JAN PŘIKRYL
BOHUMIL KOVÁŘ
MIROSLAV VLČEK

MODELOVÁNÍ SYSTÉMŮ A PROCESŮ

ÚSTAV APLIKOVANÉ MATEMATIKY
ČVUT FD

Copyright © 2015 Jan Přikryl, Bohumil Kovář, Miroslav Vlček

VYDAL ÚSTAV APLIKOVANÉ MATEMATIKY, ČVUT FD

TUFTE-LATEX.GOOGLECODE.COM

Licensed under the Apache License, Version 2.0 (the "License"); you may not use this file except in compliance with the License. You may obtain a copy of the License at http://www.apache.org/licenses/LICENSE-2.0. Unless required by applicable law or agreed to in writing, software distributed under the License is distributed on an "AS IS" BASIS, WITHOUT WARRANTIES OR CONDITIONS OF ANY KIND, either express or implied. See the License for the specific language governing permissions and limitations under the License.

První vydání, únor 2015

Obsah

Úvod 1

I Matematické modelování systémů 3

1 *Úvod do matematického modelování systémů* 5

1.1 *Matematické modelování systémů* 5

1.2 *Iterace diferenční rovnice* 13

2 *Úvod do teorie signálů* 15

2.1 *Základní spojité signály* 15

2.2 *Základní diskrétní signály* 17

2.3 *Odezva systému* 19

3 *Popis systémů* 27

3.1 *Vnější popis systému* 27

3.2 *Vnitřní popis systému* 27

3.3 *Příklady na stavový popis dynamických systémů* 28

3.4 *Vnější a vnitřní popis systému* 32

3.5 *Příklad* 34

3.6 *Diskrétní systémy* 35

3.7 *Příklad stavového modelu z reálného světa* 37

II Matematické nářadí 39

4 *Fourierova transformace* 41

5 *Laplaceova transformace* 43

5.1 *Dopředná Laplaceova transformace* 43

5.2 *Příklady použití Laplaceovy transformace* 49

5.3 *Zpětná Laplaceova transformace* 51

5.4 *Příklad použití zpětné Laplaceovy transformace* 56

5.5 *Zpětná Laplaceova transformace* 57

5.6 *Zpětná Laplaceova transformace – příklady* 59

5.7 *Přenosová funkce a vnitřní popis* 61

5.8 *Inverzní matice* 62

5.9 *Vyšetřování stability spojitých systémů* 64

5.10 *Vnější popis* 64

5.11 *Vnitřní popis* 68

5.12 *Vyšetření stability obecného systému druhého řádu* 69

6 *$\mathcal{Z}$-transformace* 73

6.1 *Matematické nářadí* 73

6.2 *Dopředná $\mathcal{Z}$-transformace* 73

6.3 *Inverzní $\mathcal{Z}$-transformace* 80

6.4 *Příklady použití* 82

III Jednoduché aplikace 87

7 *Analýza LTI systémů* 89

7.1 *Přenos* 89

7.2 *Diskretizace* 90

7.3 *Stabilita* 91

7.4 *Stavový popis* 93

8 *Spojování systémů* 95

8.1 *Spojování systémů* 95

Literatura 99

Rejstřík 101

Seznam obrázků

1.1 Hierarchie modelů – analogie se světem zvířat 6

1.2 Vstup a výstup systému 8

1.3 Tvorba matematického modelu 8

1.4 Problémy při tvorbě modelu 9

1.5 Klenba Gaudího katedrály Sagrada Familia v Barceloně 9

1.6 Model klenby pro ověření statiky stavby, sestavený z provázků a plátěných pytlíčků s pískem 9

1.7 Virtuální crashtest první generace VW Polo 10

1.8 RC článek 12

1.9 Výstup RC článku 13

1.10 Pavučinkový diagram – variace ceny 13

1.11 Obecná závislost závislosti ceny P na poptávce Q. Převzato z Wikipedie 13

1.12 Dosadíme toto řešení do rovnic pro nabídku a poptávku a získáme pavučinkový diagram 14

2.1 Konečná reprezentace $\delta_\epsilon(t)$ pro $\epsilon > 0$ 15

2.2 Jednotkový skok 16

2.3 Jednotkový skok 16

2.4 Reálná exponenciála a) pro $\alpha > 0$, b) pro $\alpha < 0$. 16

2.5 Sinusový signál 17

2.6 Diskrétní jednotkový impuls a posunutý jednotkový impuls. 18

2.7 Diskrétní jednotkový skok a posunutý jednotkový skok. 18

2.8 Diskrétní sinusová posloupnost 18

2.9 Diskrétní LTI systém, jeho vstupní a výstupní posloupnost 19

2.10 Superpozice odezvy $y[n]$ jako $\sum_{k=0} nu[k]h[n-k]$ 22

2.11 Animovaný obrázek výpočtu konvoluce dvou signálů. Funguje pouze v prostředí Adobe Reader, jinde uvidíte prázdno 24

3.1 Vnější popis obecného diskrétního systému 27

3.2 Vnější popis obecného spojitého systému 27

3.3 Blokové schéma spojitého LTI systému 29

3.4 Blokové schéma diskrétního LTI systému 29

3.5 Model cykloidy v Simulinku 29

3.6 Cykloida vznikne odvalováním bodu ve vzdálenosti d od středu kružnice s poloměrem a 30

3.7 Model typu predator-prey (ovce-vlci) implementovaný v Simulinku 31

3.8 Vývoj populací vlků a oveček s parametry $x_1(0) = 80$, $x_2(0) = 4$, $a = 0{,}2$, $b = 0{,}006$, $c = 0{,}2$, $d = 0{,}003$ 31

3.9 Vývoj populací rysů a sněžných zajíců v Kanadě 31

3.10 Dva vozíky diskutované v příkladu 17 34

3.11 Model jednotlivého ročníku fakulty 38

5.1 Oliver Heaviside, 1850-1925 44

5.2 Časově-kmitočtové rozlišení 44

5.3 RC článek, viz první přednáška 49

5.4 Průběh napětí na výstupu RC článku v závislosti na hodnotě počátečního stavu, tedy zbytkového napětí $y(0) = 0\,\mathrm{V}$ (modře) a $y(0) = 4\,\mathrm{V}$ (červeně) 50

5.5 Impulsní odezva systému z příkladu 27 50

5.6 Impulsní odezva 58

5.7 Přechodová odezva 59

5.8 Průběh funkce $\cos^3 at$ pro $a = \pi/2$ 59

5.9 Spojitý stavový model 62

5.10 Odpružené zavěšení kola. Vibrace z vozovky, dané $u(t)$ pohlcuje jednak pneumatika, jednak odpružený závěs kola s tlumičem 63

5.11 Příklad 37 – poloha pólů přenosové funkce stabilního spojitého LTI systému a jeho impulsní odezva 65

5.12 Příklad 38 – poloha pólů přenosové funkce stabilního spojitého LTI systému s komplexně sdruženými póly a jeho impulsní odezva 65

5.13 Příklad 40 – poloha pólů přenosové funkce netabilního spojitého LTI systému a jeho impulsní odezva 66

5.14 Příklad 42 – poloha pólů přenosové funkce nestabilního spojitého LTI systému s dvojnásobným komplexně sdruženým ryze imaginárním pólem a jeho impulsní odezva 67

5.15 Příklad 44 – poloha pólu přenosové funkce spojitého systému 1. řádu na mezi stability a jeho impulsní odezva 67

5.16 Příklad **??** – poloha pólu přenosové funkce spojitého systému 2. řádu na mezi stability a jeho impulsní odezva 68

6.1 Vzorkování spojité funkce s periodou $T = 1\text{s}$ 74

6.2 Výsledek simulace rovnice nabídky a poptávky vede na pavoučkový diagram, ukazující závislost nabídka-cena a poptávka-cena 84

6.3 Vývoj nabídky a poptávky po jednotlivých iteracích 84

8.1 Kaskádní zapojení dvou subsystémů 95

8.2 Paralelní zapojení dvou subsystémů 95

8.3 Zpětnovazební zapojení dvou subsystémů se zápornou zpětnou vazbou. Přenos přímé větve je $H_1(p)$, přenos rozpojené zpětnovazební smyčky je $H_1(p) \cdot H_2(p)$. 95

8.4 Plovákový ventil udržující stálou hladinu kapaliny v nádrži. Převzato z Wikipedie 97

8.5 Wattův odstředivý regulátor rychlosti. Převzato z Wikipedie 97

Úvod

■ sem případně připsat něco na úvod ...[JP] ■

Cílem předmětu *Modelování systémů a procesů* je seznámit posluchače se základními teoretickými poznatky a postupy, které jsou nezbytné pro matematické modelování jevů v dopravě. Předmět je základním stavebním kamenem navazujících předmětů, které se zabývají teorií řízení, identifikací parametrů systému či modelováním stochastických systémů a procesů.

Problematika modelování systémů a procesů je velmi rozsáhlá. Tento text se proto soustřeďuje zejména na oblast modelování lineárních a časově invariantních (LTI) spojitých a diskrétních systémů, pro které lze využít matematické transformace – Laplaceovu transformaci a $\mathcal{Z}$-transformaci. Tyto transformace převádějí diferenciální a diferenční rovnice na rovnice algebraické, s jejichž pomocí lze definovat LTI systém v podobě přenosové funkce. Z tvaru přenosové funkce lze již stanovit základní vlastnosti systému, jako je například *stabilita systému*, jeho *kmitočtové charakteristiky*, impulsní a přechodová odezva a podobně.

Část I

Matematické modelování systémů

1 Úvod do matematického modelování systémů

1.1 Matematické modelování systémů

Co je to vlastně matematické modelování?

Modely vždy nějakým způsobem popisují naše přesvědčení o tom, jak svět funguje. Modely nás provázejí od nepaměti: například obyčejná mapa je vlastně dvourozměrný model našeho pohledu na krajinu; architekti často studují tvary plánovaných budov na jejich zmenšeninách ze sádry a dřeva, aby zjistili, jak bude objekt působit po zasazení do krajiny. Modely jsou většinou zjednodušením reality, postihují jen to, co nás pro studium daného problému opravdu zajímá. Pro nás nepodstatné detaily model zanedbává (u mapy to například mohou být různé malé detaily, u architektonického modelu potom vnitřní vybavení místností budovy).

V matematickém modelování tato přesvědčení o fungování světa překládáme do jazyka matematiky. To má řadu výhod:

1. *Matematika je velmi přesný jazyk.* Tato přesnost nám pomáhá formulovat myšlenky a identifikovat základní předpoklady pro vytvářený model.
2. *Matematika je výstižný jazyk s dobře definovanými pravidly* pro manipulaci s výrazy.
3. Všechny výsledky, které matematici dokázali v průběhu minulých stovek let, *jsou nám k dispozici* a můžeme je pro náš model využít.
4. K provedení numerických výpočtů *můžeme dnes použít počítače*.

Hned na úvod je vhodné zdůraznit, že značnou část matematického modelování tvoří kompromisy. Většina systémů, jež na sebe v reálném světě působí, je totiž příliš složitých na to, abychom je mohli modelovat v plném rozsahu a mnohdy to ani není možné, protože potřebné jemné detaily fungování modelovaného systému ani neznáme. Proto je prvním stupněm kompromisu snaha *identifikovat nejdůležitější části systému* – ty budou do modelu zahrnuty, zbytek bude zanedbán.

Druhá úroveň kompromisu se týká množství matematických operací, které má smysl při modelování provádět: I když matematika má potenciál v naprosté obecnosti dokázat různé výsledky, tyto výsledky závisí kriticky na formě použitých rovnic. Malé změny ve struktuře rovnic přitom mohou vyžadovat obrovské změny v matematických metodách. Použijeme-li k manipulaci s rovnicemi vytvářeného modelu počítač, nemusí to sice vést k elegantním výsledkům, ale je to mnohem odolnější vůči změnám. ■ **vůči změnám? tenhle konec je nesrozumitelný** ■

1.1.1 *Jaké cíle může modelování dosáhnout?*

Pro použití matematického modelu je v praxi celá řada různých důvodů a model používáme jako prostředek k dosažení různých cílů. Jak dobře je přitom nějakého určitého cíle dosaženo, to závisí jak na stavu našich znalostí o modelovaném systému, tak i na tom, jak dobře tento systém modelujeme.

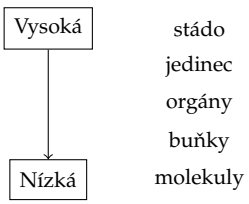
Příklady řady cílů jsou:

1. *Rozvoj vědeckého poznání* – prostřednictvím kvantitativního vyjádření současných znalostí o systému (stejně jako znázornit to, co víme, můžeme také ukázat, co nevíme);
2. *Testování* vlivu změn v systému
3. Získat *informace pro podporu rozhodování*, včetně
   (a) taktických rozhodnutí manažerů
   (b) strategický rozhodnutí plánovačů

1.1.2 *Klasifikace modelů*

Při studiu modelů je užitečné identifikovat hlavní kategorie modelů. Klasifikace jednotlivých modelů do těchto kategorií nám okamžitě řekne některé základní informace o jejich struktuře. Jedno rozdělení modelů je založeno na typu výsledku, který předpovídají. **Deterministické modely** ignorují náhodné variace a vždy tak predikují stejný výsledek z daného výchozího bodu. Na druhou stranu může mít model více statistickou povahu a může predikovat statistické rozdělení pravděpodobnosti možných výsledků. O takových modelech říkáme, že jsou **stochastické**.

Druhý přístup k rozlišování mezi typy modelů uvažuje míru pochopení reálného světa, na níž je model založen. Nejjednodušší vysvětlení uvažuje hierarchii organizačních struktur v rámci systému, který je modelovaný. Jedna taková hierarchie u zvířat je znázorněna na obrázku 1.1.



Obrázek 1.1: Hierarchie modelů – analogie se světem zvířat

Model, který využívá velké množství teoretických informací, obecně popisuje, co se děje na jedné úrovni hierarchie tím, že uva-

žuje procesy na nižších úrovních Jedná se o tzv. **mechanistické modely**, protože berou v úvahu mechanismy, prostřednictvím nichž dochází ke změnám. Naproti tomu u **empirických modelů** se nepřihlíží k mechanismu, jímž dochází ke změnám v systému. Namísto toho se pouze zaznamená, že ke změnám došlo, a model se snaží kvantitativně vysvětlit změny spojené s různými podmínkami.

Obě rozdělení, uvedená výše, tedy deterministický / stochastický a mechanistický / empirický, představují extrémy v rozsahu typů modelů. Mezi nimi leží celá škála typů modelů. Tyto dva přístupy ke klasifikace se navíc vzájemně doplňují. Deterministický model může být například mechanistický nebo empirický (ale ne stochastický). Příklady čtyř širokých kategorií modelů vyplývajících z výše uvedené metody klasifikace jsou uvedeny v tabulce 1.1.

	Empirický	**Mechanistický**
Deterministický	Předpověď růstu dobytka z *regresní závislosti* na konzumaci potravy	Pohyb planet založený na Newtonovské mechanice, popsané *diferenciálními rovnicemi*
Stochastický	*Analýza rozptylu* výnosů odrůd přes lokality a roky	Genetika malých populací založená na Mendelovské dědičnosti popsané *pravděpodobnostními rovnicemi*

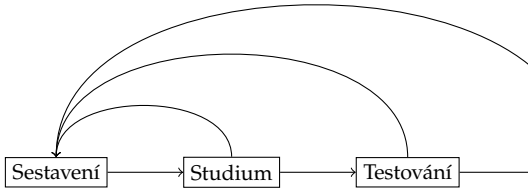
Tabulka 1.1: Jedna z možných klasifikací modelů

Za zmínku stojí ještě jeden další typ modelu, a to **model systému**. Ten je sestaven z řady dílčích modelů, z nichž každý popisuje podstatu nějaké z interagujících složek modelu. Výše uvedený způsob klasifikace pak je v pak vhodnější pro dílčích modely: v jednom modelu systémů mohou být použity různé typy dílčích modelů.

Mnoho publikací o modelování zmiňuje „simulační modely“. Proč tedy jsou nejsou zahrnuty v našem rozdělení? Důvodem tohoto zdánlivého opomenutí je, že *simulace* odkazuje na jeden způsob, jakým se provádějí modelové výpočty – tedy například počítačovou simulací. Vlastní model systému se nemění v závislosti na způsobu, jakým se provádí potřebné matematické výpočty, i když naše interpretace modelu může záviset na numerické přesnosti prováděných aproximací.

1.1.3 *Fáze modelování*

Je užitečné rozdělit proces modelování do čtyř hlavních kategorií činnosti, a to na *tvorbu*, *studium*, *testování* a *používání* modelu. I když by to mohlo být hezké si myslet, že modelovací projekty postupují plynule od fáze tvorby modelu až po jeho použití, téměř vždy to tak není. Obecně platí, že vady zjištěné ve fázích studia a testování jsou korigovány návratem do fáze výstavby. Všimněte si, že pokud dojde ke jakýmkoliv změnám modelu, pak fáze studia a testování se musí opakovat. Schématické znázornění možných cest přes jednotlivé fáze modelování je uvedeno na obrázku **??**.



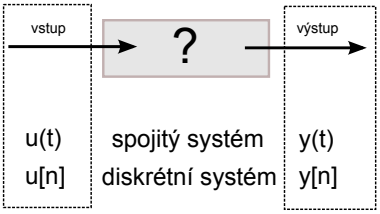
Tento proces opakovaných iterací je pro modelovací projekty typický a je jedním z nejužitečnějších aspektů modelování, pokud jde o lepší pochopení toho, jak systém funguje. Toto rozdělení činnosti v oblasti modelování budeme používat i nadále a bude tvořit strukturu pro zbytek tohoto kurzu.

