Cvičení 11 – Stabilita spojitých systémů

Modelování systémů a procesů

Lucie Kárná

karna@fd.cvut.cz

April 23, 2018

1. Přenosová funkce
2. Stabilita spojitých systémů
   - Stabilní systém
   - Nestabilní systém
   - Mez stability
   - Vnitřní popis

Opakování z přednášky: přenosová funkce

Definice přenosové funkce

$$H(p) = \frac{Y(p)}{U(p)}$$

za nulových počátečních podmínek

vztah přenos – impulsní odezva

$$h(t) = \mathcal{L}^{-1}\{H(p)\}$$

vztah vstupu a výstupu

$$y(t) = u(t) * h(t)$$

Opakování z přednášky: určení přenosové funkce z diferenciální rovnice vnějšího popisu

- LTI systém:

$$\sum_{k=0}^{n} a_k y^{(k)}(t) = u(t)$$

- nulové počáteční podmínky: $y^{(k)}(0) = 0 \ \forall k$
- po Laplacově transformaci:

$$\sum_{k=0}^{n} a_k p^k Y(p) = U(p)$$

- po úpravě:

$$H(p) = \frac{Y(p)}{U(p)} = \frac{1}{\sum a_k p^k}.$$

Opakování z přednášky: princip superpozice

odezva LTI systému	=	**přechodová složka** odezva na počáteční podmínky	+	**ustálená složka** odezva na vstupní signál

Příklad 1: přenos obecného systému druhého řádu

Zadání:

Nalezněte přenosovou funkci a impulsní odezvu systému

$$y''(t) + 4\,y'(t) + 13\,y(t) = u(t)$$

s počátečními podmínkami

$$y(0) = c_0 \quad \text{a} \quad y'(0) = c_1$$

Příklad 1 – řešení

- rovnice

$$y''(t) + 4\,y'(t) + 13\,y(t) = u(t)$$

- Laplaceova transformace:

$$p^2\,Y(p) - pc_0 - c_1 + 4\,(p\,Y(p) - c_0) + 13\,Y(p) = U(p)$$

- …po úpravě

$$Y(p) = \frac{U(p) + c_1 + (p+4)c_0}{p^2 + 4p + 13} = \frac{U(p)}{p^2 + 4p + 13} + \frac{c_1 + (p+4)c_0}{p^2 + 4p + 13}$$

$$= \text{ustálená složka} + \text{přechodová složka}$$

Příklad 1 – přenosová funkce

- …

$$Y(p) = \frac{U(p)}{p^2 + 4p + 13} + \frac{c_1 + (p+4)c_0}{p^2 + 4p + 13}$$

- nulové počáteční podmínky $c_0 = 0, c_1 = 0$:

$$Y(p) = \frac{U(p)}{p^2 + 4p + 13}$$

Přenosová funkce

$$H(p) = \frac{Y(p)}{U(p)} = \frac{1}{(p^2 + 4\,p + 4) + 9} = \frac{1}{(p+2)^2 + 9}$$

Příklad 1 – impulsní odezva

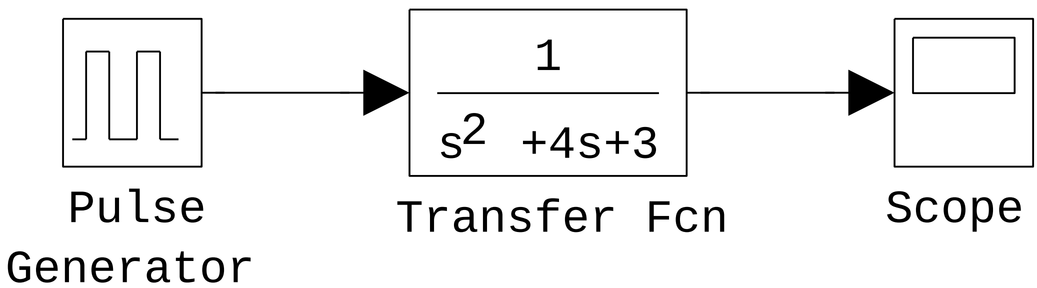
Přenosová funkce

$$H(p) = \frac{1}{(p+2)^2 + 9}$$

Impulsní odezva = inverzní Laplaceova transformace přenosové funkce

$$h(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{H(p)\right\} = \frac{1}{3} \cdot e^{-2t} \sin 3t.$$

Blok Transfer Fcn



- Numerator coeff. = koeficienty čitatele
- Denominator coeff. = koeficienty jmenovatele

