

Přenosová funkce diskrétních systémů

Stabilita diskrétních systémů

Modelování systémů a procesů (11MSP)

Bohumil Kovář, Jan Příklad

Ústav aplikované matematiky
ČVUT v Praze, Fakulta dopravní

11. přednáška 11MSP
středa 28. dubna 2021

verze: 2021-04-28 12:57

Obsah přednášky

① Přenos diskrétních systémů

Přenosová funkce

Definice

② Převod spojitého systému na diskrétní

③ Stabilita diskrétních systémů

④ Stavový popis diskrétních systémů

Přenosová funkce

Diferenční rovnice lineárního časově invariantního systému, za předpokladu nulových počátečních podmínek, tj. $y[n - k] = 0$ a $u[n - k] = 0$ pro $n - k < 0$, má tvar

$$\begin{aligned} a_N y[n - N] + a_{N-1} y[n - N + 1] + \dots + a_0 y[n] &= \\ &= b_M u[n - M] + b_{M-1} u[n - M + 1] + \dots + b_0 u[n] \end{aligned}$$

tedy

$$\sum_{k=0}^N a_k y[n - k] = \sum_{m=0}^M b_m u[n - m].$$

Přenosová funkce

Použijeme \mathcal{Z} -transformaci

$$\sum_{k=0}^N a_k \mathcal{Z} \{y[n - k]\} = \sum_{m=0}^M b_m \mathcal{Z} \{u[n - m]\}$$

a dostáváme algebraickou rovnici

$$\sum_{k=0}^N a_k z^{-k} \cdot Y(z) = \sum_{m=0}^M b_m z^{-m} \cdot U(z).$$

Přenosová funkce

Nyní můžeme snadno vyjádřit $Y(z)$ ve tvaru

$$Y(z) = \frac{\sum_{m=0}^M b_m z^{-m}}{\sum_{k=0}^N a_k z^{-k}} \cdot U(z)$$

$$Y(z) = H(z) \cdot U(z).$$

Připomeňme si, že mezi vstupem a výstupem v časové rovině platí vztah

$$y[n] = \sum_{m=0}^n h(n-m) \cdot u[n]$$

Přenosová funkce

Funkce $H(z) = \mathcal{Z} \{h[n]\}$ je **přenosová funkce** a má tvar racionální lomené funkce v proměnné z^{-1}

$$H(z) = \frac{\sum_{m=0}^M b_m z^{-m}}{\sum_{k=0}^N a_k z^{-k}} = \frac{Q(z)}{N(z)}$$

Obraz přechodové odezvy

Funkce $S(z) = \mathcal{Z} \{s[n]\}$ je obrazem přechodové odezvy a z přenosové funkce ji určíme snadno jako

$$S(z) = H(z) \cdot \mathcal{Z} \{ \mathbf{1}[n] \} = H(z) \frac{1}{1 - z^{-1}} = H(z) \frac{z}{z - 1}$$

Obsah přednášky

- 1 Přenos diskrétních systémů
- 2 Převod spojitého systému na diskrétní**
Dopředné diference
- 3 Stabilita diskrétních systémů
- 4 Stavový popis diskrétních systémů

Převod spojitého systému na diskrétní

Spojitý systém popsaný stavovými rovnicemi

$$\mathbf{x}'(t) = \mathbf{A} \mathbf{x}(t) + \mathbf{B} \mathbf{u}(t) \quad (1)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C} \mathbf{x}(t) + \mathbf{D} \mathbf{u}(t) \quad (2)$$

můžeme převést na ekvivalentní diskrétní systém tak, že čas t nahradíme diskrétními časovými okamžiky $t = nT$, kde T je vzdálenost mezi následujícími časovými okamžiky, neboli **perioda vzorkování**.