1.1.4 *Model systému*

Definice 1 (Systém)**.** Charakteristické vlastnosti, se kterými vystačíme při modelování:

- systém považujeme za část prostředí, kterou lze od jejího okolí oddělit fyzickou nebo myšlenkovou hranicí,
- systém se skládá z podsystémů, vzájemně propojených součástí.

Je to část našeho světa, která se svým okolím nějak interaguje, například prostřednictvím vstupu a výstupu.



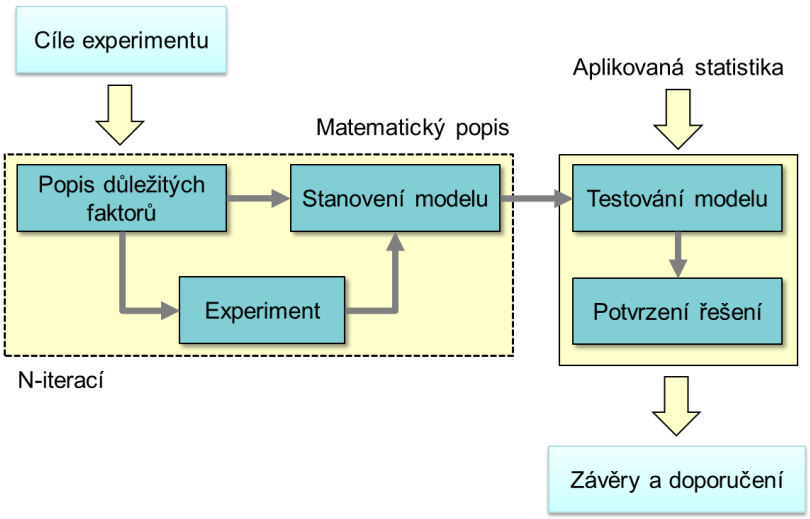
Obrázek 1.2: Vstup a výstup systému

Model

Za model můžeme pokládat náhradu nebo zjednodušení **skutečného objektu reálného světa** z hlediska jeho vlastností a funkčnosti.

Modelování je možné pouze pokud zavedeme **určitý stupeň** abstrakce a aproximace.

■ **obrázek 1.2 překreslit do TikZ** ■



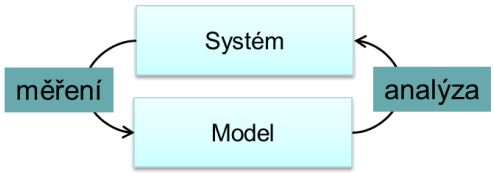
Obrázek 1.3: Tvorba matematického modelu

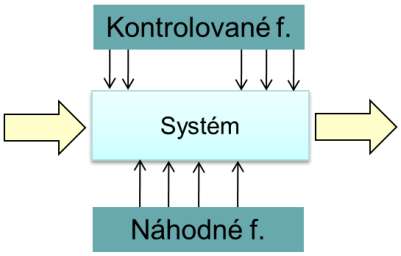
■ **celá sekce je hodně na vodě** ■

Při analýze navrženého modelu chceme učinit co možná nejsilnější rozhodnutí na základě malého množství dat. Správnost našeho návrhu je nutné statisticky vyhodnotit.

Problémy:

1. Významné diference ve sledovaných parametrech mohou být způsobeny špatným návrhem modelu, případně měřením dat
2. Je těžké rozlišit, zda diference v datech jsou skutečné nebo způsobené „náhodným vlivem“.





Obrázek 1.4: Problémy při tvorbě modelu

Otázky:

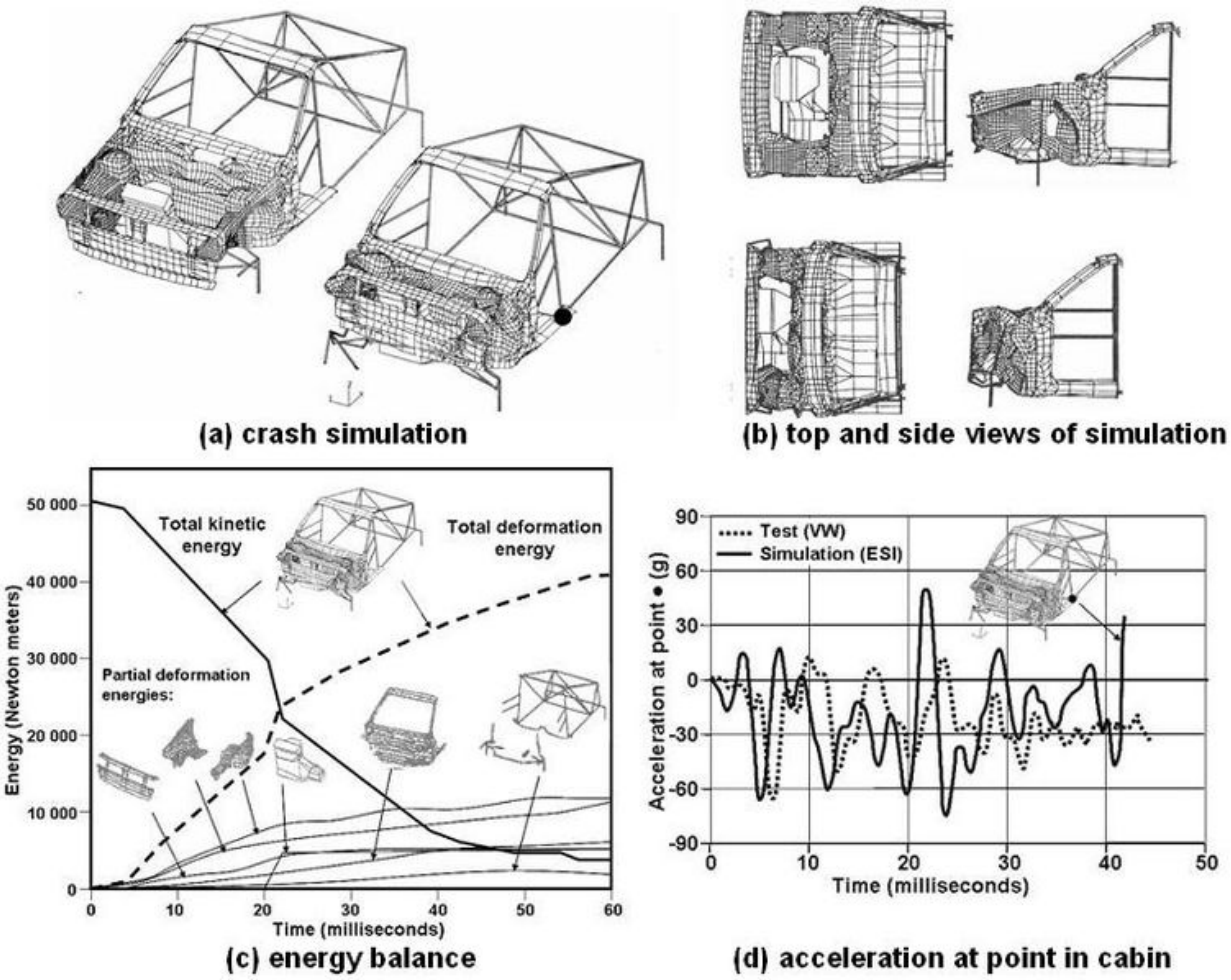
- Jak ověříme správnost výpočtu rychlosti šíření ptačí chřipky?
- Jak ověříme pevnost nového mostu?
- Jak ověříme bezpečnost softwaru?

Pokud nemůžeme předem prokázat určité vlastnosti na samotného systému, prokážeme hledané vlastnosti na jeho modelu!

■ pokud nebude víc textu, je třeba změnit marginfigure na figure ■

Obrázek 1.5: Klenba Gaudího katedrály Sagrada Familia v Barceloně

Obrázek 1.6: Model klenby pro ověření statiky stavby, sestavený z provázků a plátěných pytlíčků s pískem



Obrázek 1.7: Virtuální crashtest první generace VW Polo

1.1.5 *Vnější popis systémů*

Vnější popis vychází z popisu systému vektorem vstupu **u** a vektorem výstupu **y**.

Systém tak chápeme jako černou skříňku, o jejíchž vlastnostech se dozvíme pouze tehdy, jestliže budeme zkoumat jeho reakci na vnější události (signály, data).

Vnější model popisujeme diferenciální rovnicí pro systémy se spojitým časem a diferenční rovnicí pro systémy s diskrétním časem. Uvedená rovnice je obecně vyššího řádu, než 1.

1.1.6 *Vnitřní popis systémů*

Vnitřní, tzv. **stavový popis** systému používá k popisu dynamiky systému vektor **vnitřních stavů x**.

Vektor vstupů **u** a vektor výstupních veličin **y** jsou druhotné veličiny vnitřního popisu.

Stavové modely popisujeme

- soustavou diferenciálních rovnic prvního řádu pro systémy se spojitým časem a
- soustavou diferenčních rovnic prvého řádu pro systémy s diskrétním časem.

Modelování není samospasitelné:

- výstupy modelu je vždy třeba ověřovat,
- možné chyby jsou jak v modelu, tak i v jeho výpočtu.

Verifikace: Počítáme správný model.

Validace: Model počítá správně.

Příběh párových prvočísel (např. 17 a 19,...), největší dosud známý prvočíselný pár je

$$3756801695685 \times 2^{666669} \pm 1$$

(200700 dekadických cifer)

Příběh, ve kterém pošetilý matematik nachytal firmu INTEL při předstírání, že chyba Pentia neexistuje (1995):

Thomas Nicely, Lynchburg College, Virginia

$$\text{harmonická řada} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \to \infty$$

$$\text{prvočíselná harmonická řada} \sum_{\forall p}^{\infty} \frac{1}{p} \to \infty$$

divergují

avšak harmonická řada s párovými prvočísly

$$\sum_{\forall p_2}^{\infty} \frac{1}{p_2} = \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \cdots + \frac{1}{29} + \frac{1}{31} + \cdots$$

$$\approx 1{,}902160583104$$

konverguje![1]

Zde nastupuje experimentální matematika:

Thomas Nicely (1996) obdržel a svém novém PC hodnotu

$$\sum_{\forall p_2}^{\infty} \frac{1}{p_2} \approx 1{,}9021605778$$

a objevil chybu v FPU Pentia.

[1] Dokázal to V. Blum už v roce 1919, nevíme ale přesně, jaký ten součet je, protože nikdo neví, jestli je párových prvočísel konečný počet nebo ne.

Rozšířil svoje podezření pomocí internetu a odezva byla jednoznačná: aritmetická jednotka Pentia je chybná!

Tim Coe, Vitesse Semiconductor, Southern California

$$c = \frac{4195835}{3145727} = \frac{5 \cdot 7 \cdot \left(2^3 \cdot 3^4 \cdot 5 \cdot 37 + 1\right)}{3 \cdot 2^{20} - 1} \qquad \approx 1{,}33382044$$

Pentium procesor však dával hodnotu

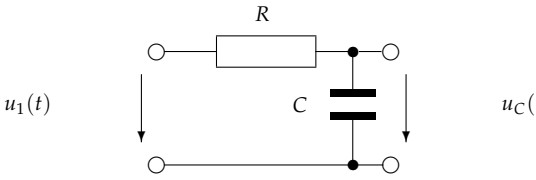
$$c = \frac{4195835}{3145727} = \frac{5 \times 7 \times 119881}{13 \times 241979} \approx 1.33373906$$

Chyba při reprezentaci čísel typu

$$M_n = 2^n - 1$$

tzv. Mersenneova čísla

Příklad 2 (RC článek). ■zde se to kvůli vloženému ‘frame‘ z prezentace rozlomí, text má navazovat■



Obrázek 1.8: RC článek

Napětí $u_1(t)$ na RC článku je součet napětí na rezistoru $u_R(t)$ a na kapacitoru $u_C(t)$:

$$u_1(t) = u_R(t) + u_C(t). \tag{1.1}$$

Proud procházející obvodem $i(t)$ a časový průběh napětí na rezistoru $u_R(t)$ je možno vyjádřit jako

$$i(t) = C\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}u_C(t) \tag{1.2}$$

a proto

$$u_R(t) = R \cdot i(t) = RC\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}u_C(t). \tag{1.3}$$

Dosazením $u_R(t)$ do rovnice (1.1) získáme diferenciální rovnici prvního řádu pro časový průběh napětí na kapacitoru $u_C(t)$:

$$RC\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}u_C(t) + u_C(t) = u_1(t). \tag{1.4}$$

Řešení uvedené rovnice má pro všechna $t \geq 0$

$$\alpha = \frac{1}{RC}$$

$$u_1(t) = U_0$$

a pro počáteční hodnotu

$$u_C(0) = 0$$

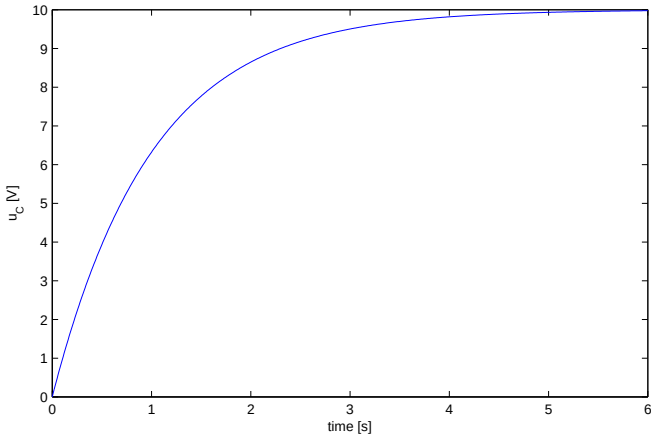
tvar

$$u_C(t) = U_0(1 - e^{-\alpha t}).$$

Příklad 3 (Nabídka a poptávka). **Rovnice nabídky**

Nabídka dnes závisí na včerejší ceně a to tak, že nabídka stoupá s rostoucí cenou. Pro $\mathcal{C} > 0$ platí

$$n[k] = \mathcal{C}c[k-1] + \mathcal{A}u[k]. \tag{1.5}$$

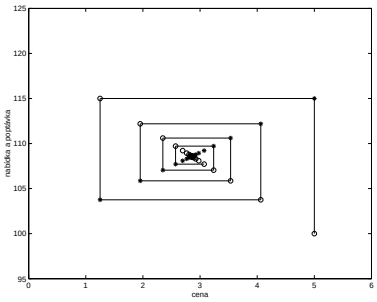


Obrázek 1.9: Výstup RC článku

Rovnice poptávky

Poptávka dnes závisí na dnešní ceně a to tak, že poptávka klesá s rostoucí cenou. Pro $\mathcal{D} > 0$ platí

$$p[k] = -\mathcal{D}c[k] + \mathcal{B}u[k]. \tag{1.6}$$



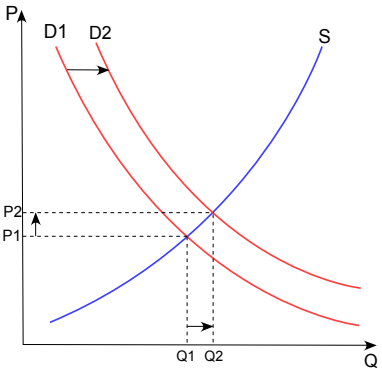
Obrázek 1.10: Pavučinkový diagram – variace ceny

Rovnost nabídky a poptávky

$$n[k] = p[k] \tag{1.7}$$

pak vede na diferenční rovnici prvního řádu

$$c[k] + \frac{\mathcal{C}}{\mathcal{D}}c[k-1] = \frac{\mathcal{B}-\mathcal{A}}{\mathcal{D}}u[k]. \tag{1.8}$$



Obrázek 1.11: Obecná závislost závislosti ceny P na poptávce Q. Převzato z Wikipedie

1.2 *Iterace diferenční rovnice*

■ doplnit text ■

1.2.1 *Iterace rovnice ceny*

Diferenční rovnici, kterou jsme odvodili

$$c[k] + \frac{\mathcal{C}}{\mathcal{D}}c[k-1] = \frac{\mathcal{B}-\mathcal{A}}{\mathcal{D}}x[k] \tag{1.9}$$

přepíšeme do kanonického tvaru[2]

$$y[k] + \gamma y[k-1] = \beta u[k] \tag{1.10}$$

a postupnými iteracemi nalezneme pro $u[k] = \mathbf{1}[k]$ a počáteční podmínku $y[-1] = 0$

Pro $k = 0$:

$$y[0] + \gamma y[-1] = \beta u[0]$$
$$y[0] = \beta - \gamma y[-1] = \beta$$

[2] *Kanonický tvar* diferenční rovnice označuje ustálenou formu zápisu rovnice, kde výstupy jsou umístěny na levé straně a vstupy na pravé straně rovnice, seřazeny podle posunutí. Zápis v kanonickém tvaru umožňuje čtenáři snadnější orientaci v problematice.