Stabilita spojitých systémů

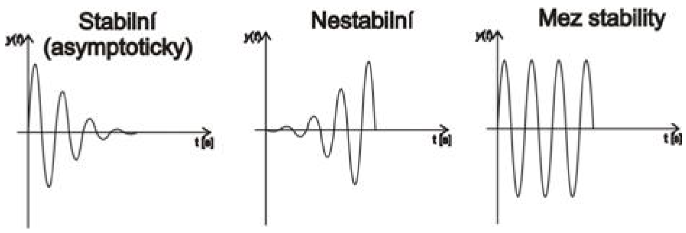
- **(Asymptoticky) stabilní LTI systém:** pro impulsní odezvu platí

$$\lim_{t\to\infty} h(t) = 0.$$

- **Nestabilní systém:**

$$\lim_{t\to\infty} |h(t)| = \infty.$$

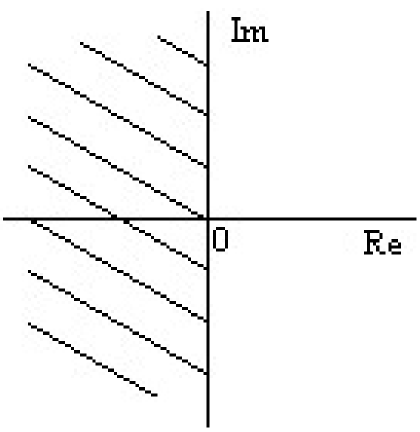
- **Systém na mezi stability (metastabilní):** $\lim_{t\to\infty} h(t) = c \neq 0$, nebo limita neexistuje (např. periodická funkce).

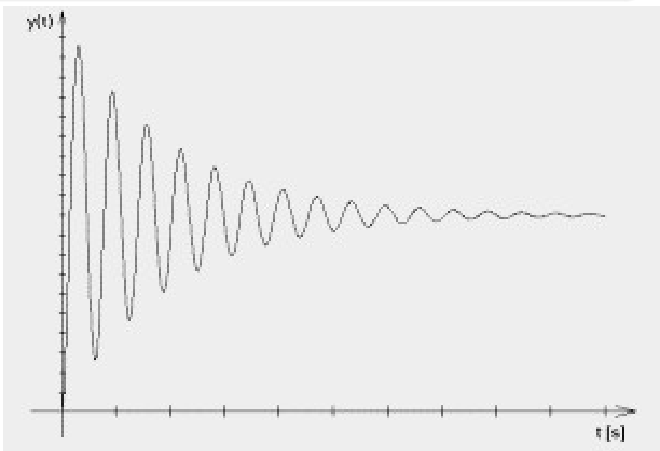


Stabilní systém

Stabilní spojitý LTI systém

Všechny póly přenosové funkce $H(p)$ stabilního systému leží v levé části p-roviny (jejich reálná část je záporná).

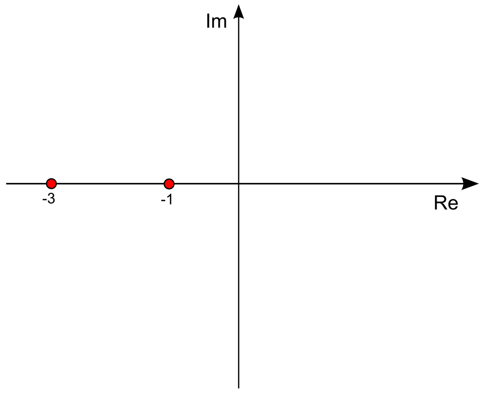




Příklad 2 – jednoduché póly

Spojitý systém 2. řádu má přenosovou funkci

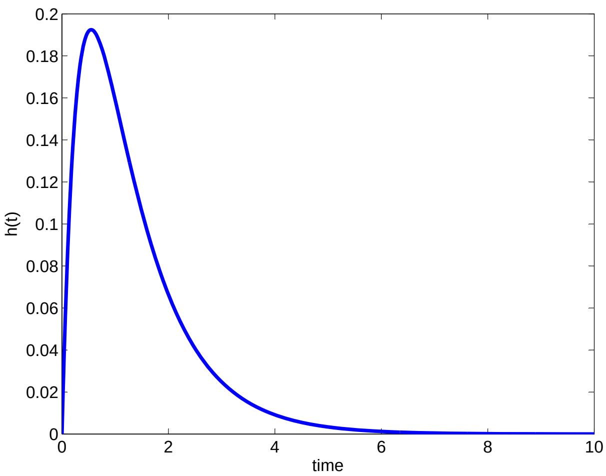
$$H(p) = \frac{1}{p^2 + 4p + 3} = \frac{1}{(p+1)(p+3)}.$$