Převod spojitého systému na diskrétní

Všechny veličiny měříme pouze v čase $t = nT$ a proto

$$x(t) = x(nT) \rightarrow x[n],$$

$$y(t) = y(nT) \rightarrow y[n],$$

$$u(t) = u(nT) \rightarrow u[n].$$

Derivaci stavu $\mathbf{x}'(t)$ nahradíme v prvním přiblížení první diferencí

$$\mathbf{x}'(t) \approx \frac{\mathbf{x}(nT + T) - \mathbf{x}(nT)}{T} = \frac{1}{T} (\mathbf{x}[n + 1] - \mathbf{x}[n]).$$

Převod spojitého systému na diskrétní

Dosazením do původních spojitých stavových rovnic dostaneme po úpravě jejich diskrétní tvar

$$\begin{aligned}\mathbf{x}[n+1] &= (\mathbf{I} + T\mathbf{A})\mathbf{x}[n] + T\mathbf{B}\mathbf{u}[n] \\ \mathbf{y}[n] &= \mathbf{C}\mathbf{x}[n] + \mathbf{D}\mathbf{u}[n]\end{aligned}$$

resp.

$$\begin{aligned}\mathbf{x}[n+1] &= \mathbf{M}\mathbf{x}[n] + \mathbf{N}\mathbf{u}[n] \\ \mathbf{y}[n] &= \mathbf{C}\mathbf{x}[n] + \mathbf{D}\mathbf{u}[n]\end{aligned}$$

Obsah přednášky

- 1 Přenos diskrétních systémů
- 2 Převod spojitého systému na diskrétní
- 3 Stabilita diskrétních systémů**
 - Kritérium stability
 - Stabilní systém
 - Nestabilní systém
 - Mez stability
- 4 Stavový popis diskrétních systémů

Stabilita systému

Příklad na rovnici 2. řádu

Diferenční rovnice 2. řádu s konstantními koeficienty

$$y[n + 2] + a y[n + 1] + b y[n] = u[n]$$

má za **nulových počátečních podmínek** přenosovou funkci

$$H(z) = \frac{1}{z^2 + a z + b} = \frac{1}{(z - z_1)(z - z_2)}.$$

Poloha pólů přenosové funkce $H(z)$ rozhoduje o stabilitě systému.

Definice stability

BIBO stabilita systému

BIBO stabilita – bounded input bounded output

Odezva na omezený vstupní signál musí být vždy omezená – systém je BIBO stabilní.

Odezva systému je kombinací

- odezvy na vstupní signál
- odezvy na počáteční podmínky

Kritérium stability

- **Stabilní systém**

Všechny póly přenosové funkce $H(z)$ leží uvnitř jednotkové kružnice.

- **Nestabilní systém**

Alespoň jeden pól přenosové funkce $H(z)$ leží vně jednotkové kružnice nebo alespoň jeden násobný pól leží na jednotkové kružnici.

- **Mez stability**

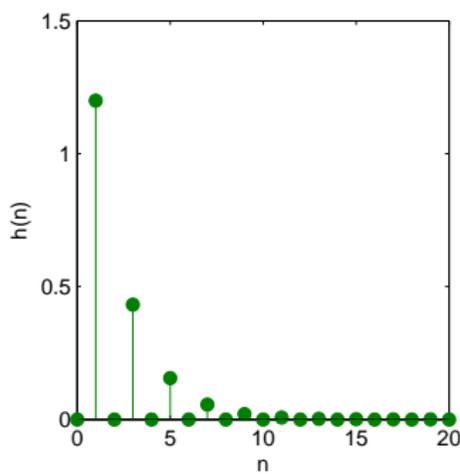
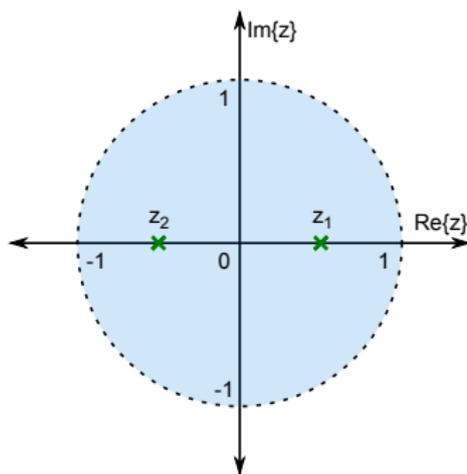
Alespoň jeden jednoduchý pól leží na jednotkové kružnici a žádný pól neleží vně kružnice. Případné násobné póly leží uvnitř.