Pro $k = 1$:

$$y[1] + \gamma y[0] = \beta u[1]$$
$$y[1] = \beta - \gamma y[0] = \beta - \beta\gamma$$

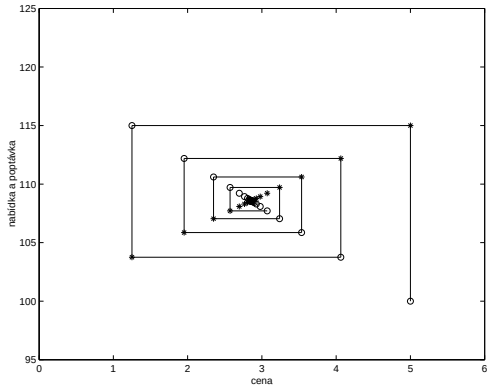
Pro $k = 2$:

$$y[2] + \gamma y[1] = \beta u[2]$$
$$y[2] = \beta - \gamma y[1] = \beta - \beta\gamma + \beta\gamma^2$$

Pro obecné n:

$$y[n] + \gamma y[n-1] = \beta u[n]$$
$$y[n] = \beta - \gamma y[n-1] = \beta \left(1 - \gamma + \gamma^2 + \cdots + (-\gamma)^n\right)$$

$$y[n] = \beta \sum_{m=0}^{n} (-\gamma)^m = \beta \frac{1 - (-\gamma)^{n+1}}{1 + \gamma} = \frac{\beta}{1+\gamma} + \frac{\beta\gamma}{1+\gamma}(-\gamma)^n$$



Obrázek 1.12: Dosadíme toto řešení do rovnic pro nabídku a poptávku a získáme pavučinkový diagram

2 Úvod do teorie signálů

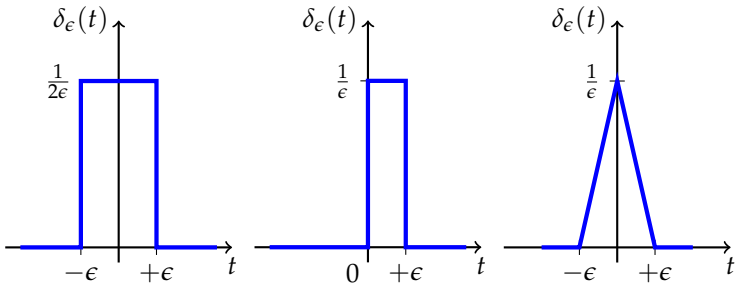
Doporučená literatura pro tuto část je OPPENHEIM et al. [1997].

2.1 Základní spojité signály

■ doplnit text ■

2.1.1 Diracův impuls

Tato funkce je definována na časovém intervalu pro všechna t a její nenulovou hodnotu předpokládáme pouze v okolí bodu $t = 0$. Plocha těchto funkcí je rovna 1 pro každé $\varepsilon > 0$.



Obrázek 2.1: Konečná reprezentace $\delta_\epsilon(t)$ pro $\epsilon > 0$

Funkci $\delta(t)$ definujeme jako $\delta(t) = \lim_{\epsilon \to 0} \delta_\epsilon(t)$.

Funkce $\delta(t)$ se nazývá **Diracův impuls**, Diracova δ-funkce nebo jednotkový impuls. Hodnota $\delta(t)$ pro $t \neq 0$ je $\delta(t) = 0$. Její hodnota v $t = 0$ není definována jako funkce, používá se integrální definice

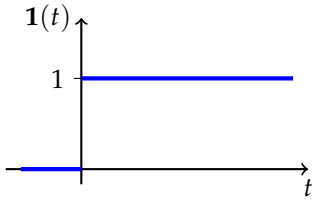
$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\ \mathrm{d}t = \int_{-\epsilon}^{\epsilon} \delta(t)\ \mathrm{d}t = \int_{0-}^{0+} \delta(t)\ \mathrm{d}t = 1 \tag{2.1}$$

pro každé $\epsilon > 0$.

2.1.2 Jednotkový skok

Funkce jednotkového skoku bývá obvykle značena $\mathbf{1}(t)$ a je definována jako

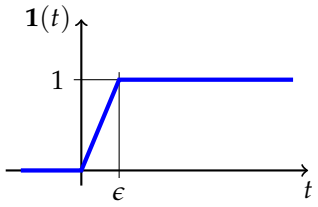
$$\mathbf{1}(t) = \begin{cases} 1 & \text{pro } t \geq 0 \\ 0 & \text{pro } t < 0. \end{cases} \tag{2.2}$$



Obrázek 2.2: Jednotkový skok

Platí

$$\delta(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathbf{1}(t).$$



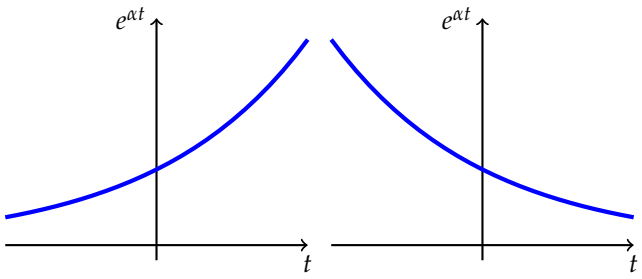
Obrázek 2.3: Jednotkový skok

2.1.3 *Exponenciála*

Uvažujme exponenciální funkci

$$f(t) = e^{\alpha t}, \tag{2.3}$$

kde α je reálná konstanta, podle následujícího obrázku.



Obrázek 2.4: Reálná exponenciála a) pro $\alpha > 0$, b) pro $\alpha < 0$.

Exponenciální funkce

$$f(t) = A\, e^{\alpha t}, \tag{2.4}$$

kde $\alpha \in \mathbb{C}$ je zajímavá hlavně v případě, kdy $\alpha = i\omega$,

$$f(t) = A\, e^{i\omega t} = A\,(\cos\omega t + i\,\sin\omega t)\,. \tag{2.5}$$

2.1.4 *Periodické a harmonické funkce*

O spojitém signálu $f(t)$ říkáme, že je periodický s periodou T, jestliže

$$\forall t : f(t+T) = f(t) \tag{2.6}$$

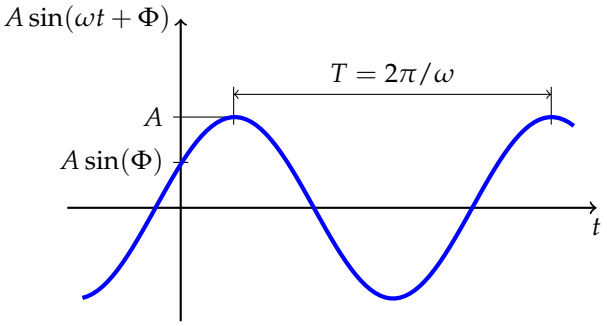
a tedy také pro libovolné $k \in \mathbb{Z}$

$$f(t) = f(t+T) = f(t+2T) = \cdots = f(t+k\cdot T)$$

Nejmenší možné T nazýváme **fundamentální perioda**, značíme T_0.

$$f(t) = A\ \sin(\omega t + \Phi), \tag{2.7}$$

Konstanty A, ω a Φ se nazývají **amplituda**, **úhlová frekvence**



Obrázek 2.5: Sinusový signál

a **fázový posun**. Sinusovka je periodická se základní periodou $T = 2\pi/\omega$.

2.2 Základní diskrétní signály

Jak diskrétní signály vznikají?

- **přirozeně** (průměrné denní teploty, denní kurzy, počty studentů)
- **vzorkováním spojitých signálů** (naměření teploty každou hodinu, měřením průtoku každých 15 minut)

Diskrétní signály, jimiž se budeme v předmětu zabývat, jsou diskrétní v čase, ale *spojité ve funkční hodnotě*.

Digitální signál je totiž často **kvantovaný**, nabývá tedy v každém n pouze diskrétní množiny funkčních hodnot, například $\{0, 1, 2, \ldots, 65535\}$.

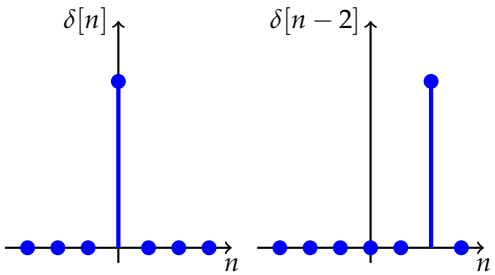
2.2.1 Diskrétní jednotkový impuls a skok

Diskrétní jednotkový impuls $\delta[n]$ je definován vztahem

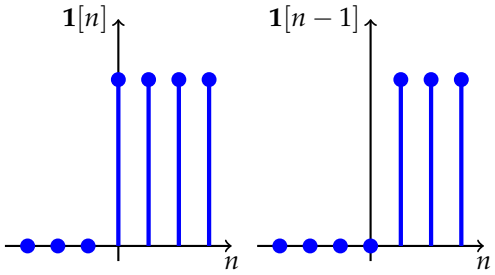
$$\delta[n] = \begin{cases} 1 & \text{pro } n = 0 \\ 0 & \text{pro } n \neq 0\,. \end{cases} \tag{2.8}$$

Diskrétní jednotkový skok $\mathbf{1}[n]$ je definován vztahem

$$\mathbf{1}[n] = \begin{cases} 1 & \text{pro } n \geq 0 \\ 0 & \text{pro } n < 0 \end{cases} \tag{2.9}$$



Obrázek 2.6: Diskrétní jednotkový impuls a posunutý jednotkový impuls.



Obrázek 2.7: Diskrétní jednotkový skok a posunutý jednotkový skok.

Z obrázku 2.7 snadno nahlédneme, že

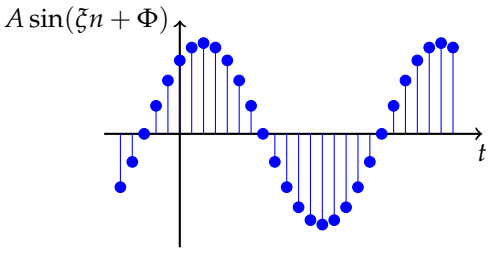
$$\mathbf{1}[n] = \sum_{m=0} n\delta[n-m] = \delta[n] + \delta[n-1] + \cdots + \delta[1] + \delta[0].$$

2.2.2 *Diskrétní sinusová posloupnost*

Mějme sinusový signál $f(t) = A\sin(\omega t + \Phi)$ s periodou $T = 2\pi/\omega$. Pokud tento signál vzorkujeme s periodou $T_s > 0$, získáme diskrétní sinusový signál

$$f[n] = f(nT) = A\sin(\omega n T_s + \Phi) = A\sin(\xi n + \Phi), \qquad (2.10)$$

kde $n = 0,\ \pm 1,\ \pm 2, \ldots$ a $\xi = \omega T_s$.



Obrázek 2.8: Diskrétní sinusová posloupnost

Diskrétní signál $f[n]$ je periodický, jestliže existuje kladné celé číslo N takové, že platí

$$f[n] = f[n+N] = f[n+2N] = \cdots = f[n+k\cdot N] \qquad (2.11)$$

pro všechna $n \in \mathbb{Z}$ (z intervalu $(-\infty,\ \infty)$) a pro libovolné $k \in \mathbb{Z}$. N se nazývá **perioda diskrétního signálu**.

Nejmenší možné N nazýváme **fundamentální perioda** a značíme N_0.

Diskrétní sinusový signál *nemusí být nutně periodický*, záleží na

volbě vzorkovací periody T_s. Pro periodický diskrétní sinusový signál s periodou N musí platit

$$N = m \cdot \frac{2\pi}{T_s},$$

kde $m \in \mathbb{N}$. Máme i $N \in \mathbb{N}$, proto $2\pi/T_s$ musí být racionální číslo.

Příklad 4 (Neperiodický sinusový signál). Signál

$$y[n] = \sin n$$

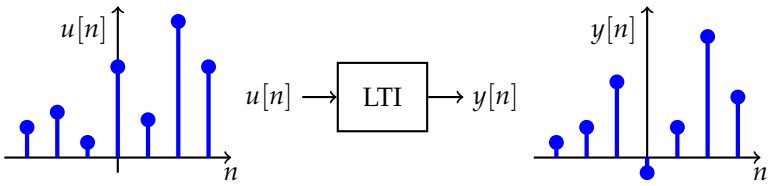
není pro $T_s = 0.1\,\mathrm{s}$ periodický, protože $2\pi/T_s$ není racionální číslo.

2.3 Odezva systému

xxxxxx

2.3.1 Diskrétní systém

xxxxxx



Obrázek 2.9: Diskrétní LTI systém, jeho vstupní a výstupní posloupnost

Definice 5 (Impulsní odezva)**.** Odezvu systému na jednotkový impuls $\delta[n]$ budeme nazývat **impulsní odezva** a značit $h[n]$,

$$h[n] = \mathcal{S}\{\delta[n]\}$$
$$h[n,m] = \mathcal{S}\{\delta[n-m]\}\,.$$

Definice 6 (Přechodová odezva)**.** Odezvu systému na jednotkový skok $\mathbf{1}[n]$ budeme nazývat **přechodová odezva** a značit $s[n]$,

$$s[n] = \mathcal{S}\{\mathbf{1}[n]\} = \mathcal{S}\left\{\sum_{m=0}^{n} \delta[n-m]\right\}.$$

2.3.2 Lineární a nelineární

Řekli jsme si, že systém není nic jiného, než černá skříňka, *black box*, kterou se pokoušíme nejprve identifikovat a poté reprodukovat. Při identifikaci se nejprve ptáme, zda se jedná o lineární systém. ■ **tohle taky nedává moc smysl** ■

Definice 7 (Linearita)**.** V matematice označujeme funkci $f(x)$ jako lineární v případě, že je

1. aditivní $f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2)$ a

2. homogenní, $f(\alpha x) = \alpha f(x)$.

Obdobně to platí i pro lineární systémy.

Definice 8 (Lineární systém)**.** Systém je lineární, pokud pro dva různé vstupní signály $u_1[n]$ a $u_2[n]$ platí

$$\begin{aligned}\mathcal{S}\{u_1[n] + u_2[n]\} &= \mathcal{S}\{u_1[n]\} + \mathcal{S}\{u_2[n]\}\,,\\ \mathcal{S}\{\alpha u[n]\} &= \alpha\mathcal{S}\{u[n]\}\,.\end{aligned}$$

Definice 8 nám trošku zakukleně popisuje jednu základní vlastnost všech lineárních systémů, ať už popisují svět v diskrétním či spojitém čase: Je-li vstupem systému vážený součet několika signálů, výstupem systému je opět stejně vážený součet neboli *superpozice* dílčích odezev na tyto vstupy.

Definice 9 (Princip superpozice)**.** Pro dva různé vstupní signály $u_1[n]$ a $u_2[n]$ platí

$$\begin{aligned}y_1[n] &= \mathcal{S}\{u_1[n]\}\\ y_2[n] &= \mathcal{S}\{u_2[n]\}\end{aligned}$$

a pro $u[n] = \alpha u_1[n] + \beta u_2[n]$ také

$$\alpha y_1[n] + \beta y_2[n] = y[n] = \mathcal{S}\{u[n]\} = \mathcal{S}\{\alpha u_1[n] + \beta u_2[n]\}$$

Obecně platí

$$u[n] = \sum_i a_i u_i[n] \quad \rightarrow \quad y[n] = \sum_i a_i y_i[n] = \sum_i a_i \mathcal{S}\{u_i[n]\}$$

Příklad 10 (Lineární systém). Uvažujme systém

$$y[n] + a\,y[n-1] = u[n].$$

Je-li na vstupu lineární kombinace dvou různých signálů

$$u[n] = b_1 u_1[n] + b_2 u_2[n]$$

je na výstupu

$$y[n] = b_1\left(y_1[n] + a\,y_1[n-1]\right) + b_2\left(y_2[n] + a\,y_2[n-1]\right)$$

kde

$$\begin{aligned}y_1[n] + a\,y_1[n-1] &= u_1[n]\\ y_2[n] + a\,y_2[n-1] &= u_2[n]\end{aligned}$$

Příklad 11 (Nelineární systém). Numerický výpočet druhé odmocniny lze zapsat rekurentním vztahem

$$y[n+1] = \frac{1}{2}\left(y[n] + \frac{u[n]}{y[n]}\right). \tag{2.12}$$

Odmocnina z čísla 10 je s přesností na 10 desetinných míst rovna $\sqrt{10} = 3{,}16227766017$. Pro $u[n] = u[0] = 10$ dostáváme postupně

n	$y[n]$	$y^2[n]$
1	3	9
2	3,165	10,017225
3	3,162278	10,00000214928
4	3,162277660	9,999999999568
⋮	⋮	⋮

Pro obecný vstupní signál $u[n]$ je pak odezva lineárního systému

$$y[n] = \mathcal{S}\{u[n]\} = \mathcal{S}\left\{\sum_{m=-\infty}^{\infty} u[m]\,\delta[n-m]\right\}$$
$$= \sum_{m=-\infty}^{\infty} u[m]\,\mathcal{S}\{\delta[n-m]\} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} u[m]\,h[n,m]$$

Vidíme, že chování systému je zcela určeno jeho odezvami na různě posunuté jednotkové pulsy $h[n,m]$.

Přechodová odezva diskrétního lineárního systému $s[n]$ je dána prostým součtem impulsních odezev pro $0 \leq m \leq n$

$$s[n] = \mathcal{S}\{\mathbf{1}[n]\} = \mathcal{S}\left\{\sum_{m=0}^{n} \delta[n-m]\right\}$$
$$= \sum_{m=0}^{n} \mathcal{S}\{\delta[n-m]\} = \sum_{m=0}^{n} h[n,m].$$

Lze za nějakých podmínek zjednodušit $h[n,m]$?