Póly přenosové funkce $p_1 = -1$ a $p_2 = -3$ leží v levé části p-roviny $\Rightarrow$ stabilní systém

Příklad 2 – impulsní odezva

$$h(t) = \mathcal{L}^{-1}\{H(p)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{k_1}{p+1} + \frac{k_2}{p+3}\right\} = \frac{1}{2}e^{-t} - \frac{1}{2}e^{-3t}.$$



Příklad 3 – komplexně sdružené póly

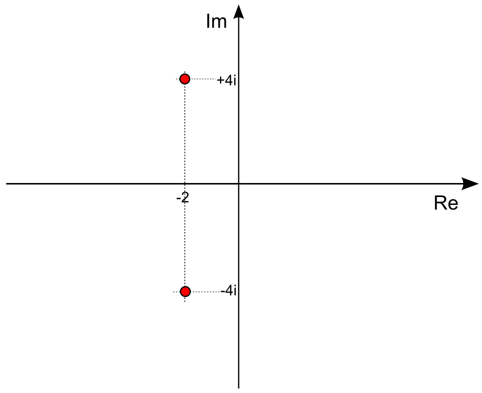
Spojitý systém 2. řádu má přenosovou funkci

$$H(p) = \frac{1}{p^2 + 4p + 20}.$$

Jeden pár komplexně sdružených pólů

$$p_{1,2} = -2 \pm 4i$$

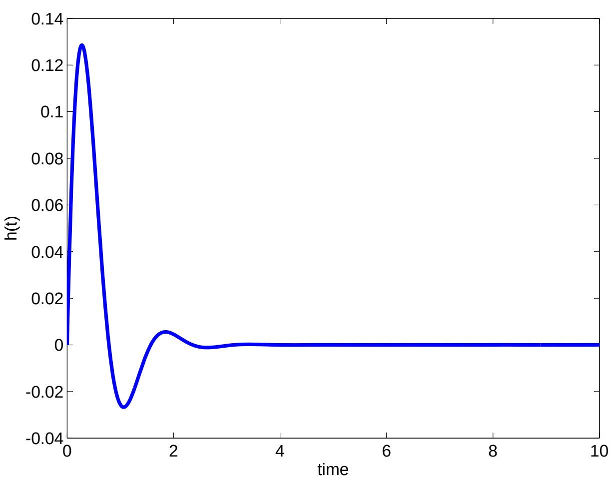
s reálnou částí v levé části p-roviny $\Rightarrow$ stabilní systém



Příklad 3 – impulsní odezva

$$h(t) = \mathcal{L}^{-1}\{H(p)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{p^2 + 4p + 20}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{4}\frac{4}{(p+2)^2 + 16}\right\} = \dots$$

$$\dots = \frac{1}{4}e^{-2t}\sin(4t).$$



Zpět k příkladu 1 – dokončení

Přenosová funkce:

$$H(p) = \frac{1}{(p^2 + 4\,p + 4) + 9} = \frac{1}{(p+2)^2 + 9}$$

má póly

$$p_1 = -2 + 3i,$$
$$p_2 = -2 - 3i.$$

Pro stabilitu systému jsou rozhodující $\Re(p_1) = \Re(p_2) = -2$, systém je stabilní.

Nestabilní systém

Nestabilní spojitý LTI systém

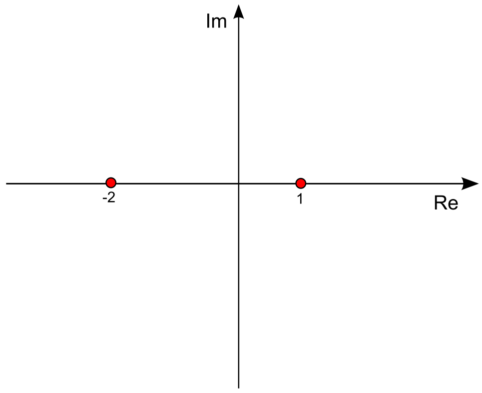
Nestabilní spojitý LTI systém splňuje jedno z následujících kritérií:

- alespoň jeden pól přenosové funkce $H(p)$ leží v pravé části p-roviny (jeho reálná část je kladná), nebo
- přenosová funkce $H(p)$ má násobné póly na imaginární ose.