Stabilita

Stabilní systém

$$h[n] = (0,5)^n - (-0,5)^n$$

$$H(z) = \frac{z}{z^2 - \frac{1}{4}} = \frac{z}{(z - \frac{1}{2})(z + \frac{1}{2})}$$

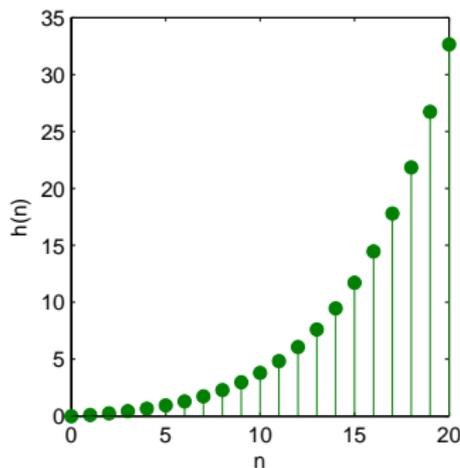
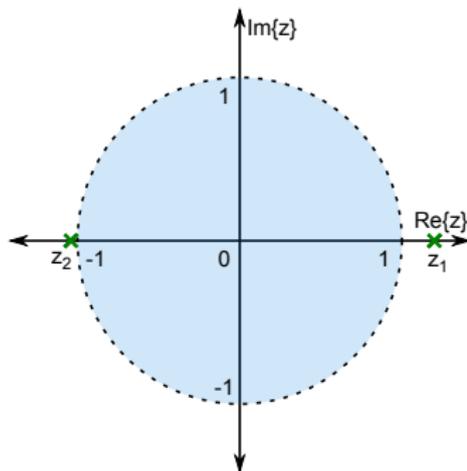


Stabilita

Nestabilní systém

$$h[n] = \left(\frac{6}{5}\right)^n - \left(-\frac{12}{11}\right)^n$$

$$H(z) = \frac{z}{z - \frac{6}{5}} - \frac{z}{z + \frac{12}{11}} = \frac{k}{\left(z - \frac{6}{5}\right)\left(z + \frac{12}{11}\right)}$$

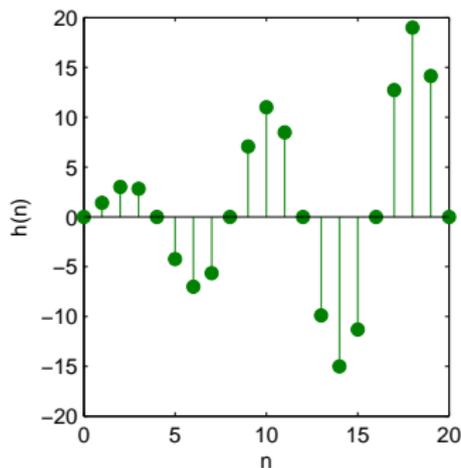
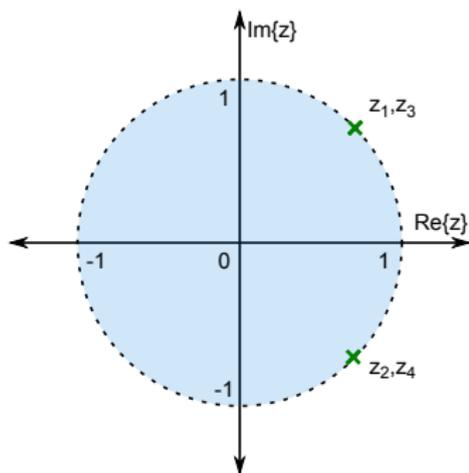