2.3.3 *Časově invariantní, resp. stacionární systém*

Systém se nazývá **časově invariantní**, jestliže jsou všechny události závislé pouze na časovém intervalu (rozdílu časových událostí) $n-m$ a nikoliv na každém časovém okamžiku n a m samostatně.

$$\begin{array}{ll} \text{dnes} & \ldots \qquad y[n] = \mathcal{S}\,[u[n]] \\ \text{včera} & \ldots \qquad y[n-1] = \mathcal{S}\,[u[n-1]] \\ & \qquad\qquad \vdots \end{array}$$

Potom také rovnice (**??**) pro impulsní odezvu přejde z maticového tvaru na prostý vektorový zápis

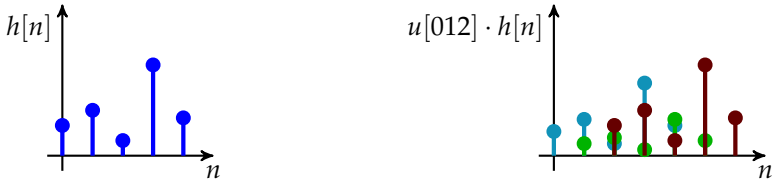
$$h[n,m] \to h[n-m] = \mathcal{S}\{\delta[n-m]\}\,.$$

V důsledku časové invariance dostáváme z rovnice (**??**) **konvoluční sumu**

$$y[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} h[n-m]\cdot u[m] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]\cdot u[n-k], \qquad (2.13)$$

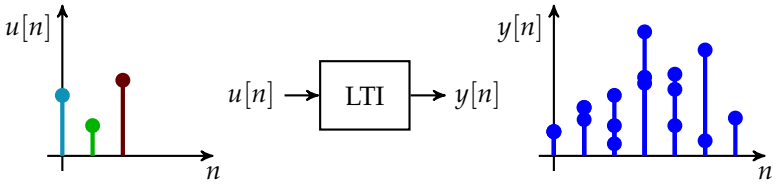
kterou pro úsporu místa značíme

$$y[n] = h[n] * u[n].$$



Obrázek 2.10: Superpozice odezvy $y[n]$ jako $\sum_{k=0} nu[k]h[n-k]$

$$y[n] = u[0] \cdot h[n] + u[1] \cdot h[n-1] + u[2] \cdot h[n-2]$$



Pozor: nejde o násobení!

$$h[n] \neq \frac{y[n]}{u[n]}$$

Příklad 12 (Časově invariantní systém). Uvažujme mikroekonomický systém variace ceny popsaný diferenční rovnici

$$y[n] + a\, y[n-1] = u[n].$$

Protože její koeficienty nezávisí na čase, tj. a je konstantní a není funkcí n, zachovává tato rovnice tvar při záměně $n \to n - m$. Impulsní odezva je potom

$$h[n] = (-a)^n \mathbf{1}[n].$$

Příklad 13 (Časově proměnný systém). Uvažujme nyní obměněnou diferenční rovnici

$$y[n] + n \cdot y[n-1] = u[n].$$

Koeficient u $y[n-1]$ závisí na čase a tato rovnice nezachovává tvar při záměně $n \to n - m$. Impulsní odezvu lze psát ve tvaru

$$h[n] = (-1)^n\, n!\, \mathbf{1}[n].$$

2.3.4 *Kauzální, příčinný systém*

Systém je **kauzální**, pokud jeho výstup závisí pouze na současných a minulých hodnotách vstupů.

Výstupní signál $y[n]$ kauzálního systému tedy závisí pouze na

$\{u[n], u[n-1], u[n-2], \dots\}$. V konvoluční sumě (2.13) proto

$$\begin{aligned} y[n] &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]\, u[n-k] \\ &= \underbrace{\sum_{k=-\infty}^{-1} h[k]\, u[n-k]}_{0} + \sum_{k=0}^{\infty} h[k]\, u[n-k] \end{aligned}$$

musíme položit všechny členy impulsní odezvy $h[n] = 0$ pro $n < 0$.

Pro kauzální systémy tedy platí, že jejich impulsní odezva musí být nulová před okamžikem vstupního impulsu, což odpovídá našemu intuitivnímu vnímání kauzality: napřed musí existovat příčina, až po ní můžeme pozorovat důsledky.

Pro lineární kauzální systémy přitom také platí, že pokud je jejich vstup až do nějakého okamžiku roven 0, i výstup bude až do toho okamžiku nulový.

Konvoluční suma pro lineární, časově invariantní a kauzální systém má tvar

$$y[n] = \sum_{k=0}^{\infty} h[k] \cdot u[n-k] = \sum_{k=-\infty}^{0} u[k] \cdot h[n-k].$$

Jestliže navíc budeme požadovat, aby vstupní a výstupní signály měly dobře definovaný počátek, tj. aby $\forall n < 0 : u[n] = 0, y[n] = 0$ (oba signály mohou mít nenulové členy pouze pro $n \geq 0$), potom platí

$$y[n] = \sum_{k=0}^{n} h[k] \cdot u[n-k] = \sum_{k=0}^{n} h[n-k] \cdot u[k].$$

2.3.5 *Spojitý systém*

Definice 14 (Impulsní odezva)**.** Odezvu systému na Diracův impuls $\delta(t)$ budeme nazývat **impulsní odezva** a značit $h(t)$,

$$\begin{aligned} h(t) &= \mathcal{S}\{\delta(t)\} \\ h(t,\tau) &= \mathcal{S}\{\delta(t-\tau)\}\,. \end{aligned}$$

Definice 15 (Přechodová odezva)**.** Odezvu systému na jednotkový skok $\mathbf{1}(t)$ budeme nazývat **přechodová odezva** a značit $s(t)$,

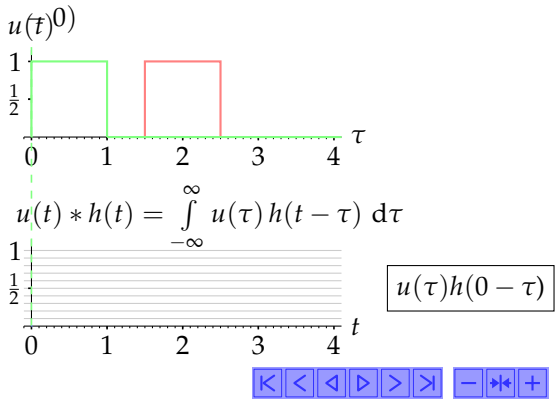
$$s(t) = \mathcal{S}\{\mathbf{1}(t)\} = \mathcal{S}\left\{\int_0^t \delta(t-\tau)\ \mathrm{d}t\right\}.$$

V případě spojitého casu postupujeme podobně a odvodíme pro lineární časově invariantní systém konvoluční integrál

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)u(t-\tau)\ \mathrm{d}\tau = \int_{-\infty}^{\infty} h(t-\tau) \cdot u(\tau)\ \mathrm{d}\tau.$$

Operaci často zapisujeme ve zjednodušené formě jako

$$y(t) = h(t) * u(t).$$



Obrázek 2.11: Animovaný obrázek výpočtu konvoluce dvou signálů. Funguje pouze v prostředí Adobe Reader, jinde uvidíte prázdno

Opět připomínáme, že se v tomto zápisu nejedná o násobení!

Pro $u(t) = \delta(t)$ platí pro lineární a časové invariantní systém samozřejmě

$$y(t) = \mathcal{S}\{u(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) \cdot \delta(t-\tau)\ \mathrm{d}\tau = h(t). \tag{2.14}$$

Výstupní signál $y(t)$ spojitého kauzálního systému závisí pouze na hodnotách vstupů pro předešlé časové okamžiky. Z důvodu, které klademe na kauzální chování systému, přejde konvoluční integrál (2.14) na tvar

$$\begin{aligned} y(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)\, u(t-\tau)\ \mathrm{d}\tau \\ &= \underbrace{\int_{-\infty}^{0} h(\tau)\, u(t-\tau)\ \mathrm{d}\tau}_{0} + \int_{0}^{\infty} h(\tau)\, u(t-\tau)\ \mathrm{d}\tau \end{aligned}$$

a hodnoty impulsní odezvy pro $t < 0$ uvažujeme opět $h(t) = 0$.

Konvoluční integrál pro lineární, časově invariantní a kauzální systém má tvar

$$y(t) = \int_{0}^{\infty} h(\tau) \cdot u(t-\tau)\ \mathrm{d}\tau = \int_{-\infty}^{0} u(\tau) \cdot h(t-\tau)\ \mathrm{d}\tau.$$

Jestliže navíc budeme požadovat, aby vstupní a výstupní signály měly dobře definovaný počátek, tj. aby $\forall t < 0 : u(t) = 0, y(t) = 0$ (oba signály mohou být nenulové členy pouze pro $t \geq 0$), potom platí

$$y(t) = \int_{0}^{t} h(\tau) \cdot u(t-\tau)\ \mathrm{d}\tau = \int_{0}^{t} u(\tau) \cdot h(t-\tau)\ \mathrm{d}\tau.$$

2.3.6 *Autonomní a neautonomní systém*

Definice 16 (Autonomní systém)**.** Za autonomní systém považujeme takový, který **nemá vstup**. Diskrétní autonomní systém je

popisuje tedy například diferenční rovnice vnějšího popisu

$$y[n+1] + a\,y[n] = 0.$$

Výstup autonomního systému je odezvou na počáteční podmínky.

V případě, že systém má vstup $u[n]$, tedy

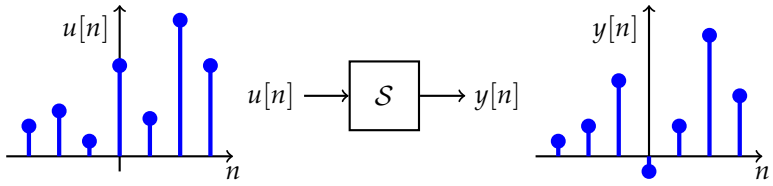
$$y[n] + a\,y[n-1] = u[n],$$

systém pokládáme za neautonomní.

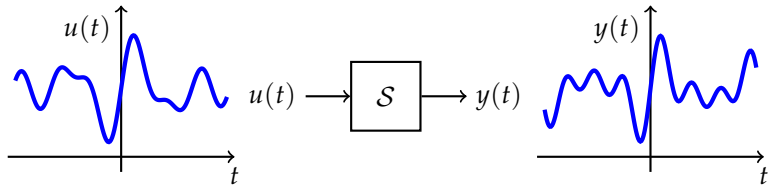
3 Popis systémů

3.1 Vnější popis systému

3.1.1 Opakování



Obrázek 3.1: Vnější popis obecného diskrétního systému



Obrázek 3.2: Vnější popis obecného spojitého systému

3.2 Vnitřní popis systému

Vnitřní popis dynamického systému je vztah mezi všemi veličinami systému, je to tedy relace mezi vstupními, stavovými a výstupními veličinami. Vnitřní popis je nejčastěji vyjádřen stavovými rovnicemi. Vnější popis, o němž jsme se bavili do této chvíle, je relace pouze mezi vstupními a výstupními veličinami, vyloučili jsme z něj veličiny stavové a systém popsaný vnějším popisem považujeme za černou skříňku (angl. *black box*).

Problémem souvislosti vnitřního a vnějšího popisu jsme se dosud nezabývali. Známe-li vnitřní popis -– stavové rovnice, snadno z něho jednodušší vnější popis odvodíme tak, že vyloučíme stavové proměnné. Obrácený postup, tedy určení vnitřního popisu z popisu vnějšího, již není tak jednoduchý. Vnitřní popis systému je bohatší a získáme jej z jednoduššího vnějšího popisu pouze za

určitých předpokladů o struktuře systému. Z vnějšího popisu není totiž zřejmé, kolik má systém stavů, neboli jaká je dimenze stavového prostoru, ani jak zvolit jeho bázi. Určení vnitřního popisu z popisu vnějšího se nazývá problém realizace systému ŠTECHA and HAVLENA [2005].

3.2.1 *Vnitřní popis nelineáního systému*

Spojitý systém	**Diskrétní systém**
vektor vstupních (řídicích) proměnných $\mathbf{u}(t)$	$\mathbf{u}[n]$
stavový vektor $\mathbf{x}(t)$	$\mathbf{x}[n]$
vektor výstupních proměnných $\mathbf{y}(t)$	$\mathbf{y}[n]$
$\mathbf{x}'(t) = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t))$	$\mathbf{x}[n+1] = \mathbf{f}(n, \mathbf{x}[n], \mathbf{u}[n])$
$\mathbf{y}(t) = \mathbf{g}(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t))$	$\mathbf{y}[n] = \mathbf{g}(n, \mathbf{x}[n], \mathbf{u}[n])$

3.2.2 *Vnitřní popis lineárního systému*

Nejprve obecnější nestacionární systém.

Spojitý systém	**Diskrétní systém**
$\mathbf{u}(t)$ ... vektor vstupních (řídicích) proměnných	$\mathbf{u}[n]$
stavový vektor $\mathbf{x}(t)$	$\mathbf{x}[n]$
vektor výstupních proměnných $\mathbf{y}(t)$	$\mathbf{y}[n]$
$\mathbf{x}'(t) = \mathbf{A}(t)\,\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}(t)\,\mathbf{u}(t)$	$\mathbf{x}[n+1] = \mathbf{M}(n)\,\mathbf{x}[n] + \mathbf{N}(n)\,\mathbf{u}[n]$
$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}(t)\,\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}(t)\,\mathbf{u}(t)$	$\mathbf{y}[n] = \mathbf{C}[n]\,\mathbf{x}[n] + \mathbf{D}[n]\,\mathbf{u}[n]$

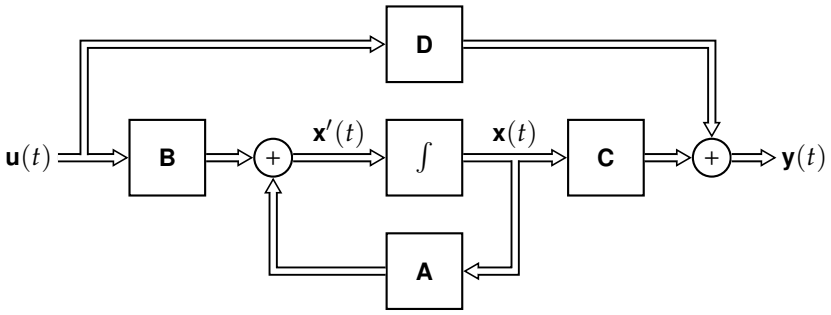
Spojitý systém	**Diskrétní systém**
$\mathbf{u}(t)$ ... vstupní (řídicí) vektor	$\mathbf{u}[n]$ ... vstupní (řídicí) vektor
$\mathbf{x}(t)$ ... stavový vektor	$\mathbf{x}[n]$ ... stavový vektor
$\mathbf{y}(t)$ ... výstupní vektor	$\mathbf{y}[n]$ ... výstupní vektor
$\mathbf{x}'(t) = \mathbf{A}\,\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\,\mathbf{u}(t)$	$\mathbf{x}[n+1] = \mathbf{M}\,\mathbf{x}[n] + \mathbf{N}\,\mathbf{u}[n]$
$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\,\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\,\mathbf{u}(t)$	$\mathbf{y}[n] = \mathbf{C}\,\mathbf{x}[n] + \mathbf{D}\,\mathbf{u}[n]$
$\mathbf{A}$ je matice systému $(n \times n)$	$\mathbf{M}$ je matice systému $(n \times n)$
$\mathbf{B}$ je matice vstupů (řízení) $(n \times r)$	$\mathbf{N}$ je matice vstupů (řízení) $(n \times r)$
$\mathbf{C}$ je výstupní matice $(m \times n)$	$\mathbf{C}$ je výstupní matice $(m \times n)$
$\mathbf{D}$ je výstupní matice $(m \times r)$	$\mathbf{D}$ je výstupní matice $(m \times r)$

3.3 *Příklady na stavový popis dynamických systémů*

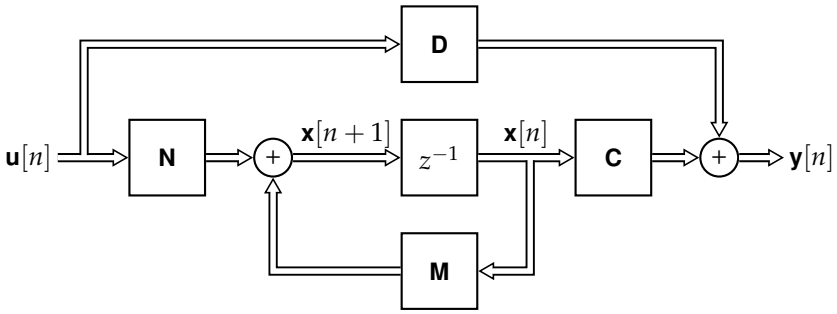
3.3.1 *Cykloida*

Pohyb po **cykloidě** je popsán parametrickou soustavou rovnic

$$x = x_1(t) = a\,t - d\sin t,$$
$$y = x_2(t) = a - d\cos t,$$



Obrázek 3.3: Blokové schéma spojitého LTI systému



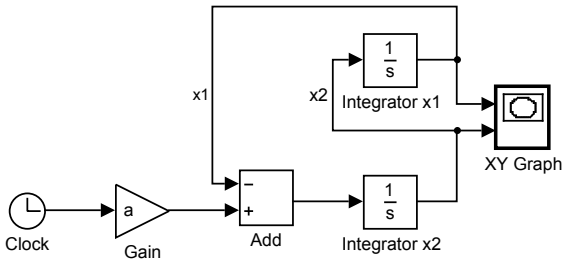
Obrázek 3.4: Blokové schéma diskrétního LTI systému

která je pro počáteční podmínky

$$x_1(0) = 0 \quad \text{a} \quad x_2(0) = a - d$$

dána řešením stavové rovnice

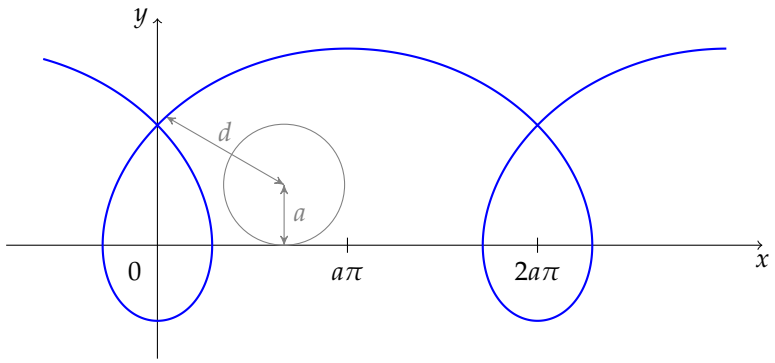
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} x \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ a \end{bmatrix} t.$$



Obrázek 3.5: Model cykloidy v Simulinku

3.3.2 *Modely typu predátor-kořist*

Nelineární stavový model **vlci a ovečky**, který je znám v literatuře jako *Lotka-Volterra predator-prey model*, se týká populace ovcí popsané stavovou proměnnou $x_1(t)$ a populace vlků popsané stavovou proměnnou $x_2(t)$.