Příklad 4

Spojitý LTI systém 2. řádu má přenosovou funkci

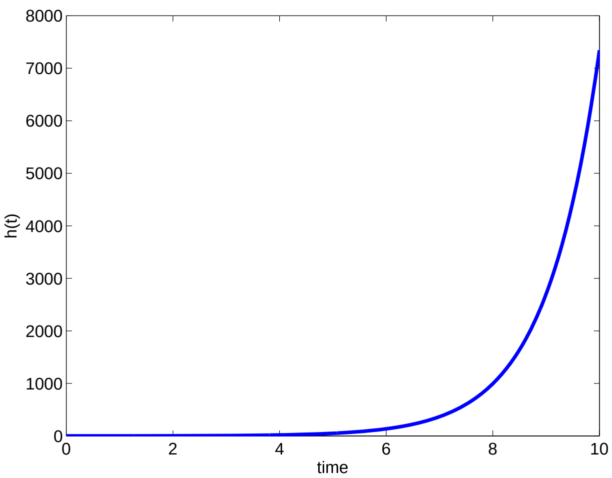
$$H(p) = \frac{1}{p^2 + p - 2} = \frac{1}{(p+2)(p-1)}.$$



jeden z pólů přenosové funkce, $p_2 = 1$ leží v pravé části p-roviny $\Rightarrow$ nestabilní systém

Příklad 4 – impulsní odezva

$$h(t) = \mathcal{L}^{-1}\{H(p)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{k_1}{p+2} + \frac{k_2}{p-1}\right\} = -\frac{1}{3}e^{-2t} + \frac{1}{3}e^{t}.$$



Příklad 5 – násobný pól v nule

Spojitý LTI systém 2. řádu má přenosovou funkci

$$H(p) = \frac{1}{p^3 + p^2} = \frac{1}{p^2(p+1)}.$$

dvojnásobný pól přenosové funkce $p_1 = p_2 = 0$
leží na imaginární ose $\Rightarrow$ nestabilní systém.

$$H(p) = \frac{1}{p^2(p+1)} = \frac{1}{p^2} - \frac{1}{p} + \frac{1}{p+1}$$

$$h(t) = \mathcal{L}^{-1}\{H(p)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{p^2} - \frac{1}{p} + \frac{1}{p+1}\right\} = t - \mathbf{1}(t) + e^{-t}.$$

Úloha 1

Spojitý LTI systém 2. řádu má přenosovou funkci

$$H(p) = \frac{1}{p^2 - 4p + 5}.$$

Určete

- póly přenosové funkce,
- (ne)stabilitu systému,
- impulsní odezvu $h(t) = \ldots$

Namodelujte impulsní odezvu (= odezva na $\delta(t)$) v Simulinku

Metastabilní systém

Spojitý LTI systém na mezi stability (metastabilní systém)

Metastabilní spojitý LTI systém splňuje následujících kritérium:

- žádný pól přenosové funkce $H(p)$
  neleží v pravé části p-roviny (všechny mají nekladnou reálnou část),
  a zároveň
- alespoň jeden pól přenosové funkce $H(p)$
  leží na imaginární ose (je ryze imaginární – má nulovou reálnou část),
  a zároveň
- póly ležící na imaginární ose nejsou násobné.

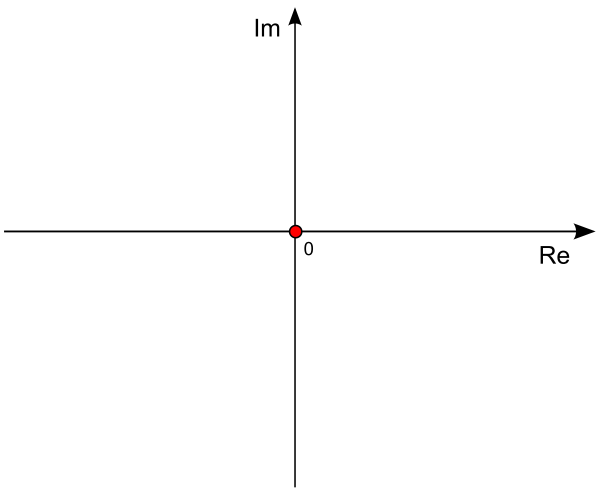
Příklad 6 – pól v nule

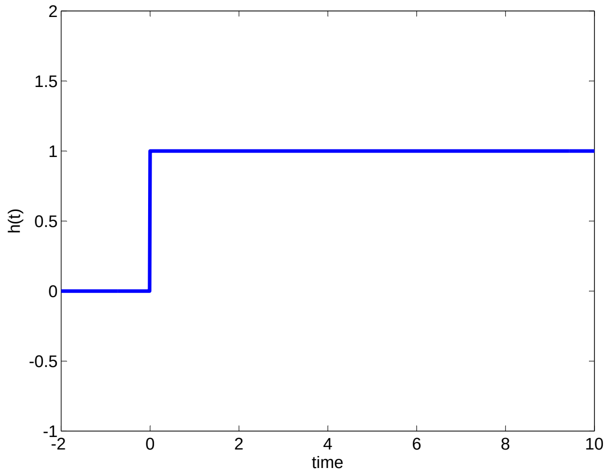
Spojitý LTI systém 1. řádu má přenosovou funkci