Stabilita

Nestabilní systém s násobnými póly

$$h[n] = (n + 1) \cdot \sin \frac{\pi}{4} n = \frac{1}{2} i (n + 1) \left[e^{-i \frac{\pi}{4} n} - e^{i \frac{\pi}{4} n} \right]$$

$$H(z) = \frac{\sqrt{2} z^3 - z^2}{(z^2 - \sqrt{2} z + 1)^2} = \frac{-\frac{1}{2} i \cdot z}{z - e^{\frac{\pi}{4} i}} + \frac{-\frac{1}{2} i \cdot z}{(z - e^{\frac{\pi}{4} i})^2} + \frac{\frac{1}{2} i \cdot z}{z - e^{-\frac{\pi}{4} i}} + \frac{\frac{1}{2} i \cdot z}{(z - e^{-\frac{\pi}{4} i})^2}$$

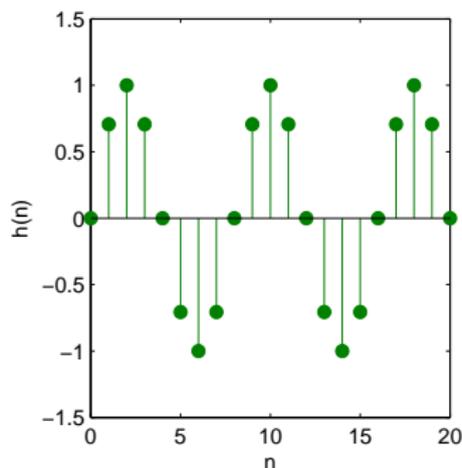
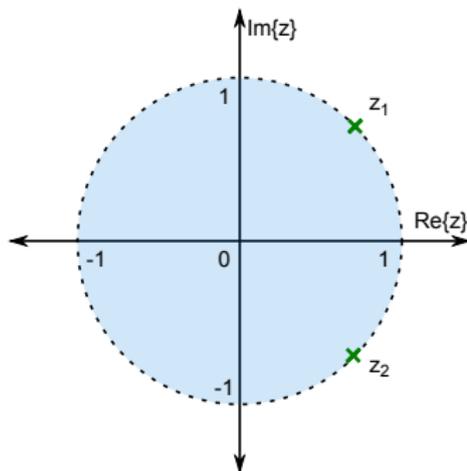


Stabilita

Mez stability s komplexně sdruženými póly

$$h[n] = \sin \frac{\pi}{4} n = \frac{1}{2}i \left[e^{-i\frac{\pi}{4}n} - e^{i\frac{\pi}{4}n} \right]$$

$$H(z) = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}z}{z^2 - \sqrt{2}z + 1} = \frac{-\frac{1}{2}i \cdot z}{z - e^{\frac{\pi}{4}i}} + \frac{\frac{1}{2}i \cdot z}{z - e^{-\frac{\pi}{4}i}}$$

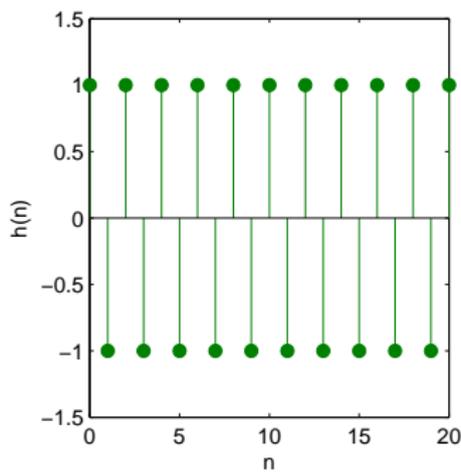
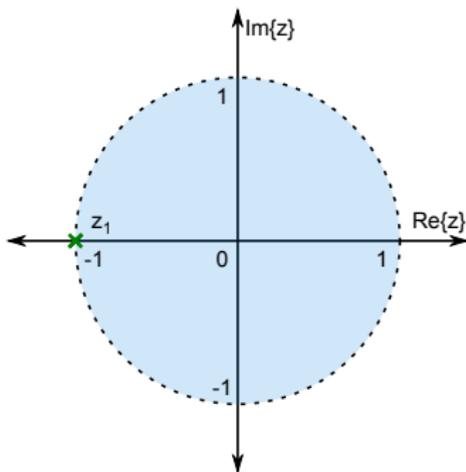


