Cvičení 4 – Epidemie a konvoluce

Modelování systémů a procesů

Lucie Kárná

karna@fd.cvut.cz

March 16, 2021

1. Model epidemie
   - Kermack-McKendrickův SIR model
   - Model v Matlabu
2. Konvoluce
   - Spojitá konvoluce
   - Diskrétní konvoluce

Kermack-McKendrickův SIR model

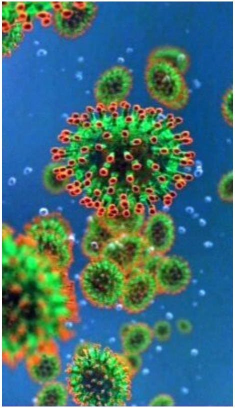
$S(t)$ vnímaví jedinci (**S**usceptible)
$I(t)$ nakažení jedinci (**I**nfected)
$R(t)$ jedinci mimo hru (**R**emoved)

Předpoklady

- uzavřená homogenní populace konstantní velikosti
- nulová inkubační doba
- infekční po celou dobu nemoci
- uzdravený jedinec je imunní

`http://mathworld.wolfram.com/Kermack-McKendrickModel.html`
`http://koronahra.cz`

Kermack-McKendrickův SIR model



Rovnice modelu

$$
\begin{aligned}
S'(t) &= -\alpha I(t)S(t) \\
I'(t) &= \alpha I(t)S(t) - \beta I(t) \\
R'(t) &= \beta I(t)
\end{aligned}
$$

α základní reprodukční konstanta (koeficient nakažlivosti)

β koeficient uzdravení

$1/\beta$ doba trvání nemoci

Epidemiologický práh

Z druhé rovnice vyjádříme: $I'(t) = I(t)(\alpha S(t) - \beta)$ počet infikovaných roste, pokud $\alpha S(t) - \beta > 0$

Reprodukční číslo $R(t) = \frac{\alpha S(t)}{\beta}$

- $R(t) > 1$: počet nemocných roste $\Rightarrow$ epidemie
- $R(t) < 1$: počet nemocných klesá

koeficient α zahrnuje jednak četnost setkávání, jednak vlastní nakažlivost nemoci – počet lidí, které nakazí jeden nemocný

- spalničky asi 15
- koronavirus SARS-CoV-2 cca $2,2$ (interval $1,4$–$3,8$; údaj pochází z března 2020)

Kermack-McKendrickův SIR model jako funkce

Argumenty funkce (vstupní parametry):

```
% alpha ... zakladni reprodukcni konstanta
% beta ... koeficient uzdraveni
% S0 ... pocatecni pocet vnimavych jedincu
% I0 ... pocatecni pocet infekcnich jedincu
% n ... pocet iteraci
```

Návratové hodnoty (výstupní parametry):

```
% S ... vnimavi jedinci (vektor - pocty po dnech)
% I ... infekcni jedinci (vektor - pocty po dnech)
% R ... uzdraveni jedinci (vektor - pocty po dnech)
```

Hlavička funkce:

```
function [S,I,R] = SIR(alpha,beta,S0,I0,n)
```

m-funkce

soubor SIR.m

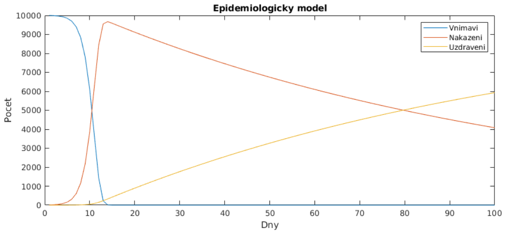
```
function [S,I,R] = SIR( alpha, beta, S0 ,I0, n)
S = zeros(1,n+1); % pocatecni hodnota + n iteraci
S(1) = S0;
I = zeros(1,n+1);
I(1) = I0;
R = zeros(1,n+1); % R0 = 0

for j = 1:n
S(j+1) = S(j) - alpha*I(j)*S(j);
I(j+1) = I(j) + alpha*I(j)*S(j) - beta*I(j);
R(j+1) = R(j) + beta*I(j);
end end
```

Volání funkce

Funkci voláme z *Command Window* např. takto:

```
» [S,I,R] = SIR(3e-5, 0.07, 10000, 5, 60);
» A = [ S' I' R' ];
» plot(A);
» title('Epidemiologicky model');
» xlabel('Dny');
» ylabel('Pocet');
» legend('Vnimavi' ,'Nakazeni', 'Uzdraveni');
```



Spojitá konvoluce

$f(t), g(t)$ ... reálné funkce

Konvoluce funkcí $f(t)$ a $g(t)$

$$(f * g)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) g(t - \tau) \, \mathrm{d}\tau$$

Konvoluce dvou reálných funkcí je opět reálná funkce.

Pozor!

Konvoluce $f * g$ nemá nic společného se součinem $f \cdot g$!

Výpočet spojité konvoluce

Příklad 1

$$f(t) = 2t + 3,$$
$$g(t) = \cos t \text{ pro } t \in < -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} >, \text{ jinak nula.}$$

$$(f * g)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)g(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\tau\big(2(t-\tau)+3\big)\,\mathrm{d}\tau = \cdots$$

Integrujeme *per partes* - pozor, derivujeme/integrujeme podle τ:

$$\cdots = \Big[\big(2(t-\tau)+3\big)\Big]_{\tau=-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} + 2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin\tau\,\mathrm{d}\tau = \cdots = 4t+6$$

Diskrétní konvoluce

$f[n], g[n]$ ... posloupnosti reálných čísel

Konvoluce posloupností $f[n]$ a $g[n]$

$$(f * g)[n] = \sum_{i=-\infty}^{\infty} f[n-i] \cdot g[i]$$

Konvoluce dvou posloupností je opět posloupnost.

Příklad 2

Spočtěte konvoluci (obecné) posloupnosti $f[n]$ s posloupností

$$g[n] = \delta[n-2], \text{ t. j. } g[n] = 1 \quad \text{pro } n = 2,$$
$$= 0 \quad \text{pro } n \neq 2.$$

$$(f * g)[n] = \sum_{i=-\infty}^{\infty} f[n-i] \cdot g[i] = f[n-2]$$

$\Rightarrow$ výsledkem je posloupnost f posunutá o 2 doprava

Klouzavý průměr

Příklad 3

Spočtěte konvoluci (obecné) posloupnosti $f[n]$ s posloupností

$$g[n] = \frac{1}{3} \text{ pro } n = 0, \ldots, 2$$
$$= 0 \text{ jinak.}$$

$$(f * g)[n] = \sum_{i=-\infty}^{\infty} f[n-i] \cdot g[i] = \sum_{i=0}^{2} f[n-i] \cdot \frac{1}{3} =$$
$$= \frac{1}{3}\left(f[n] + f[n-1] + f[n-2]\right)$$

$\Rightarrow$ každý prvek výsledné posloupnosti je aritmetický průměr tří po sobě následujících prvků posloupnosti f


The End