$$H(p) = \frac{1}{p}.$$

Jediný pól přenosové funkce je $p = 0 \Rightarrow$ systém na mezi stability.

$$h(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{H(p)\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{p}\right\} = \mathbf{1}(t).$$





Úloha 2

Přesvědčte se, že přenosová funkce s násobným pólem na imaginární ose vede na nestabilní systém. Např.

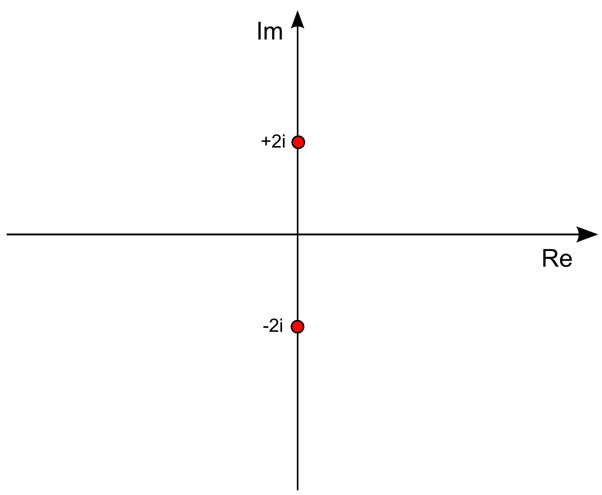
$$H(p) = \frac{1}{p^2}.$$

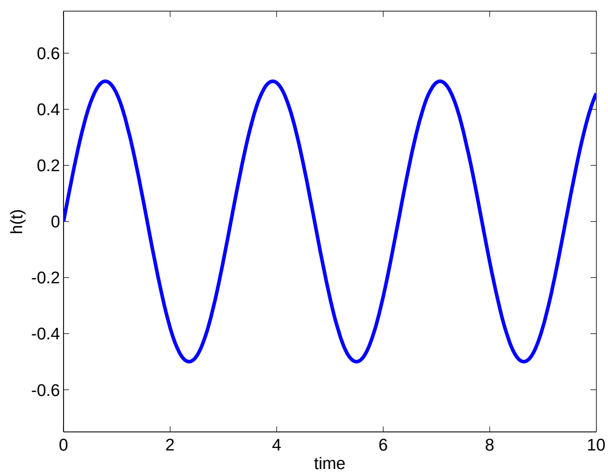
Příklad 7 - komplexně sdružené póly na imaginární ose

Spojitý LTI systém 2. řádu má přenosovou funkci

$$H(p) = \frac{1}{p^2 + 4}.$$

$$h(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{H(p)\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{2}\frac{2}{p^2 + 2^2}\right\} = \frac{1}{2}\sin 2t.$$





Přenosová funkce vnitřního popisu

Přenosová funkce je u vnitřního popisu dána vztahem

$$H(p) = \mathbf{C}\,(p\,\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D}.$$

Pro stabilitu systému je rozhodující matice **A**, respektive

$$\det(p\,\mathbf{I} - \mathbf{A}).$$

Příklad 8

Vnější popis

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}y(t) + 4\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}y(t) + 20\,y(t) = u(t).$$

$\Rightarrow$ přenosová funkce

$$H(p) = \frac{1}{p^2 + 4p + 20}.$$

Příklad 8 – pokračování

Převedení do vnitřního popisu

$$x_1(t) = y(t)$$
$$x_2(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} y(t) \qquad \Rightarrow \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -20 & -4 \end{bmatrix}$$

$$p\mathbf{I} - \mathbf{A} = \begin{bmatrix} p & -1 \\ 20 & p+4 \end{bmatrix} \Rightarrow \det(p\,\mathbf{I} - \mathbf{A}) = p^2 + 4p + 20.$$

Polynom $p^2 + 4p + 20$ je charakteristický polynom systému,
jeho kořeny jsou póly přenosové funkce.