Obrázek 3.6: Cykloida vznikne odvalováním bodu ve vzdálenosti d od středu kružnice s poloměrem a

Dynamický model je dán nelineární soustavou stavových rovnic

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x_1(t) = a\,x_1(t) - b\,x_1(t)x_2(t),$$
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x_2(t) = -c\,x_2(t) + d\,x_1(t)x_2(t).$$

Uvedený model můžeme snadno interpretovat. Žijí-li ovce a vlci odděleně, pro ovce platí rovnice

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x_1(t) = a\,x_1(t),$$

jejímž řešením je exponenciální růst populace ovcí nade všechny meze (neuvažujeme omezení zdrojů potravy, nemoci a tak dále)

$$x_1(t) = x_1(0)\,e^{at},$$

zatímco bez potravy je přírůstek populace vlků záporný

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x_2(t) = -c\,x_2(t)$$

a vlci hynou,

$$x_2(t) = x_2(0)\,e^{-ct}.$$

Počet sežraných ovcí a nasycených vlků je úměrný počtu jejich setkání – ten je dán součinem

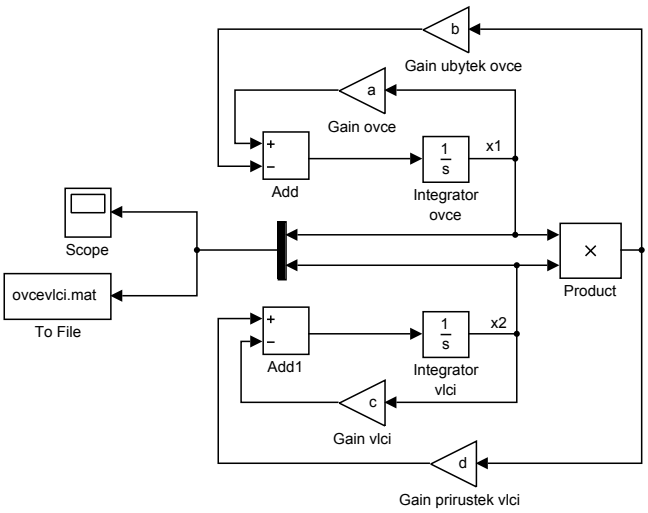
$$x_1(t)x_2(t)$$

a počet ovcí klesá úměrně s

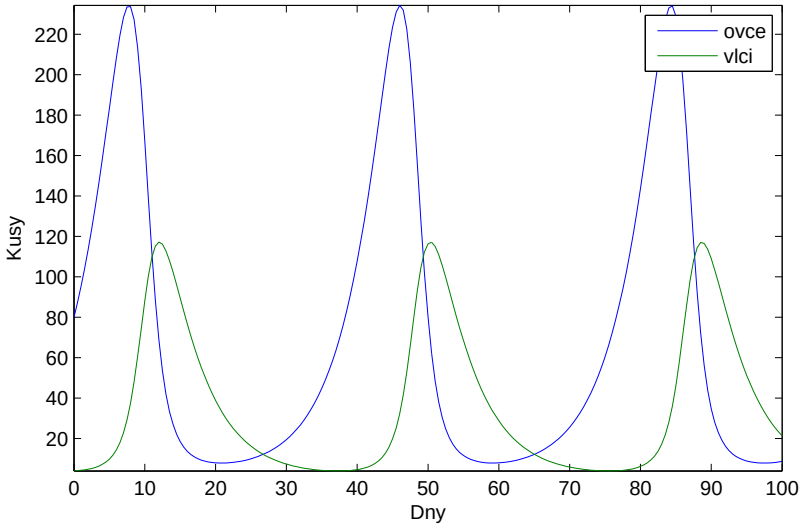
$$-b\,x_1(t)x_2(t)$$

zatímco se vlci mají dobře a jejich počet stoupá úměrně s

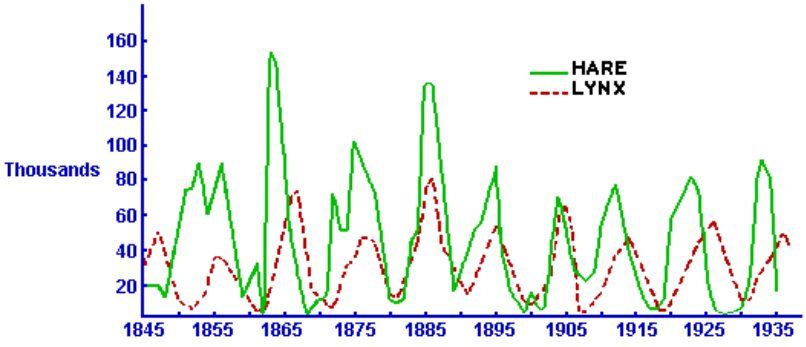
$$d\,x_1(t)x_2(t).$$



Obrázek 3.7: Model typu predator-prey (ovce-vlci) implementovaný v Simulinku



Obrázek 3.8: Vývoj populací vlků a oveček s parametry $x_1(0) = 80$, $x_2(0) = 4$, $a = 0{,}2$, $b = 0{,}006$, $c = 0{,}2$, $d = 0{,}003$



Obrázek 3.9: Vývoj populací rysů a sněžných zajíců v Kanadě

3.4 Vnější a vnitřní popis systému

3.4.1 Systém druhého řádu

Diferenciální rovnice druhého řádu s počátečními podmínkami ve tvaru

$$y''(t) + a_1\, y'(t) + a_0\, y(t) = u(t) \tag{3.1}$$
$$y(0) = c_1 \quad \text{a} \quad y'(0) = c_2, \tag{3.2}$$

udává vztah vstupu $u(t)$ a výstupu $y(t)$ spojitého lineárního stacionárního systému.

Tento vnější popis převedeme na stavový popis volbou stavového vektoru

$$x_1(t) = y(t),$$
$$x_2(t) = y'(t).$$

Dosadíme za $y'(t) = x_2(t)$ a $y''(t) = x_2'(t)$ do původní diferenciální rovnice a obdržíme

$$x_2'(t) + a_1\, x_2(t) + a_0\, x_1(t) = u(t).$$

Současně platí

$$x_1'(t) = y'(t) = x_2(t).$$

Dostáváme tak

$$\begin{bmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

respektive

$$\begin{bmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \end{bmatrix} = \mathbf{A} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \mathbf{B} u(t)$$

kde

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Rovnici pro výstup vyjádříme z definice stavových veličin

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + 0\, u(t).$$

Matice $\mathbf{D}$ je nulová a jedná se o tak zvaný **ryzí systém**. Pro výstupní matici dostáváme

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Je vhodné podotknout, že počáteční podmínky se transformují do stavového popisu jako

$$y(0) = x_1(0) = c_1 \quad \text{a} \quad y'(0) = x_2(0) = c_2.$$

3.4.2 *Obecný systém n-tého řádu*

Předpokládejme opět, že systém je popsán diferenciální rovnicí

$$y^{(n)}(t) + a_{n-1}y^{(n-1)}(t) + \cdots + a_1 y^{(1)}(t) + a_0 y(t) = u(t) \qquad (3.3)$$

Ukážeme nyní, jak se koeficienty diferenciální rovnice objeví ve stavových maticích. Postup je zobecněním předcházejícího příkladu.

Stavové veličiny volíme jako derivace hledaného řešení $y(t)$ takto

$$\begin{aligned}
x_1(t) &= y(t),\\
x_2(t) &= y'(t),\\
x_3(t) &= y''(t),\\
x_4(t) &= y^{(3)}(t),\\
&\vdots\\
x_n(t) &= y^{(n-1)}(t),
\end{aligned}$$

Ze soustavy a diferenciální rovnice plyne postupně

$$\begin{aligned}
x_1'(t) &= x_2(t),\\
x_2'(t) &= x_3(t),\\
&\vdots\\
x_{n-1}'(t) &= x_n(t),\\
x_n'(t) &= u(t) - a_0x_1(t) - a_1x_2(t) - \ldots - a_{n-1}x_n(t).
\end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} x_1'(t)\\ x_2'(t)\\ x_3'(t)\\ \vdots\\ x_n'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0\\ & & \vdots & & & \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & -a_3 & \ldots & -a_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t)\\ x_2(t)\\ x_3(t)\\ \vdots\\ x_n(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0\\ 0\\ 0\\ \vdots\\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

V souladu s obecným značením pro stavový popis LTI systémů označíme

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \ldots & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & \ldots & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & \ldots & 0\\ & & \vdots & & & \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & -a_3 & \ldots & -a_{n-1} \end{bmatrix}$$

a

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0\\ 0\\ 0\\ \vdots\\ 1 \end{bmatrix}.$$

Dále platí

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix},$$

takže

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

a

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}.$$

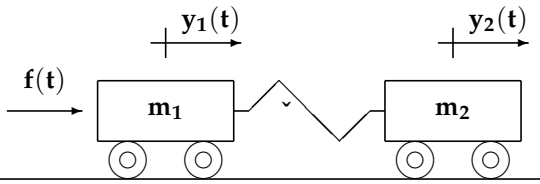
Počáteční podmínky mají tvar

$$\begin{aligned} y(0) &= x_1(0) = c_1, \\ y'(0) &= x_2(0) = c_2, \\ y''(0) &= x_3(0) = c_3, \\ &\vdots \\ y^{(n-1)}(0) &= x_n(0) = c_n. \end{aligned}$$

3.5 Příklad

3.5.1 Soustava dvou vozíků

Příklad 17 (Soustava dvou vozíků). Dva vozíky s hmotností m_1 a m_2 zobrazené na obrázku 3.10 jsou spojeny pružinou, která má koeficient pružnosti κ.



Obrázek 3.10: Dva vozíky diskutované v příkladu 17

Podle obrázku působí na první vozík hnací síla $f(t)$.

Polohy vozíků jsou $y_1(t)$ a $y_2(t)$, takže při zanedbání tření mají pohybové rovnice tvar

$$\begin{aligned} m_1\, y_1''(t) &= f(t) + \kappa\,(y_2(t) - y_1(t)) \\ m_2\, y_2''(t) &= -\kappa\,(y_2(t) - y_1(t)) \end{aligned}$$

Máme sestavit stavové rovnice pro systém dvou vozíků.

Položíme

$$\begin{aligned} x_1(t) &= y_1(t), & x_2(t) &= y_2(t), \\ x_3(t) &= y_1'(t), & x_4(t) &= y_2'(t) \end{aligned}$$

a dostáváme soustavu rovnic

$$\begin{aligned}
x_1'(t) &\equiv y_1'(t) = x_3(t),\\
x_2'(t) &\equiv y_2'(t) = x_4(t),\\
x_3'(t) &\equiv y_1''(t) = \frac{\kappa}{m_1}\,(x_2(t) - x_1(t)) + \frac{1}{m_1}\,f(t),\\
x_4'(t) &\equiv y_2''(t) = -\frac{\kappa}{m_2}\,(x_2(t) - x_1(t)).
\end{aligned}$$

kterou již snadno převedeme na stavový popis

$$\begin{bmatrix} x_1'(t)\\ x_2'(t)\\ x_3'(t)\\ x_4'(t)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ -\frac{\kappa}{m_1} & \frac{\kappa}{m_1} & 0 & 0\\ \frac{\kappa}{m_2} & -\frac{\kappa}{m_2} & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1(t)\\ x_2(t)\\ x_3(t)\\ x_4(t)\end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0\\ 0\\ \frac{1}{m_1}\\ 0\end{bmatrix} f(t)$$

a

$$y = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1(t)\\ x_2(t)\\ x_3(t)\\ x_4(t)\end{bmatrix}.$$

Máme matice stavového popisu ve tvaru

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ -\frac{\kappa}{m_1} & \frac{\kappa}{m_1} & 0 & 0\\ \frac{\kappa}{m_2} & -\frac{\kappa}{m_2} & 0 & 0\end{bmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0\\ 0\\ \frac{1}{m_1}\\ 0\end{bmatrix}$$

a

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

3.6 Diskrétní systémy

3.6.1 Systém druhého řádu

Diferenční rovnice druhého řádu s počátečními podmínkami ve tvaru

$$y[n+2] + \alpha_1\, y[n+1] + \alpha_0\, y[n] = u[n] \tag{3.4}$$

$$y(0) = \gamma_1 \quad \text{a} \quad y(1) = \gamma_2, \tag{3.5}$$

udává vztah vstupu $u[n]$ a výstupu $y[n]$ diskrétního LTI systému

Tento vnější popis převedeme na stavový popis volbou stavového vektoru

$$\begin{aligned} x_1[n] &= y[n]\,,\\ x_2[n] &= y[n+1]\,. \end{aligned}$$

Dosadíme za $y[n+1] = x_2[n]$ a $y(n+2) = x_2[n+1]$ do původní diferenční rovnice a je

$$x_2[n+1] = -\alpha_1\, x_2[n] - \alpha_0\, x_1[n] + u[n]\,. \tag{3.6}$$

Současně platí

$$x_1[n+1] = y[n+1] = x_2[n]\,. \tag{3.7}$$

Dostáváme tak

$$\begin{bmatrix} x_1[n+1]) \\ x_2[n+1] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\alpha_0 & -\alpha_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1[n] \\ x_2[n] \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u[n] \tag{3.8}$$

nebo

$$\begin{bmatrix} x_1[n+1]) \\ x_2[n+1] \end{bmatrix} = \mathbf{M} \begin{bmatrix} x_1[n] \\ x_2[n] \end{bmatrix} + \mathbf{N}\, u[n], \tag{3.9}$$

resp.

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\alpha_0 & -\alpha_1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{N} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Rovnici pro výstup vyjádříme z definice stavových veličin

$$y[n] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1[n] \\ x_2[n] \end{bmatrix} + 0\, u[n]\,. \tag{3.10}$$

Matice **D** je tedy nulová a pro výstupní matici dostáváme

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}\,. \tag{3.11}$$

Lineární systém, který má matici **D** nulovou, se nazývá ryzí systém. Je vhodné podotknout, že počáteční podmínky se transformují do stavového popisu takto

$$y(0) = \gamma_1 = x_1(0) \quad \text{a} \quad y(1) = \gamma_2 = x_2(0).$$

... podobně diferencální rovnice druhého řádu s počátečními podmínkami ve tvaru

$$\ddot{y}(t) + a_1\, \dot{y}(t) + a_0\, y(t) = u(t) \tag{3.12}$$

$$y(t)|_{t=0+} = c_1 \quad \text{a} \quad \dot{y}(t)|_{t=0+} = c_2, \tag{3.13}$$

udává vztah vstupu $u(t)$ a výstupu $y(t)$ spojitého LTI systému

Tento vnější popis převedeme na stavový popis volbou stavového vektoru

$$\begin{aligned} x_1(t) &= y(t)\,, \\ x_2(t) &= \dot{y}(t)\,. \end{aligned}$$

Použijeme $\dot{y}(t) = x_2(t)$ a je $\ddot{y}(t) = \dot{x}_2(t)$, Tento vztah dosadíme do původní diferenciální rovnice a je

$$\dot{x}_2(t) = -a_1\, x_2(t) - a0\, x_1(t) + u(t)\,. \tag{3.14}$$

Současně platí

$$\dot{x}_1(t) = \dot{y}(t) = x_2(t)\,. \tag{3.15}$$

Dostáváme tak

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t)) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \tag{3.16}$$

nebo

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t)) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \mathbf{A} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \mathbf{B}\, u(t), \tag{3.17}$$

resp.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Rovnici pro výstup vyjádříme z definice stavových veličin

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + 0\, u(t)\,. \tag{3.18}$$

Matice **D** je tedy nulová a pro výstupní matici dostáváme

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}\,. \tag{3.19}$$

Počáteční podmínky se transformují do stavového popisu takto

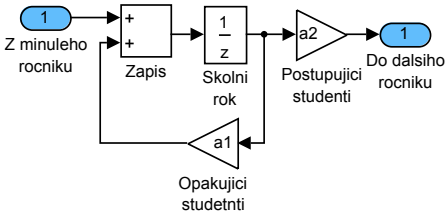
$$y(t)|_{t=0+} = c_1 = x_1(t)|_{t=0+} \quad \text{a} \quad \dot{y}(t)|_{t=0+} = c_2 = x_2(t)|_{t=0+}$$

3.7 Příklad stavového modelu z reálného světa

3.7.1 Model fakulty

Vznik nové fakulty a hledání odpovědí na různé otázky související s počty studentů jsou ukázkou diskrétního stavového systému, ve kterém složka stavového vektoru x_i reprezentuje počet studentů v i-tém ročníku. Předpokládejme dále, že do prvního ročníku budeme přijímat pravidelně každý rok $u[n]$ studentů.

