

\mathcal{Z} -transformace

Modelování systémů a procesů (11MSP)

Bohumil Kovář, Jan Přikryl

Ústav aplikované matematiky
ČVUT v Praze, Fakulta dopravní

9. přednáška 11MSP
středa 14. dubna 2021

verze: 2021-04-13 13:51

Obsah přednášky

① Matematické nářadí

Motivace

Použití

② \mathcal{Z} -transformace

Matematické nářadí

Motivace

Chceme analyzovat chování nějakého systému, případně navrhnout systém, který má přesně specifikované parametry.

Opíráme se o

- **fyzikální model**, založený na fyzikálních zákonech
- **black-box model**, založený na pozorování, identifikaci

Analýza chování reálného systému je složitý proces (model představuje jedna či více diferenciálních či diferenčních rovnic vyššího řádu) \Rightarrow numerické řešení.

Jak analýzu **zjednodušit**?

Matematické nářadí

Použití

Analýza či návrh systému v **časové oblasti** (vstupy a výstupy jsou funkcií času) jsou velmi pracné.

Převod do **frekvenční oblasti** (vstupy a výstupy jsou funkcemi komplexní proměnné nazývané *úhlová frekvence*) nám

- poskytuje **fundamentálně odlišný nástroj** k pochopení funkce systému,
- často **drasticky sníží složitost** matematických výpočtů potřebných pro analýzu systému.

