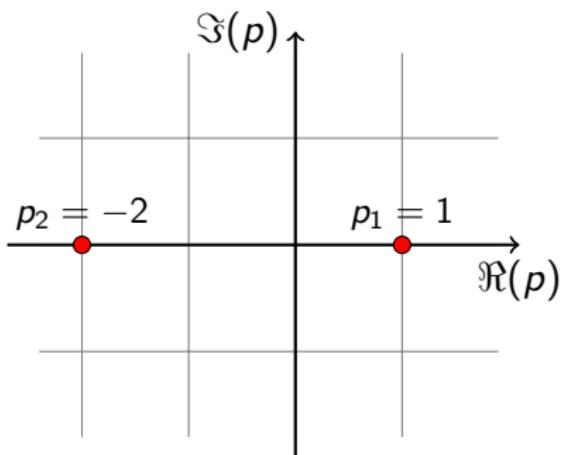
Jeden z pólů přenosové funkce, $p_2 = 1$, leží v pravé části p -roviny a jedná se proto o nestabilní systém. Připomeňme, že

$$h(t) = \mathcal{L}^{-1}\{H(p)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{k_1}{p+2} + \frac{k_2}{p-1}\right\} = -\frac{1}{3}e^{-2t} + \frac{1}{3}e^t.$$

Nestabilní spojitý LTI systém

Věta (Nestabilní spojitý LTI systém)

Reálná část alespoň jednoho pólu přenosové funkce $H(p)$ nestabilního spojitého LTI systému leží (i) v pravé části p -roviny, případně (ii) má takový systém násobný pól $H(p)$ na imaginární ose.



Nestabilní spojitý LTI systém

Věta (Nestabilní spojitý LTI systém)

Reálná část alespoň jednoho pólu přenosové funkce $H(p)$ nestabilního spojitého LTI systému leží (i) v pravé části p -roviny, případně (ii) má takový systém násobný pól $H(p)$ na imaginární ose.

Příklad (Nestabilní spojitý LTI 2. řádu – násobný pól)

Spojitý LTI systém 2. řádu má přenosovou funkci

$$H(p) = \frac{2p}{(p^2 + 1)^2}.$$

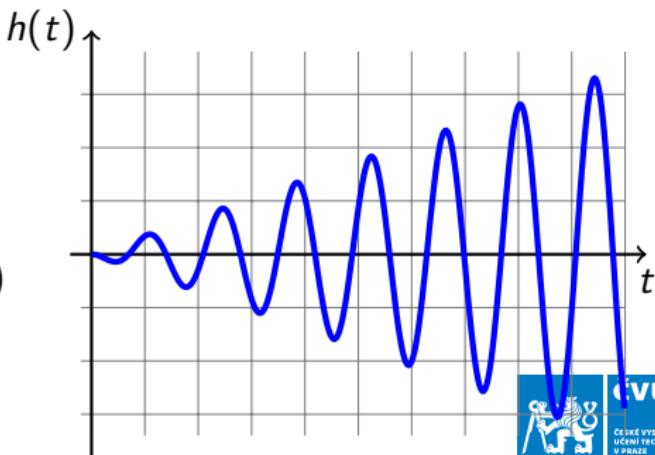
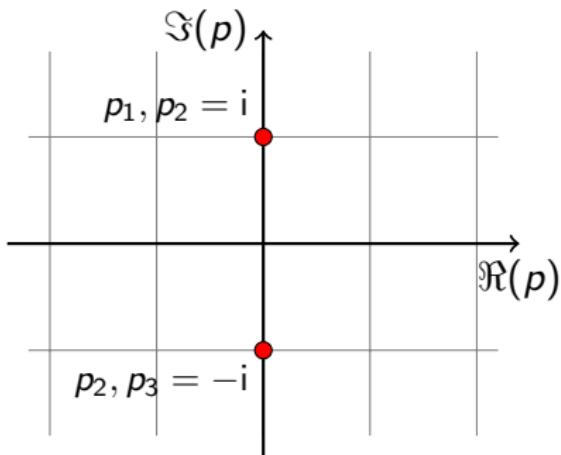
Dvojnásobný pól přenosové funkce $p_\infty = \pm i$ leží na imaginární ose p -roviny a jedná se proto o nestabilní systém. Připomeňme, že

$$h(t) = \mathcal{L}^{-1}\{H(p)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2p}{(p^2 + 1)^2}\right\} = t \sin(t).$$

Nestabilní spojitý LTI systém

Věta (Nestabilní spojitý LTI systém)

Reálná část alespoň jednoho pólu přenosové funkce $H(p)$ nestabilního spojitého LTI systému leží (i) v pravé části p -roviny, případně (ii) má takový systém násobný pól $H(p)$ na imaginární ose.