Stabilita

Mez stability s $(-1)^n$

$$h[n] = (-1)^n$$

$$H(z) = \frac{1}{1 + z^{-1}} = \frac{z}{z + 1}$$

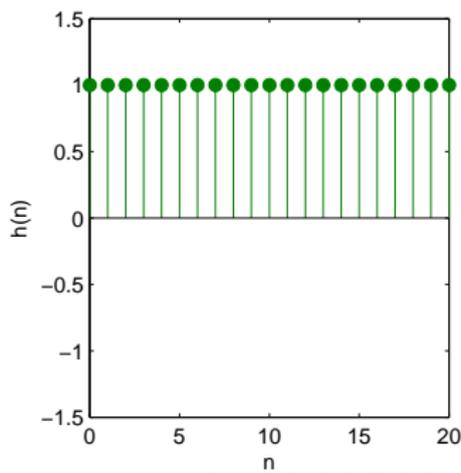
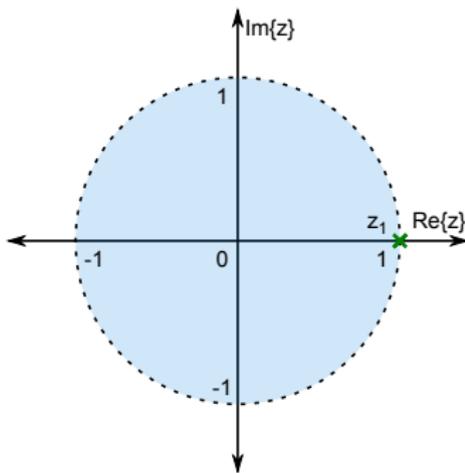


Stabilita

Mez stability s jednotkovým skokem

$$h[n] = (1)^n$$

$$H(z) = \frac{1}{1 - z^{-1}} = \frac{z}{z - 1}$$



Obsah přednášky

- 1 Přenos diskrétních systémů
- 2 Převod spojitého systému na diskrétní
- 3 Stabilita diskrétních systémů
- 4 Stavový popis diskrétních systémů**

Přenosová funkce

Přenosová funkce diskrétního systému

Příklad (1/3)

Nalezněte přenosovou funkci $H(z)$ diskrétního LTI systému popsaného stavovými rovnicemi

$$\begin{aligned}\mathbf{x}[n+1] &= \mathbf{M}\mathbf{x}[n] + \mathbf{N}\mathbf{u}[n] \\ \mathbf{y}[n] &= \mathbf{C}\mathbf{x}[n]\end{aligned}$$

- Uvažujte pouze jeden vstup a výstup.
- Při odvození použijte \mathcal{Z} -transformaci!
- Která matice ve stavovém popisu je rozhodující pro stabilitu řešení?

Přenosová funkce diskrétního systému

Příklad (2/3)

S pomocí vztahů pro \mathcal{Z} -transformaci transformujeme rovnice

$$\mathbf{x}[n + 1] = \mathbf{M} \mathbf{x}[n] + \mathbf{N} u[n]$$

$$y[n] = \mathbf{C} \mathbf{x}[n]$$

na

$$z(\mathbf{X}(z) - \mathbf{x}[0]) = \mathbf{M} \mathbf{X}(z) + \mathbf{N} U(z)$$

$$Y(z) = \mathbf{C} \mathbf{X}(z)$$

Přenosová funkce diskrétního systému

Příklad (3/3)

Protože přenosová funkce je definována pro $x[0] = 0$, obdržíme z první rovnice

$$\mathbf{X}(z) = (z\mathbf{I} - \mathbf{M})^{-1}\mathbf{N} U(z)$$

a dosazením do druhé rovnice je

$$Y(z) = \mathbf{C}(z\mathbf{I} - \mathbf{M})^{-1}\mathbf{N} U(z)$$

Přenosová funkce $H(z)$ je tedy

$$H(z) = \mathbf{C}(z\mathbf{I} - \mathbf{M})^{-1}\mathbf{N} = \mathbf{C} \frac{\text{adj}(z\mathbf{I} - \mathbf{M})}{\det(z\mathbf{I} - \mathbf{M})} \mathbf{N}$$