- Jestliže z každého ročníku postoupí bez potíží $a_1 x_i$ studentů, opakuje $a_2 x_i$ studentů a fakultu opustí $a_3 x_i$ studentů, kde $a_1 + a_2 + a_3 = 1$, nalezněte počty absolventů, pokud úspěšnost u státních závěrečných zkoušek je a, pro které platí $a \equiv a_1^{(5)}$.
- Nalezněte celkový počet studentů, kteří studují v jednom akademickém roce na fakultě.



Obrázek 3.11: Model jednotlivého ročníku fakulty

Stavový popis této vzorové situace je

$$\begin{bmatrix} x_1[n+1] \\ x_2[n+1] \\ x_3[n+1] \\ x_4[n+1] \\ x_5[n+1] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_2^{(1)} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_1^{(1)} & a_2^{(2)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_1^{(2)} & a_2^{(3)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_1^{(3)} & a_2^{(4)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_1^{(4)} & a_2^{(5)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1[n] \\ x_2[n] \\ x_3[n] \\ x_4[n] \\ x_5[n] \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u[n]$$

$$y[n] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1[n] \\ x_2[n] \\ x_3[n] \\ x_4[n] \\ x_5[n] \end{bmatrix}.$$

Nebo se můžeme ptát, jaký je celkový počet studentů na fakultě v určitém roce. Potom pro výstup obdržíme

$$y[n] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1[n] \\ x_2[n] \\ x_3[n] \\ x_4[n] \\ x_5[n] \end{bmatrix}.$$

Část II

Matematické nářadí

4 Fourierova transformace

Matematické nástroje pro reprezentaci a analýzu LTI systémů, které jsme si doposud ukazovali, jsou založeny na reprezentaci vztahu vstup-výstup pomocí konvoluce a na reprezentaci signálů jako lineární kombinace vzájemně posunutých a škálovaných impulsů.

Ukážeme si nyní, že podobným způsobem, jako v předcházejících přednáškách, lze signály reprezentovat jako lineární kombinaci komplexních exponenciál. Výsledkem takovéto reprezentace je potom tak zvaná **Fourierova transformace**, jež převádí signál z časové do frekvenční roviny.

4.0.2 *Komplexní exponenciála*

Důležitost komplexních exopnenciálních funkcí při studiu LTI systémů plyne z faktu, že odezva LTI systému na takovýto signál je ta samá komplexní exponenciála, pouze se změněnou amplitudou[1]. Platí tedy

[1] Jak jsme si říkali, LTI systém nedokáže změnit frekvenci vstupního signálu.

$$\text{spojitý systém: } e^{st} \longrightarrow H(s) \cdot e^{st}$$
$$\text{diskrétní systém: } z^n \longrightarrow H(z) \cdot z^n$$

kde $H(s)$ respektive $H(z)$ je komplexní škálovací faktor, jež obecně může záviset na komplexní proměnné s nebo z.

Signál, pro nějž je výstup systému roven vstupu až na násobení konstantou, nazýváme **vlastní funkce** systému a odpovídající škálovací faktor pak nazýváme **vlastní číslo** systému.

Ukažme si nyní, že komplexní exponenciála je opravdu vlastní funkcí LTI systému: Uvažujme spojitý LTI systém s impulsní odezvou $h(t)$ a vstupním signálem $u(t) = e^{st}$, kde $s \in \mathbb{C}$. Výstup je dán konvolučním integrálem

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)\, u(t-\tau)\, \mathrm{d}\tau = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)\, e^{s(t-\tau)}\, \mathrm{d}\tau.$$

Platí $e^{s(t-\tau)} = e^{st}e^{-s\tau}$ a člen e^{st} nezávisí na integrandu, je tedy

$$y(t) = e^{st} \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)\, e^{-s\tau}\, \mathrm{d}\tau. \tag{4.1}$$

Předpokládejme nyní bez další hlubší analýzy (která je ovšem zcela na místě), že integrál na pravé straně rovnice (4.1) konverguje k

nějaké hodnotě, závislé v obecném případě na s. V takovém případě je odezva systému na vstupní signál $u(t) = e^{st}$ rovna

$$y(t) = H(s) \cdot e^{st},$$

kde $H(s)$ je komplexní konstanta závisející jednak na s a jednak na impulsní odezvě systému vztahem

$$H(s) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)\, e^{-s\tau}\, \mathrm{d}\tau.$$

Ukázali jsme si tedy, že komplexní exponenciála e^{st} je opravdu vlastní funkcí spojitých LTI systémů. Konstanta $H(s)$ pro nějakou konkrétní hodnotu s je potom vlastním číslem systému spojeným s vlastní funkcí e^{st}.

Jak uvidíme později, to samé lze ukázat i pro diskrétní systémy.

Pro imaginární hodnoty s, tedy pro $s = i\omega$, odpovídá $H(s)$ Fourierově transformaci signálu impulsní odezvy $h(t)$.

5 Laplaceova transformace

V minulém odstavci jsme si ukázali, že pro imaginární s odpovídá $H(s)$ Fourierově transformaci signálu impulsní odezvy $h(t)$. Pokud budeme uvažovat namísto ryze imaginárních komplexních hodnot obecná komplexní čísla p, bude výsledkem generalizace Fourierovy transformace – tak zvaná **Laplaceova transformace**.

5.1 Dopředná Laplaceova transformace

5.1.1 Důvody použití

Laplaceova transformace významně zjednodušuje některé operace v oblasti analýzy spojitých LTI systémů, například

- *derivace* $\Rightarrow$ *násobení* proměnnou p
- *integrace* $\Rightarrow$ *dělení* proměnnou p
- *diferenciální rovnice* n-tého řádu s konstantními koeficienty $\Rightarrow$ *algebraické rovnice* n-tého řádu
- *konvoluce* $f(t) * g(t) \Rightarrow$ *součin* $F(p) \cdot G(p)$

5.1.2 Definice

Definice 18 (Laplaceova transformace)**.** Laplaceova transformace funkce $f(t)$, která je *nanejvýš polynomiálního růstu*

$$f(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \cdots + a_n t^n$$

je definována integrálem

$$F(p) = \int_0^\infty f(t) e^{-pt} \, \mathrm{d}t \equiv \mathcal{L}\left\{f(t)\right\}. \tag{5.1}$$

Funkci $f(t)$ nazýváme **vzorem** a funkci $F(p)$ Laplaceovým **obrazem**.

Zpětná Laplaceova transformace má tvar integrálu podél křivky v komplexní rovině p

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} F(p) \, e^{pt} \, \mathrm{d}p \equiv \mathcal{L}^{-1}\left\{F(p)\right\}. \tag{5.2}$$

Praktické počítání zpětné Laplaceovy transformace vychází z residuové věty, která pro racionálně lomené funkce v proměnné p vede v operátorovém počtu na **Heavisideovu větu**. Tento postup si podrobně ukážeme v příští přednášce.

Obrázek 5.1: Oliver Heaviside, 1850-1925

5.1.3 *Vlastnosti*

Věta 19 (Linearita). *Laplaceova transformace je lineární:*

$$\mathcal{L}\left\{\sum_k a_k f_k(t)\right\} = \sum_k a_k \mathcal{L}\left\{f_k(t)\right\} = \sum_k a_k F_k(p)$$
$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\sum_m b_m F_m(p)\right\} = \sum_m b_m \mathcal{L}^{-1}\left\{F_m(p)\right\} = \sum_m b_m f_m(t)$$

Věta 20 (O změně měřítka). *Pro $F(p) = \mathcal{L}\{f(t)\}$ je*

$$\mathcal{L}\{f(at)\} = \frac{1}{a} F\left(\frac{p}{a}\right)$$

Důkaz. Substitucí $at = \tau$

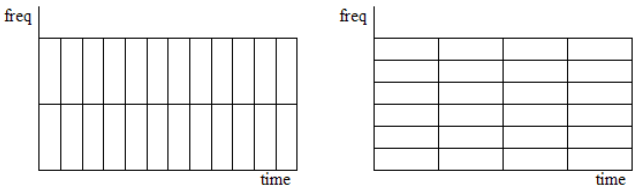
$$\mathcal{L}\{f(at)\} = \int_0^\infty f(at)e^{-pt}\,\mathrm{d}t = \int_0^\infty f(\tau)e^{-\frac{p}{a}\tau}\frac{1}{a}\,\mathrm{d}\tau = \frac{1}{a}F\left(\frac{p}{a}\right)$$

□

Věta o změně měřítka platí samozřejmě i obráceně pro $b = 1/a$:

$$\frac{1}{b} f\left(\frac{t}{b}\right) = \mathcal{L}^{-1}\{F(bp)\}$$

Všechny integrální transformace (Laplace, Fourier, Wavelets) podléhají Hesienbergově principu neurčitosti v časovém a kmitočtovém rozlišení.



Obrázek 5.2: Časově-kmitočtové rozlišení

Věta 21 (O posunutí). *Je-li $F(t) = \mathcal{L}\{f(t)\}$, pak*

$$\mathcal{L}\{\mathbf{1}(t-\tau)f(t-\tau)\} = e^{-p\tau}\mathcal{L}\{f(t)\} = e^{-p\tau}F(p).$$

Důkaz. Substitucí $t - \tau = \vartheta$ obdržíme

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{f(t-\tau)\} &= \int_0^\infty f(t-\tau)e^{-pt}\,\mathrm{d}t = \int_{-\tau}^\infty f(\vartheta)e^{-p(\tau+\vartheta)}\,\mathrm{d}\vartheta \\ &= e^{-p\tau}\int_{-\tau}^{-0} f(\vartheta)e^{-p\vartheta}\,\mathrm{d}\vartheta + e^{-p\tau}\int_0^\infty f(\vartheta)e^{-p\vartheta}\,\mathrm{d}\vartheta \\ &= e^{-p\tau}\int_0^\infty f(\vartheta)e^{-p\vartheta}\,\mathrm{d}\vartheta \equiv e^{-p\tau}F(p)\end{aligned}$$

□

Velice často se můžeme setkat se zápisem věty o posunutí ve tvaru

$$\mathcal{L}\{f(t-\tau)\} = e^{-p\tau} F(p). \tag{5.3}$$

Tento zápis je zcela korektní za předpokladu, že dodržíme následující podmínku definice jednostranné Laplaceovy transformace: definiční obor transformované funkce $f(t)$ je $t \geq 0$, pro $t < 0$ volíme $f(t) = 0$. Jednostranná transformace neposunté funkce funguje i bez této podmínky, neboť definiční integrál zahrnuje pouze nezáporné hodnoty t, v případě posunu parametru funkce o výše uvedené τ se ale dostáváme do problémů, způsobených nejednoznačností výše uvedeného zápisu. Demonstrujme si tyto problémy na následujícím příkladu.

Příklad 22 (Blíže o větě o posunutí). Laplaceův obraz funkce $f(t) = \frac{1}{2}t^2$ je

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \mathcal{L}\left\{\frac{1}{2}t^2\right\} = \frac{1}{p^3}.$$

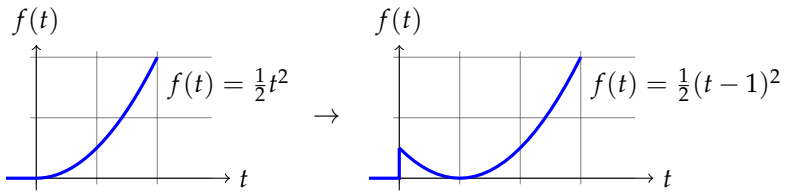
Jak to ale bude v případě, že budeme počítat obraz té samé funkce, posunuté o $\tau = 1$, tedy $f(t-1) = \frac{1}{2}(t-1)^2$?

Řešení:

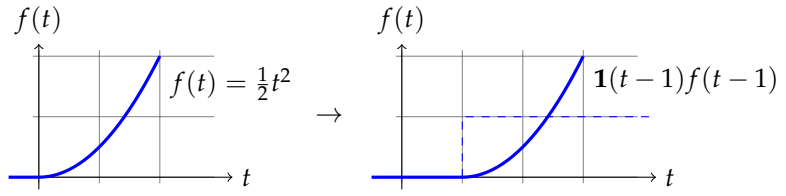
Pokud zvolíme podle (5.3)

$$\mathcal{L}\{f(t-1)\} = \mathcal{L}\left\{\frac{1}{2}(t-1)^2\right\} = \mathcal{L}\left\{\frac{1}{2}(t^2-2t+1)\right\} = \frac{1}{p^3} - \frac{1}{p^2} + \frac{1}{p}$$

odpovídá průběh naší transformované $f(t-1)$ obrázku



a to není to, co potřebujeme: z pravého grafu vidíme, že takto vyjádřená funkce $f(t-1)$ nabývá nenulových hodnot i pro záporné hodnoty argumentu, kokrétně pro $0 < t < 1$. Korektní způsob naznačuje následující obrázek:



Tomu odpovídá zápis transformace posunuté funkce, obsahující posunutý jednotkový skok

$$\mathcal{L}\{\mathbf{1}(t-1)\cdot f(t-1)\} = e^{-p}\cdot\mathcal{L}\{f(t)\} = e^{-p}\cdot\mathcal{L}\left\{\frac{1}{2}t^2\right\} = e^{-p}\cdot\frac{1}{p^3}.$$

Ukazuje se tedy, že je vhodnější a názornější zapisovat větu o posuntí argumentu ve tvaru

$$\mathcal{L}\{\mathbf{1}(t-\tau)\cdot f(t-\tau)\} = e^{-p\tau}F(p). \tag{5.4}$$

Věta 23 (O konvoluci)**.**

$$\mathcal{L}\{f(t)*g(t)\} = \mathcal{L}\left\{\int_0^\infty f(t-\tau)\cdot g(\tau)\,d\tau\right\} = F(p)\cdot G(p)$$

Důkaz se snáze provádí v diskrétním čase.

Důsledek

$$\mathcal{L}\left\{y(t) = \int_0^\infty h(\tau)\cdot u(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau\right\} \Leftrightarrow Y(p) = H(p)\cdot U(p)$$

Věta 24 (O obrazu derivace funkce)**.**

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{f(t)\} &= F(p)\\
\mathcal{L}\left\{\frac{d}{dt}f(t)\right\} &= pF(p) - f(0)\\
\mathcal{L}\left\{\frac{d^2}{dt^2}f(t)\right\} &= p^2F(p) - pf(0) - \frac{d}{dt}f(0)\\
&\vdots\\
\mathcal{L}\left\{\frac{d^n}{dt^n}f(t)\right\} &= p^nF(p) - p^{n-1}f(0) - p^{n-2}\frac{d}{dt}f(0)\ldots - f^{(n-1)}(0)
\end{aligned}$$

Důkaz. Integrováním per partes, $\int_a^b u'v = [uv]_a^b - \int_a^b uv'$:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\left\{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}f(t)\right\} &= \int_0^\infty \frac{d}{dt}f(t)e^{-pt}\,\mathrm{d}t\\
&= \left[f(t)e^{-pt}\right]_0^\infty - (-p)\int_0^\infty f(t)e^{-pt}\,\mathrm{d}t\\
&= -f(0) + pF(p).
\end{aligned}$$

Opakováním tohoto procesu získáme postupně

$$\mathcal{L}\left\{\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}f(t)\right\} = p^2F(p) - pf(0+) - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}f(0+)$$

□

Věta 25 (O obrazu integrálu funkce)**.**

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(\tau)\,d\tau\right\} = \frac{1}{p}F(p)$$

Důkaz. Integrováním per partes, $\int_a^b uv' = [uv]_a^b - \int_a^b u'v$:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(\tau)\,\mathrm{d}\tau\right\} &= \int_0^\infty \left(\int_0^t f(\tau)\,\mathrm{d}\tau\right)e^{-pt}\,\mathrm{d}t\\
&= \frac{1}{-p}\left[\int_0^t f(\tau)\,\mathrm{d}\tau e^{-pt}\right]_0^\infty - \frac{1}{-p}\int_0^\infty f(t)e^{-pt}\,\mathrm{d}t\\
&= \frac{1}{p}F(p).
\end{aligned}$$

V důkazu jsme využili toho, že $f(t)$ má polynomiální ■ **ale mohl by to být i nejvýše exponenciální, ne?** ■ růst a proto

$$\lim_{t\to\infty}\int_0^t f(\tau)\,\mathrm{d}\tau e^{-pt}=0.$$

□

5.1.4 *Tabulky Laplaceovy transformace*

Tabulky Laplaceových obrazů základních funkcí lze odvodit z definičních vzorců postupnými aplikacemi definičního vzorce či využitím kombinací již známých obrazů. Uveďme si několik příkladů:

Pro Diracův impuls platí

$$f(t)=\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t-\tau)f(\tau)\,\mathrm{d}\tau$$

a proto je Laplaceova transformace Diracova impulsu $\delta(t)$ rovna

$$\mathcal{L}\{\delta(t)\}=\int_0^{\infty}\delta(t)e^{-pt}\,\mathrm{d}t=e^{-p\cdot 0}=1.$$

Obdobně pro jednotkový skok je

$$\mathcal{L}\{\mathbf{1}(t)\}=\int_0^{\infty}\mathbf{1}(t)e^{-pt}\,\mathrm{d}t=\int_0^{\infty}e^{-pt}=\left[-\frac{1}{p}e^{-pt}\right]_0^{\infty}=0-\left(-\frac{1}{p}\right)=\frac{1}{p}.$$

Zde jsme si pomohli faktem, že pro $t>0$ je $\mathbf{1}(t)=1$ a z hlediska výše uvedeného integrálu se chová jako konstanta.