Spojitý LTI systém na mezi stability

Věta (Spojitý LTI systém na mezi stability)

*Reálná část pólů přenosové funkce $H(p)$ spojitého LTI systému na mezi stability je rovna nule a póly **nejsou násobné**.*

Příklad (Spojitý LTI 1. řádu na mezi stability – jednoduchý pól)

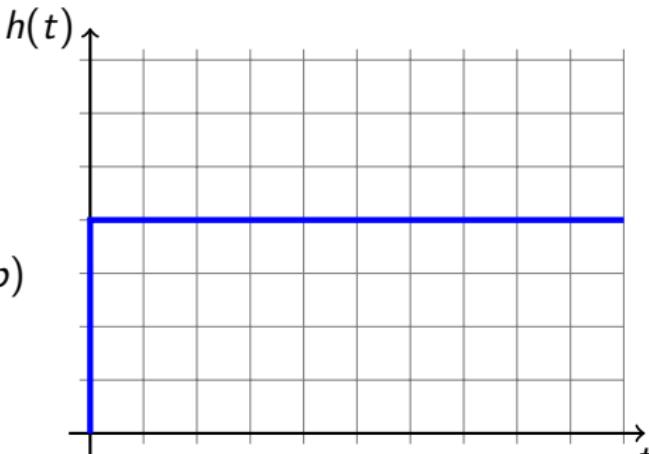
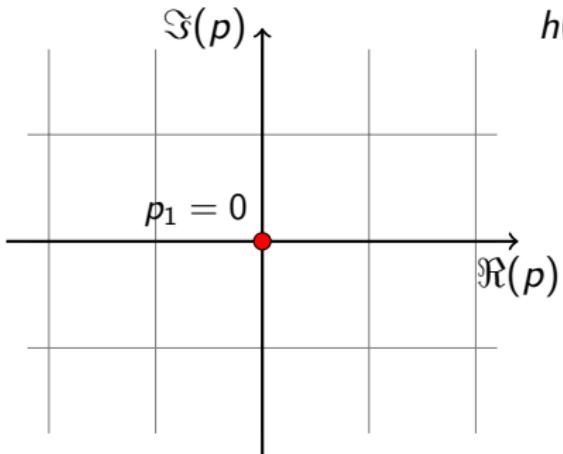
Spojitý LTI systém 1. řádu má přenosovou funkci

$$H(p) = \frac{1}{p}.$$

Spojitý LTI systém na mezi stability

Věta (Spojitý LTI systém na mezi stability)

*Reálná část pólů přenosové funkce $H(p)$ spojitého LTI systému na mezi stability je rovna nule a póly **nejsou násobné**.*



Spojitý LTI systém na mezi stability

Věta (Spojitý LTI systém na mezi stability)

*Reálná část pólů přenosové funkce $H(p)$ spojitého LTI systému na mezi stability je rovna nule a póly **nejsou násobné**.*

Příklad (Spojitý LTI 2. řádu na mezi stability – komplexně sdružený pól)

Spojitý LTI systém 2. řádu má přenosovou funkci

$$H(p) = \frac{1}{p^2 + 4}.$$

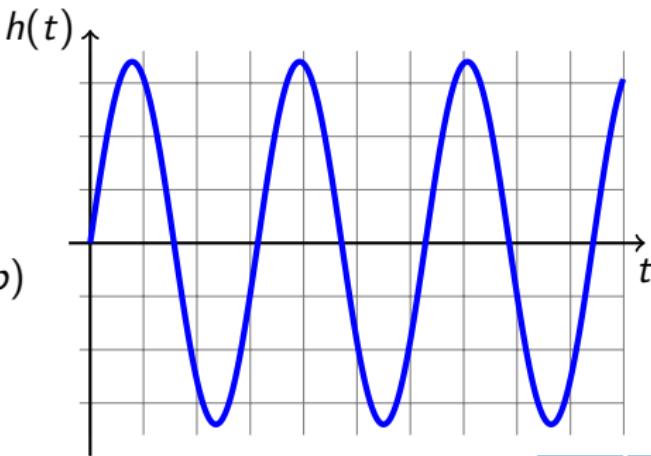
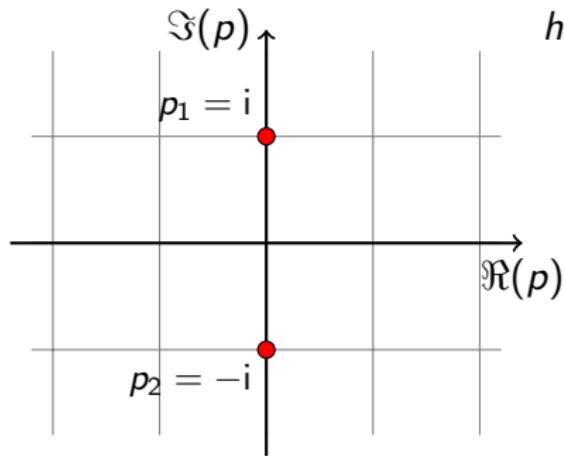
Připomeňme, že