Obsah přednášky

① Matematické nářadí

② \mathcal{Z} -transformace

O původu diskrétní transformace

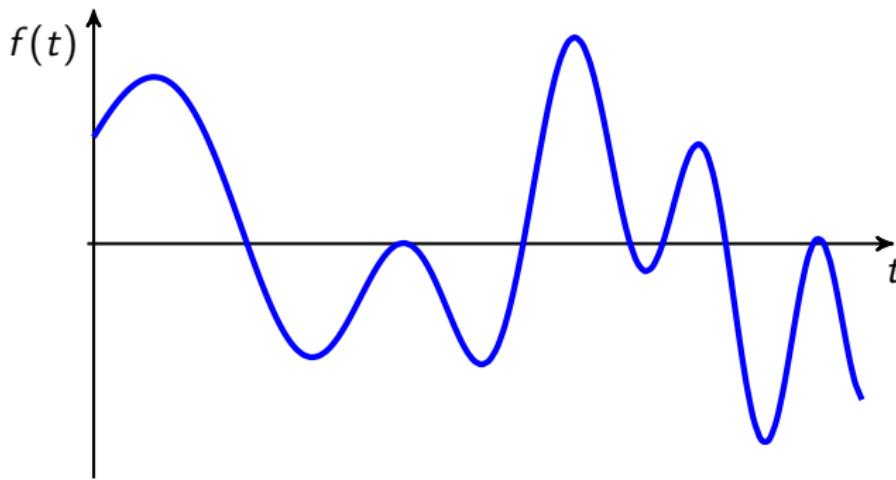
Definice

Vlastnosti

Tabulka obrazů

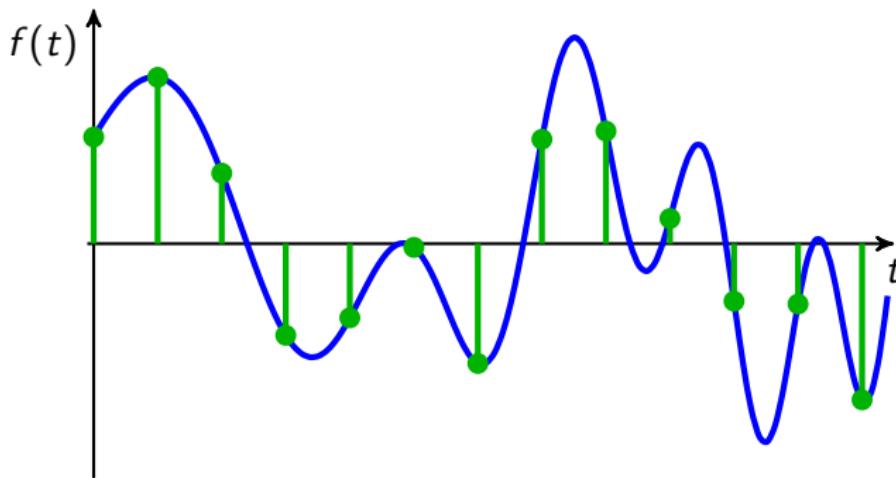
O původu diskrétní transformace

Jak se ze spojitého systému stane systém diskrétní



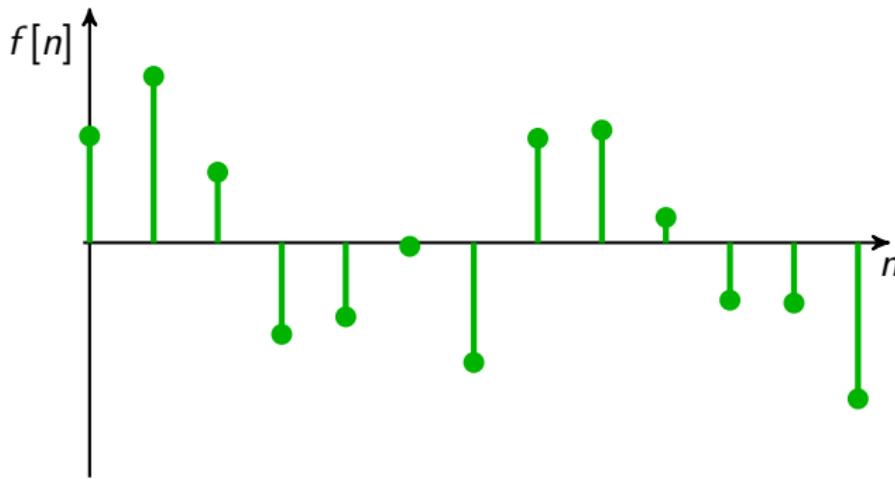
O původu diskrétní transformace

Jak se ze spojitého systému stane systém diskrétní



O původu diskrétní transformace

Jak se ze spojitého systému stane systém diskrétní



O původu diskrétní transformace

Vzorkování signálu

Vztah mezi spojitou funkcií $f(t)$ a ideálně vzorkovanou funkcí $f^*(t)$ lze formálně zapsat jako

$$\begin{aligned} f^*(t) &= \sum_{n=0}^{\infty} f(t) * \delta(t - nT) = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \cdot \delta(t - nT - \tau) \, d\tau \\ &= f(nT)\delta(t - nT) \equiv \{f_n\}_{n=0}^{\infty}, \end{aligned}$$

kde T je vzorkovací perioda signálu.

Ze spojité funkce $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ se tak stane **posloupnost** reálných hodnot $f_n : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$.

U této posloupnosti je zvykem neuvádět vzorkovací periodu signálu. Značíme ji $f[n]$ a platí

$$f[n] = \{f(nT)\}_{n=0}^{\infty}.$$

O původu diskrétní transformace

Vzorkování signálu

Jestliže budeme hledat Laplaceovu transformaci funkce $f^*(t)$, dostaneme

$$\begin{aligned}\mathcal{L} \{f^*(t)\} &= \int_0^\infty f^*(t) e^{-pt} dt \\ &= \int_0^\infty \sum_{n=0}^{\infty} f(t) \delta(t - nT) e^{-pt} dt \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^\infty \delta(t - nT) f(t) e^{-pt} dt \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} f(nT) e^{-pnT} \equiv \sum_{n=0}^{\infty} f[n] z^{-n},\end{aligned}$$

kde jsme zavedli komplexní proměnnou $z = e^{pT}$ a $f[n]$ označuje n -tý vzorek příslušné spojité funkce vzorkované s periodou T .

\mathcal{Z} -transformace

Definice

Definition (Jednostranná \mathcal{Z} -transformace)

Jednostranná \mathcal{Z} -transformace posloupnosti $f[n]$ je definována nekonečnou řadou

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f[n]z^{-n},$$

kterou často označujeme $F(z) = \mathcal{Z}\{f[n]\}$.