$f(t)=\mathcal{L}^{-1}\{F(p)\}$	$F(p)=\mathcal{L}\{f(t)\}$
$f(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}F(p)\,e^{pt}\,\mathrm{d}p$	$F(p)=\int_0^{\infty}f(t)\,e^{-pt}\,\mathrm{d}t$
$\delta(t)$	1
$\mathbf{1}(t)$	$\frac{1}{p}$

Pro exponenciální funkci s parametrem $\alpha\in\mathbb{R},\alpha>0$ máme obdobně, jako pro jednotkový skok

$$\mathcal{L}\{e^{-\alpha t}\}=\int_0^{\infty}e^{-\alpha t}e^{-pt}\,\mathrm{d}t=\int_0^{\infty}e^{-(p+\alpha)t}=\left[-\frac{1}{p+\alpha}e^{-(p+\alpha)t}\right]_0^{\infty}=0-\left(-\frac{1}{p+\alpha}\right)=\frac{1}{p+\alpha}.$$

Pro základní trigonometrické funkce platí v komplexním oboru Eulerův vztah

$$e^{i\omega t}=\cos\omega t+i\sin\omega t$$

a proto také

$$\sin \omega t = \frac{1}{2i}\left(e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}\right)$$
$$\cos \omega t = \frac{1}{2}\left(e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}\right)$$

a odsud pro sinus

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\left\{\sin \omega t\right\} &= \frac{1}{2i}\mathcal{L}\left\{e^{i\omega t}\right\} - \frac{1}{2i}\mathcal{L}\left\{e^{-i\omega t}\right\} = \\ &= \frac{1}{2i}\frac{1}{p - \imath\omega} - \frac{1}{2}\frac{1}{p + \imath\omega} = \frac{1}{2i}\frac{p + \imath\omega - p + \imath\omega)}{p^2 + \omega^2} = \\ &= \frac{\omega}{p^2 + \omega^2}.\end{aligned}$$

a analogicky

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\left\{\cos \omega t\right\} &= \frac{1}{2}\mathcal{L}\left\{e^{i\omega t}\right\} + \frac{1}{2i}\mathcal{L}\left\{e^{-i\omega t}\right\} = \\ &= \frac{1}{2}\frac{1}{p - \imath\omega} + \frac{1}{2}\frac{1}{p + \imath\omega} = \frac{1}{2}\frac{p + \imath\omega + p - \imath\omega}{p^2 + \omega^2} = \\ &= \frac{p}{p^2 + \omega^2}.\end{aligned}$$

$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{F(p)\right\}$	$F(p) = \mathcal{L}\left\{f(t)\right\}$
$e^{-\alpha t}$	$\frac{1}{p + \alpha}$
$\sin \omega t$	$\frac{\omega}{p^2 + \omega^2}$
$\cos \omega t$	$\frac{p}{p^2 + \omega^2}$

Pro $x(t) = t$ lze Laplaceův obraz určit také relativně jednoduše, pokud si uvědomíme, že argument integrálu lze vyjádřit jako

$$te^{-pt} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}p}e^{-pt}.$$

Můžeme proto psát

$$\mathcal{L}\left\{t\right\} = \int_0^\infty te^{-pt}\,\mathrm{d}t = \int_0^\infty -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}p}e^{-pt}\,\mathrm{d}t = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}p}\int_0^\infty e^{-pt}\,\mathrm{d}t = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}p}\frac{1}{p} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}p}p^{-1} = p^{-2} = \frac{1}{p^2}.$$

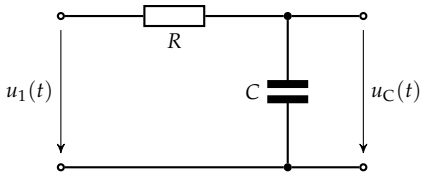
$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(p)\}$	$F(p) = \mathcal{L}\{f(t)\}$
$e^{-\alpha t}\sin\omega t$	$\dfrac{\omega}{(p+\alpha)^2+\omega^2}$
$e^{-\alpha t}\cos\omega t$	$\dfrac{p+\alpha}{(p+\alpha)^2+\omega^2}$
t^n	$\dfrac{n!}{p^{n+1}}$

■ tabulky jako booktabs? ■

$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(p)\}$	$F(p) = \mathcal{L}\{f(t)\}$
$t^n e^{-\alpha t}$	$\dfrac{n!}{(p+\alpha)^{n+1}}$
$t\cos\omega t$	$\dfrac{p^2-\omega^2}{(p^2+\omega^2)^2}$
$t\sin\omega t$	$\dfrac{2\omega p}{(p^2+\omega^2)^2}$

5.2 Příklady použití Laplaceovy transformace

Příklad 26 (Integrační RC článek). Hledejme odezvu integračního RC článku znázorněného na obrázku 5.3 na vstupní signál.



Obrázek 5.3: RC článek, viz první přednáška

Diferenciální rovnici jsme si již odvodili v první přednášce:

$$RC\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}u_C(t) + u_C(t) = u_1(t).$$

Pro $\alpha = \dfrac{1}{RC}$ a vstupní $u_1(t) = U_0 \cdot \mathbf{1}(t)$ je

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}y(t) + \alpha y(t) = \alpha U_0 \cdot \mathbf{1}(t).$$

Protože je to diferenciální rovnice s konstantními koeficienty, můžeme použít Laplaceovu transformaci a její vlastnosti

$$\mathcal{L}\left\{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}y(t) + \alpha y(t) = \alpha U_0 \cdot \mathbf{1}(t)\right\},$$

což upravíme postupně na

$$\mathcal{L}\left\{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}y(t)\right\} + \mathcal{L}\left\{\alpha y(t)\right\} = \mathcal{L}\left\{\alpha U_0 \cdot \mathbf{1}(t)\right\},$$

a dále na

$$\mathcal{L}\left\{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}y(t)\right\} + \alpha\,\mathcal{L}\left\{y(t)\right\} = \alpha U_0\,\mathcal{L}\left\{\mathbf{1}(t)\right\},$$

a obdržíme algebraickou rovnici pro neznámou $Y(p)$

$$pY(p) - y(0) + \alpha Y(p) = \alpha U_0 \cdot \frac{1}{p}.$$

Rovnici upravíme tak, že neznámá bude na levé straně a všechny známé konstanty na straně pravé

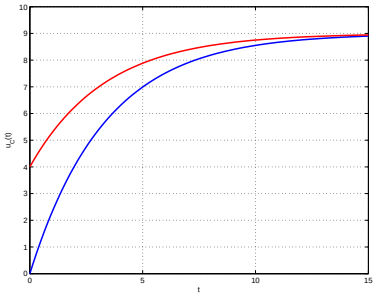
$$(p+\alpha)Y(p) = \frac{\alpha U_0}{p} + y(0).$$

a nalezneme řešení v rovině p

$$Y(p) = \frac{\alpha U_0}{p(p+\alpha)} + \frac{y(0)}{p+\alpha} = \frac{U_0}{p} - \frac{U_0}{p+\alpha} + \frac{y(0)}{p+\alpha}$$

S pomocí tabulek pak můžeme nalézt pro $t > 0$ řešení

$$y(t) = U_0\left(1 - e^{-\alpha t}\right) + y(0)e^{-\alpha t}$$



Obrázek 5.4: Průběh napětí na výstupu RC článku v závislosti na hodnotě počátečního stavu, tedy zbytkového napětí $y(0) = 0\,\mathrm{V}$ (modře) a $y(0) = 4\,\mathrm{V}$ (červeně)

Příklad 27 (Impulsní odezva LTI systému). Uvažujte LTI systém, který je pro $t > 0$ popsán naměřenými hodnotami vstupu

$$u(t) = e^{-t} + e^{-3t}$$

a výstupu

$$y(t) = te^{-3t}.$$

Jak nalezneme *impulsní odezvu*?

Protože platí

$$U(p) = \frac{1}{p+1} + \frac{1}{p+3} = 2\frac{p+2}{(p+1)(p+3)}$$
$$Y(p) = \frac{1}{(p+3)^2}$$

a protože

$$Y(p) = H(p) \cdot U(p),$$

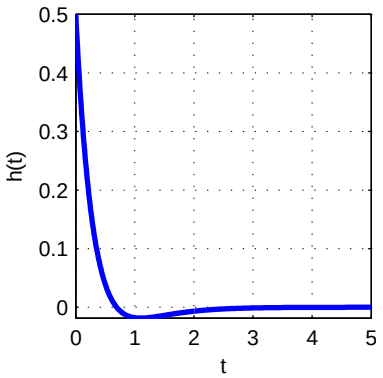
je

$$H(p) = \frac{Y(p)}{U(p)} = \frac{1}{2}\frac{p+1}{(p+2)(p+3)} = \frac{1}{2}\left[\frac{2}{p+3} - \frac{1}{p+2}\right].$$

S pomocí tabulek pak můžeme nalézt pro $t > 0$ řešení

$$h(t) = e^{-3t} - \frac{1}{2}e^{-2t}.$$

jehož graf je znázorněn na obrázku 5.5.



Obrázek 5.5: Impulsní odezva systému z příkladu 27

5.3 Zpětná Laplaceova transformace

5.3.1 Definice

Již jsme si řekli, že zpětná Laplaceova transformace má tvar integrálu podél křivky v komplexní rovině p

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} F(p)\, e^{pt}\, \mathrm{d}p \equiv \mathcal{L}^{-1}\{F(p)\}\,.$$

Pro *racionální lomené funkce v proměnné* p budeme postupovat jinak.

5.3.2 Rozklad na parciální zlomky

$f(t) \Rightarrow$	$\Leftarrow \quad F(p)$
$e^{-\alpha t}$	$\dfrac{1}{p+\alpha}$
$e^{-\alpha t}\cos\omega t$ $= \dfrac{e^{-(\alpha-\imath\omega)t} + e^{-(\alpha+\imath\omega)t}}{2}$	$\dfrac{p+\alpha}{(p+\alpha)^2+\omega^2}$ $= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p+\alpha-\imath\omega} + \frac{1}{p+\alpha+\imath\omega}\right)$
$e^{-\alpha t}\sin\omega t$ $= \dfrac{e^{-(\alpha-\imath\omega)t} - e^{-(\alpha+\imath\omega)t}}{2\imath}$	$\dfrac{\omega}{(p+\alpha)^2+\omega^2}$ $= \frac{1}{2\imath}\left(\frac{1}{p+\alpha-\imath\omega} - \frac{1}{p+\alpha+\imath\omega}\right)$

Odbočka ■ **možná lépe přesunout k Hevidsideovi a k diskusi o Laplaceově transformaci** ■: Výsledky Hevisideovy práce se tady ohánime hlavně z toho důvodu, že on byl (pokud je mi známo) první, kdo navrhl ucelený postup řešení jednoduchých diferenciálních rovnic pomocí **operátorového počtu**.

Operátorový počet, tedy alternativní metoda reprezentace operací derivace a integrování jakýmsi zvoleným operátorem, je v oblasti matematické analýzy znám už od 17. století. Heaviside pro své výpočty používal operátor p ve významu

$$p = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$$
$$p^2 = \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}$$
$$p^{-1} = \int \mathrm{d}\tau$$

což 1:1 odpovídá tehdy ještě neznámé Laplaceově transformaci.

Výsledkem operátorového zápisu diferenciálních rovnic bylo (analogicky s našimi výsledky, jichž jsme dosáhli Laplaceovou

transformací) vyjádření obrazu výstupu systému ve tvaru racionální lomené funkce,

$$R(p) = \frac{Q(p)}{N(p)} = \frac{b_m p^m + b_{m-1} p^{m-1} + \cdots + b_1 p + b_0}{a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \cdots + a_1 p + a_0} \tag{5.5}$$

pro nějaké konstanty $a_0, \ldots, a_n$ a $b_0, \ldots, b_m$, u níž předpokládáme, že $\lim_{p\to\infty} R(p) = 0$ – to je zaručeno vždy, když je $m < n$, tedy když stupeň polynomu v čitateli je nižší, než stupeň polynomu ve jmenovateli.

Ze základních kurzů algebry víme, že zlomek (5.5) lze vyjádřit jako součet **parciálních zlomků**, což jsou jednoduché zlomky s konstantou v čitateli a jedním kořenem $N(p)$ ve jmenovateli.

O racionální lomené funkci $\frac{Q(p)}{N(p)}$ říkáme, že má nulové body $p_{0\nu}$, jestliže $Q(p_{0\nu}) = 0$ a že má póly $p_{\infty\mu}$, jestliže $N(p_{\infty\mu}) = 0$.

Pokud má funkce $\frac{Q(p)}{N(p)}$ jednoduché póly, potom

$$N(p) = \prod_{\mu=1}^{n} (p - p_{\infty\mu}) = (p - p_{\infty 1})(p - p_{\infty 2}) \ldots (p - p_{\infty n}).$$

Příklad 28 (Racionální lomená funkce). Jestliže

$$N(p) = p^3 + 3p^2 + 6p + 4 = (p+1)(p^2 + 2p + 4)$$

určete rozklad na kořenové činitele.

Je samozřejmě

$$N(p) = (p+1)(p^2 + 2p + 4) = (p+1)(p + 1 + \imath\sqrt{3})(p + 1 - \imath\sqrt{3})$$

takže platí

$$N(p) = \prod_{\mu=1}^{3} (p - p_\mu) = (p - p_1)(p - p_2)(p - p_3).$$

Póly v tomto případě jsou

$$\begin{aligned} p_1 &= -1 \\ p_2 &= -1 - \imath\sqrt{3} \\ p_3 &= -1 + \imath\sqrt{3} \end{aligned}$$

a platí $N(p_1) \equiv N(-1) = 0$ atd.

Z tohoto příkladu plyne první krok, který musíme při zpětné Laplaceově transformaci provést: nalezení kořenů polynomu ve jmenovateli racionální funkce $N(p)$

5·3·3 *Zakrývací pravidlo pro jednoduché póly*

Rozklad racionální lomené funkce na parciální zlomky má tvar

$$\begin{aligned}\frac{Q(p)}{N(p)} &= \sum_{\mu=1}^{n} \frac{k_\mu}{p - p_{\infty\mu}} \\ &= \frac{k_1}{p - p_{\infty 1}} + \frac{k_2}{p - p_{\infty 2}} + \cdots + \frac{k_n}{p - p_{\infty n}} \\ &\equiv \frac{k_1}{p - p_1} + \frac{k_2}{p - p_2} + \cdots + \frac{k_n}{p - p_n},\end{aligned}$$

kde k_μ se nazývají **residua**.

Pro residua platí

$$\begin{aligned}k_\mu &= \lim_{p \to p_{\infty\mu}} (p - p_{\infty\mu}) \frac{Q(p)}{N(p)} \\ &= Q(p_{\infty\mu}) \lim_{p \to p_{\infty\mu}} (p - p_{\infty\mu}) \frac{1}{N(p)} \\ &= Q(p_{\infty\mu}) \lim_{p \to p_{\infty\mu}} \frac{1}{\frac{N(p)}{p - p_{\infty\mu}}} \\ &= Q(p_{\infty\mu}) \frac{1}{N'(p_{\infty\mu})}\end{aligned}$$

Pro jednoduchost budeme dále psát $p_{\infty\mu} \to p_\mu$. Protože platí

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{p - \alpha}\right\} = e^{\alpha t},$$

dostaneme

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{Q(p)}{N(p)}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\sum_{\mu=1}^{n} \frac{k_\mu}{p - p_\mu}\right\} = \sum_{\mu=1}^{n} k_\mu e^{p_\mu t}.$$

Tím jsme dokázali tzv. **Heavisideův vzorec** pro zpětnou transformaci racionální lomené funkce s jednoduchými póly

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{Q(p)}{N(p)}\right\} = \sum_{\mu} \frac{Q(p_\mu)}{N'(p_\mu)} e^{p_\mu t}$$

Příklad 29 (Jednoduché póly). Laplaceův obraz impulsní odezvy systému je

$$H(p) = \frac{6}{p^3 + 3p^2 + 6p + 4} = \frac{6}{(p+1)(p^2 + 2p + 4)}.$$

Určete $h(t)$.