$$h(t) = \mathcal{L}^{-1}\{H(p)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{2} \frac{2}{p^2 + 2^2}\right\} = \frac{1}{2} \sin(2t).$$

Spojitý LTI systém na mezi stability

Věta (Spojitý LTI systém na mezi stability)

Reálná část pólů přenosové funkce $H(p)$ spojitého LTI systému na mezi stability je rovna nule a póly **nejsou násobné**.



Kritérium stability

Shrnutí

Stabilní systém

- $\lim_{t \rightarrow \infty} h(t) = 0$
- Všechny póly přenosové funkce $H(p)$ leží v levé polorovině komplexní roviny, $\Re(p_\infty) < 0$.

Nestabilní systém

- $\lim_{t \rightarrow \infty} h(t) = \infty$
- Alespoň jeden pól přenosové funkce $H(p)$ leží v pravé polorovině komplexní roviny, $\Re(p_\infty) > 0$ nebo alespoň jeden **násobný** pól leží na imaginární ose.

Mez stability

- $\lim_{t \rightarrow \infty} h(t) = c \neq 0$ nebo neexistuje
- Alespoň jeden **jednoduchý** pól leží na imaginární ose a žádný pól neleží v pravé polorovině komplexní roviny. Případné násobné póly leží v levé polorovině.

Obsah přednášky

- ① Zpětná Laplaceova transformace – dokončení
- ② Přenosová funkce a vnitřní popis
- ③ Vyšetřování stability spojitých systémů
- ④ Vnější popis
- ⑤ Vnitřní popis

Stabilita vnitřního popisu

Stabilitu určujeme opět na základě polohy pólů přenosové funkce $H(p)$ v p -rovině. V případě vnitřního popisu je přenosová funkce definována vztahem

$$H(p) = \mathbf{C} (p \mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{B} + \mathbf{D}.$$

Věta (Stabilita vnitřního popisu)

Pro stabilitu systému je rozhodující matici \mathbf{A} , respektive

$$\det(p \mathbf{I} - \mathbf{A}).$$

odpovídající jmenovateli přenosové funkce.

Další postup je identický s vyšetřováním stability vnějšího popisu.

Přenosová funkce vnitřního popisu spojitého LTI systému I

Příklad (Přenosová funkce vnitřního popisu spojitého LTI systému)

Vnějšímu popisu spojitého LTI systému z Příkladu ?? odpovídá diferenciální rovnice 2. řádu

$$\frac{d^2}{dt^2}y(t) + 4 \frac{d}{dt}y(t) + 20y(t) = u(t).$$

Přenosová funkce je

$$H(p) = \frac{1}{p^2 + 4p + 20}.$$

Přenosová funkce vnitřního popisu spojitého LTI systému II

Příklad (Přenosová funkce vnitřního popisu spojitého LTI systému)

Pokud při převodu do vnitřního popisu zavedeme stavy

$$x_1(t) = y(t),$$

$$x_2(t) = \frac{d}{dt}y(t),$$

bude matice vývoje stavu \mathbf{A} , výraz $(p\mathbf{I} - \mathbf{A})$ a jeho determinant rovny

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -20 & -4 \end{bmatrix},$$

$$p\mathbf{I} - \mathbf{A} = \begin{bmatrix} p & -1 \\ 20 & p + 4 \end{bmatrix},$$

$$\det(p\mathbf{I} - \mathbf{A}) = p^2 + 4p + 20.$$

Přenosová funkce vnitřního popisu spojitého LTI systému

III

Příklad (Přenosová funkce vnitřního popisu spojitého LTI systému)

Polynom $p^2 + 4p + 20$ je charakteristický polynom systému a jeho kořeny jsou póly přenosové funkce.

Další rozhodování o stabilitě vnitřního popisu systému je shodné s kritérii stability vnějšího popisu.