Zpětná \mathcal{Z} -transformace má tvar integrálu podél uzavřené křivky \mathcal{C} , jež obsahuje všechny singulární body funkce $F(z)$. Pro všechna $n = 0, 1, \dots, \infty$ platí

$$f[n] = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\mathcal{C}} F(z)z^{n-1} dz \equiv \mathcal{Z}^{-1}\{F(z)\}.$$

Vlastnosti \mathcal{Z} -transformace

Linearita

Theorem (Linearita)

\mathcal{Z} -transformace je lineární:

$$\mathcal{Z} \left\{ \sum_k a_k f_k[n] \right\} = \sum_k a_k \mathcal{Z} \{ f_k[n] \}$$

$$\mathcal{Z}^{-1} \left\{ \sum_m b_m F_m(z) \right\} = \sum_m b_m \mathcal{Z}^{-1} \{ F_m(z) \}$$

Vlastnosti \mathcal{Z} -transformace

Změna měřítka

Theorem (O změně měřítka)

Pro $F(z) = \mathcal{Z}\{f[n]\}$ je

$$a^{-n}f[n] = \mathcal{Z}^{-1}\{F(az)\}$$

$$F(a^{-1}z) = \mathcal{Z}\{a^n f[n]\}$$

Vlastnosti \mathcal{Z} -transformace

Posunutí

Věty o posunutí jsou velmi důležité pro transformaci diferenčních rovnic na algebraické rovnice v \mathcal{Z} -rovině, podobně, jako je tomu u spojitéch systémů s větami o obrazu derivací v Laplaceově transformaci.

$$\mathcal{Z}\{f[n-m]\} = z^{-m}\mathcal{Z}\{f[n]\} = z^{-m}F(z) \mid_{\forall n-m < 0: f[n-m]=0}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{Z}\{f[n+m]\} &= z^m \left[\mathcal{Z}\{f[n]\} - \sum_{\nu=0}^{m-1} f[\nu]z^{-\nu} \right] \\ &= z^m \left[F(z) - \sum_{\nu=0}^{m-1} f[\nu]z^{-\nu} \right]\end{aligned}$$

Vlastnosti \mathcal{Z} -transformace

Transformace částečné sumy

Theorem (Transformace částečného součtu)

Částečnou sumu posloupnosti $f[n]$ lze transformovat jako

$$\mathcal{Z} \left\{ \sum_{\nu=0}^n f[\nu] \right\} = \frac{z}{z-1} F(z)$$

$$\mathcal{Z} \left\{ \sum_{\nu=0}^{n-1} f[\nu] \right\} = \frac{1}{z-1} F(z)$$

Vlastnosti \mathcal{Z} -transformace

Transformace diferencí

Pro $m = 1, 2, \dots, \infty$ a diference m -tého řádu

$$\Delta^0 f[n] = f[n],$$

$$\Delta^1 f[n] = f[n+1] - f[n],$$

$$\Delta^2 f[n] = \Delta^1 [\Delta^1 f[n]] = f[n+2] - 2f[n+1] + f[n]$$

$$\Delta^m f[n] = \Delta^1 [\Delta^{m-1} f[n]]$$

platí tato věta o transformaci diferencí:

$$\mathcal{Z}\{\Delta^1 f[n]\} = (z - 1)F(z) - f[0]z$$

$$\mathcal{Z}\{\Delta^2 f[n]\} = (z - 1)^2 F(z) - f[0] z(z - 1) + \Delta^1 f[0]z$$

Vlastnosti \mathcal{Z} -transformace

Obraz konvoluce

Theorem (O konvoluci)

Je-li $F(z) = \mathcal{Z}\{f[n]\}$ a $G(z) = \mathcal{Z}\{g[n]\}$, pak pro diskrétní kovoluci obou posloupností platí

$$\mathcal{Z}\{f[n] * g[n]\} = \mathcal{Z}\left\{\sum_{m=0}^{\infty} f[n-m] \cdot g[m]\right\} = F(z) \cdot G(z)$$

Vlastnosti \mathcal{Z} -transformace

Derivace obrazu

Theorem (O derivaci obrazu)

Jednoduchá derivace obrazu $F(z)$ se na vzoru $f[n]$ projeví jako násobení proměnnou n :

$$\mathcal{Z}\{nf[n]\} = -z \frac{dF(z)}{dz}$$

Tabulka \mathcal{Z} -transformace

$f[n] = \mathcal{Z}^{-1}\{F(z)\}$	$F(z) = \mathcal{Z}\{f[n]\}$
$\delta[n]$	1
$\mathbf{1}[n]$	$\frac{1}{1 - z^{-1}}$
a^n	$\frac{1}{1 - a \cdot z^{-1}}$
n	$\frac{z^{-1}}{(1 - z^{-1})^2}$
$n \cdot a^{n-1}$	$\frac{z^{-1}}{(1 - az^{-1})^2}$