Řešení: Nejprve rozložíme

$$\begin{aligned}H(p) &= \frac{6}{(p+1)(p^2 + 2p + 4)} \\ &= \frac{k_1}{p+1} + \frac{k_2}{p + 1 + \imath\sqrt{3}} + \frac{k_3}{p + 1 - \imath\sqrt{3}}.\end{aligned}$$

Platí

$$\begin{aligned}
k_1 &= \lim_{p\to -1} \frac{6}{p^2+2p+4} = \frac{6}{1-2+4} = \frac{6}{3} = 2,\\
k_2 &= \lim_{p\to -1-\imath\sqrt{3}} \frac{6}{(p+1)(p+1-\imath\sqrt{3})}\\
&= \frac{6}{(-1-\imath\sqrt{3}+1)(-1-\imath\sqrt{3}+1-\imath\sqrt{3})}\\
&= \frac{6}{(-\imath\sqrt{3})(-\imath 2\sqrt{3})} = -1,\\
k_3 &= \lim_{p\to -1-\imath\sqrt{3}} \frac{6}{(p+1)(p+1+\imath\sqrt{3})}\\
&= \frac{6}{(-1+\imath\sqrt{3}+1)(-1+\imath\sqrt{3}+1+\imath\sqrt{3})}\\
&= \frac{6}{(\imath\sqrt{3})(\imath 2\sqrt{3})} = -1.
\end{aligned}$$

5·3·4 *Násobné póly*

Jestliže $N(p) = (p-p_1)^{\beta_1}(p-p_2)^{\beta_2}\dots(p-p_n)^{\beta_n}$ má násobné kořeny s násobností β_i, musíme předchozí postup modifikovat, protože platí

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\left\{e^{-\alpha t}\right\} &= \frac{1}{p+\alpha}\\
\mathcal{L}\left\{te^{-\alpha t}\right\} &= \frac{1!}{(p+\alpha)^2}\\
\mathcal{L}\left\{t^2e^{-\alpha t}\right\} &= \frac{2!}{(p+\alpha)^3}\\
&\vdots\\
\mathcal{L}\left\{t^ne^{-\alpha t}\right\} &= \frac{n!}{(p+\alpha)^{n+1}}
\end{aligned}$$

Je zřejmé, že v inverzní transformaci hrají výsadní roli póly racionální lomené funkce. Proto se v dalším můžeme zabývat pouze takovými racionálně lomenými funkcemi, jejichž čitatel je jednotkový

$$H(p) = \frac{1}{N(p)}.$$

Jestliže tedy

$$N(p) = (p-p_1)^{\beta_1}(p-p_2)^{\beta_2}\dots(p-p_n)^{\beta_n}$$

má násobné kořeny, potom inverzní Laplaceova transformace má tvar

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{N(p)}\right\} &= e^{p_1 t}\left[k_1^{(1)} + k_1^{(2)}\frac{t}{1!} + \dots + k_1^{(\beta_1)}\frac{t^{\beta_1-1}}{(\beta_1-1)!}\right]\\
&+ e^{p_2 t}\left[k_2^{(1)} + k_2^{(2)}\frac{t}{1!} + \dots + k_2^{(\beta_2)}\frac{t^{\beta_2-1}}{(\beta_2-1)!}\right]\\
&\vdots\ + e^{p_n t}\left[k_n^{(1)} + k_n^{(2)}\frac{t}{1!} + \dots + k_n^{(\beta_n)}\frac{t^{\beta_n-1}}{(\beta_n-1)!}\right]
\end{aligned} \tag{5.6}$$

Koeficienty $k_{\mu}^{(\beta_m)}$ můžeme získat následujícím postupem.

Příklad 30 (Zpětná Laplaceova transformace násobných pólů).
Nechť například

$$N(p) = (p-2)^2(p+5)(p+7).$$

Rozklad na parciální zlomky hledáme ve tvaru

$$\frac{1}{(p-2)^2(p+5)(p+7)} = \frac{k_1^{(2)}}{(p-2)^2} + \frac{k_1^{(1)}}{p-2} + \frac{k_2}{p+5} + \frac{k_3}{p+7}$$

Vynásobíme rovnici členem $(p-2)^2$

$$\begin{aligned}\frac{(p-2)^2}{(p-2)^2(p+5)(p+7)} \\ = k_1^{(2)} + k_1^{(1)}(p-2) + \frac{k_2(p-2)^2}{p+5} + \frac{k_3(p-2)^2}{p+7}\end{aligned} \tag{5.7}$$

a nalezneme limitu pro $p \to 2$,

$$\frac{1}{(2+5)(2+7)} = k_1^{(2)} \tag{5.8}$$

Odečteme-li výraz $\frac{1}{63(p-2)^2}$ od obou stran původní rovnice, dostáváme

$$\frac{1}{(p-2)^2(p+5)(p+7)} - \frac{1}{63(p-2)^2} = \frac{k_1^{(1)}}{p-2} + \frac{k_2}{p+5} + \frac{k_3}{p+7}$$

respektive rovnici

$$\frac{1}{63}\left[\frac{-(p+14)}{(p-2)(p+5)(p+7)}\right] = \frac{k_1^{(1)}}{p-2} + \frac{k_2}{p+5} + \frac{k_3}{p+7},$$

pro kterou se výpočet k_μ redukuje na případ s jednoduchými póly a platí

$$\begin{aligned} k_1^{(1)} &= -\frac{2^4}{7^2 \times 9^2}, \\ k_2 &= \frac{1}{2 \times 7^2}, \\ k_3 &= -\frac{1}{2 \times 9^2}. \end{aligned}$$

5·3·5 *Zakrývací pravidlo pro násobné póly*

V případě, že se v případě výskytu násobných pólů pokusíme pro rozklad na pariciální zlomky použít zakrývací pravidlo, zjistíme, že nám tento postup moc nepomůže. Pokud totiž má jmenovatel rozkládaného polynomiálního zlomku kořen p_∞ s násobností k, bude rozklad na parciální zlomky obsahovat členy

$$\frac{A_{k-1}}{(p-p_\infty)^k} + \frac{A_{k-2}}{(p-p_\infty)^{k-1}} + \cdots + \frac{A_1}{(p-p_\infty)^2} + \frac{A_0}{p-p_\infty}$$

a z nich lze přímým použitím zakrývacího pravidla určit pouze hodnotu A_{k-1}, ale hodnoty A_{k-2} až A_0 nikoliv.

Heavisideovo zakrývací pravidlo lze ale pro násobné kořeny použít, musíme jej ale aplikovat opakovaně: Celý postup v tomto případě vychází z principu, že každý násobný kořen lze z jmenovatele postupně vytýkat ven až do té doby, dokud nezbude zlomek, jenž dokážeme rozložit přímou aplikací zakrývacího pravidla. Výsledný rozklad poté opět násobíme a násobky s rozdílnými póly rozkládáme opět přímou aplikací zakrývacího pravidla.

Ukažme si tento princip na jednoduchém příkladu.

Příklad 31 (Heavisideův vzorec pro násobné póly). Heavisideovou metodou rozložíme na parciální zlomky racionální lomenou funkci

$$R(p) = \frac{1}{(p+1)^2(p+2)}.$$

Postupujeme takto:

$$\begin{aligned}
R(p) &= \frac{1}{(p+1)^2(p+2)} && \text{Původní racionální lomená funkce s násobnými póly.}\\
&= \frac{1}{(p+1)} \cdot \frac{1}{(p+1)(p+2)} && \text{Násobné kořeny vytkneme.}\\
&= \frac{1}{(p+1)} \left(\frac{1}{p+1} + \frac{-1}{p+2} \right) && \text{Na pravý zlomek použijeme zakrývací pravidlo.}\\
&= \frac{1}{(p+1)^2} - \frac{1}{(p+1)(p+2)} && \text{Roznásobíme závorku.}\\
&= \frac{1}{(p+1)^2} - \frac{1}{p+1} + \frac{1}{p+2} && \text{A na pravý zlomek použijeme zakrývací pravidlo ještě jednou.}
\end{aligned}$$

□

Pro pól s násobností 2 lze z výše uvedeného odvodit následující postup:

$$\begin{aligned}
R(p) &= \frac{1}{(p+1)^2(p+2)} && \text{Původní racionální lomená funkce s násobnými póly.}\\
&= \frac{A}{(p+1)^2} + \frac{B}{p+1} + \frac{C}{p+2} && \text{Viz rovnice (5.6)}\\
&= \frac{1}{(p+1)^2} + \frac{B}{p+1} + \frac{1}{p+2} && \text{Hodnoty } A \text{ a } C \text{ určíme zakrývacím pravidlem.}\\
&= \frac{1}{(p+1)^2} - \frac{1}{p+1} + \frac{1}{p+2} && \text{Celou rovnici (tedy levou i pravou stranu) vynásobíme } (p+1) \text{ a spočteme limitu pro } p \to \infty. \text{ Vyjde } 0 = B + 1.
\end{aligned}$$

5.4 Příklad použití zpětné Laplaceovy transformace

5.4.1 Diferenciální rovnice

Příklad 32 (Spojitý systém druhého řádu). Uvažujme lineární spojitý systém, popsaný diferenciální rovnicí

$$y''(t) + 3y'(t) + 2y(t) = 5u(t),$$

kde $u(t) = \mathbf{1}(t)$ je jednotkový skok a počáteční stav systému je dán stavem výstupu a rychlosti v čase $t = 0$: $y(0) = -1$ a $y'(0) = 2$.

Máme nalézt řešení $y(t)$.

Po Laplaceově transformaci diferenciální rovnice dostaneme algebraickou rovnici

$$p^2Y(p) - py(0) - y'(0) + 3pY(p) - 3y(0) + 2Y(p) = 5\,\frac{1}{p}.$$

S použitím počátečních podmínek nalezneme řešení algebraické rovnice ve tvaru

$$\begin{aligned} Y(p)\left[p^2 + 3p + 2\right] - p(-1) - 2 - 3(-1) &= 5\,\frac{1}{p} \\ Y(p)\left[p^2 + 3p + 2\right] + p + 1 &= 5\,\frac{1}{p} \\ Y(p)\left[p^2 + 3p + 2\right] &= 5\,\frac{1}{p} - p - 1 \end{aligned}$$

a odtud

$$Y(p) = \frac{5 - p - p^2}{p(p+1)(p+2)}.$$

Rozložíme racionální lomenou funkci na parciální zlomky

$$Y(p) = \frac{5}{2p} - \frac{5}{p+1} + \frac{3}{2}\frac{1}{(p+2)}.$$

Hledané řešení je pro $t \geq 0$

$$y(t) = \frac{5}{2} - 5e^{-t} + \frac{3}{2}e^{-2t}. \tag{5.9}$$

První člen odpovídá ustálenému stavu, další dva členy popisují přechodový děj.

Vztah, popisovaný rovnicí (5.17), platí pouze pro $t \geq 0$ (proto z něj mysticky vypadl jednotkový skok, odpovídající zpětně transformovanému $1/p$). Často se proto setkáváme s jednoznačnějším zápisem

$$y(t) = \left[\frac{5}{2} - 5e^{-t} + \frac{3}{2}e^{-2t}\right]\mathbf{1}(t).$$

5.5 Zpětná Laplaceova transformace – dokončení

5.5.1 Obecné řešení diferenciální rovnice druhého řádu

Diferenciální rovnici

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}y(t) + 2a\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}y(t) + (a^2 + b^2)y(t) = u(t) \tag{5.10}$$

s počátečními podmínkami ve tvaru

$$y(0) = c_1 \qquad \text{a} \qquad y'(0) = c_2,$$

řešíme pomocí Laplaceovy transformace.

Protože platí

$$\mathcal{L}\left\{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}y(t)\right\} = pY(p) - y(0)$$
$$\mathcal{L}\left\{\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}y(t)\right\} = p^2Y(p) - py(0) - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}y(0)$$

nalezneme Laplaceovou transformací diferenciální rovnice její algebraický tvar

$$p^2Y(p) - py(0) - y'(0) + 2a(pY(p) - y(0)) + (a^2 + b^2)Y(p) = U(p). \tag{5.11}$$

Vyřešíme předchozí rovnici vzhledem k obrazu výstupní veličiny Y(p) a dostáváme

$$\left(p^2 + 2a\,p + (a^2 + b^2)\right) Y(p) = U(p) + py(0) + y'(0) + 2a\,y(0)$$

nebo

$$Y(p) = \frac{U(p) + c_2 + (p + 2a)c_1}{(p + a + \imath b)(p + a - \imath b)}$$

5.5.2 *Přenosová funkce*

Přenosová funkce $H(p)$ je definována jako podíl obrazu výstupu k obrazu vstupu

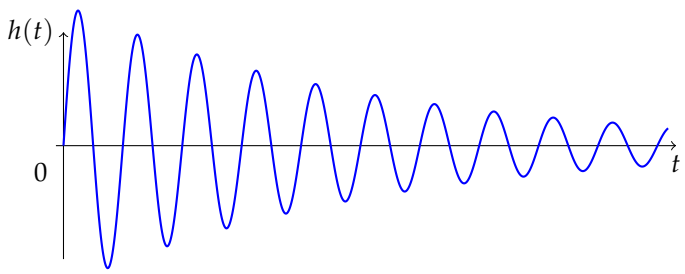
$$H(p) = \frac{Y(p)}{U(p)}$$

pro nulové počáteční podmínky a tedy

$$\boxed{H(p) = \frac{Y(p)}{U(p)} = \frac{1}{(p + a + \imath b)(p + a - \imath b)}}$$

Impulsní odezvu určíme jako zpětnou Laplaceovu transformaci přenosové funkce

$$\mathcal{L}^{-1}\{H(p)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(p + a)^2 + b^2}\right\} = \frac{1}{b}e^{-at}\sin bt$$

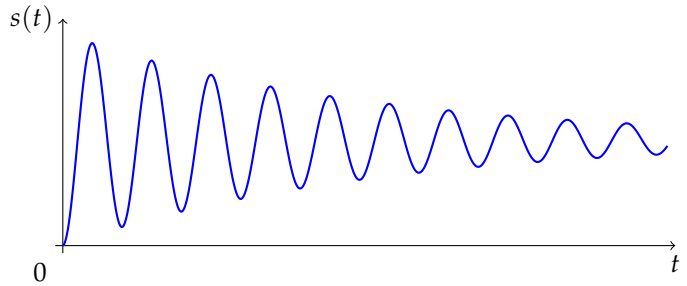


Obrázek 5.6: Impulsní odezva

Přechodovou odezvu $s(t)$ určíme zpětnou Laplaceovu transformaci $s(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{H(p)\frac{1}{p}\right\}$

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{p((p+a)^2+b^2)}\right) &= \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{a^2+b^2}\left[\frac{1}{p} - \frac{p+2a}{(p+a)^2+b^2}\right]\right) = \\ &= \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{a^2+b^2}\left[\frac{1}{p} - \frac{p+a}{(p+a)^2+b^2} - \frac{a}{(p+a)^2+b^2}\right]\right) \\ &= \frac{1}{a^2+b^2}\left[1 - e^{-at}\cos bt - \frac{a}{b}e^{-at}\sin bt\right].\end{aligned} \tag{5.12}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{a^2+b^2}\left[\frac{1}{p} - \frac{p+2a}{(p+a)^2+b^2}\right]\right\} = \\ = \frac{1}{a^2+b^2}\left[1 - e^{-at}\cos bt - \frac{a}{b}e^{-at}\sin bt\right]$$

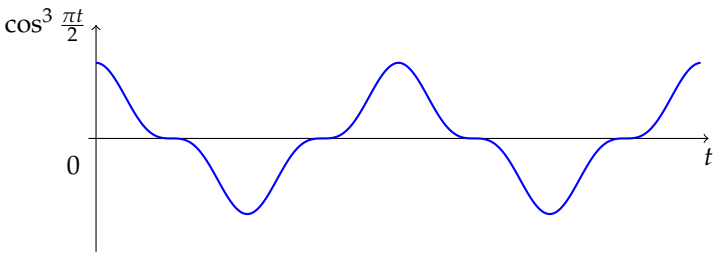


Obrázek 5.7: Přechodová odezva

5.6 Zpětná Laplaceova transformace – příklady

Příklad 33 (Jak rozložit $\cos^3 at$?). Ukažte, že

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{p(p^2+7a^2)}{(p^2+a^2)(p^2+9a^2)}\right\} = \cos^3 at$$



Obrázek 5.8: Průběh funkce $\cos^3 at$ pro $a = \pi/2$

Řešení:

Použijeme-li vztah

$$\cos 3at = 4\cos^3 at - 3\cos at,$$

máme podle tabulek

$$\mathcal{L}\left\{4\cos^3 at\right\} = \mathcal{L}\left\{\cos 3at + 3\cos at\right\} = \frac{p}{p^2+9a^2} + \frac{3p}{p^2+a^2},$$

který snadno upravíme do tvaru

$$\frac{p}{p^2+9a^2} + \frac{3p}{p^2+a^2} = p\frac{3p^2+27a^2+p^2+a^2}{(p^2+a^2)(p^2+9a^2)} = 4p\,\frac{p^2+7a^2}{(p^2+a^2)(p^2+9a^2)}.$$

□

Příklad 34 (Přenos obecného systému druhého řádu). Nalezněte přenosovou funkci a impulsní odezvu systému, popsaného diferenciální rovnici druhého řádu

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}y(t) + 2a\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}y(t) + \left(a^2+b^2\right)y(t) = u(t)$$

s počátečními podmínkami ve tvaru

$$y(0) = c_1 \quad \text{a} \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}y(0) = c_2.$$

Řešení:

Řešíme pomocí Laplaceovy transformace, nejprve převedeme na algebraický tvar

$$Y(p) = \frac{U(p)+c_2+(p+2a)c_1}{p^2+2ap+(a^2+b^2)} = \frac{U(p)}{p^2+2ap+(a^2+b^2)} + \frac{c_2+(p+2a)c_1}{p^2+2ap+(a^2+b^2)}.$$

Přenosová funkce je definovaná jako

$$H(p) = \frac{Y(p)}{U(p)},$$

a tedy

$$H(p) = \frac{\dfrac{U(p)}{p^2+2ap+(a^2+b^2)}}{U(p)} + \frac{\dfrac{c_2+(p+2a)c_1}{p^2+2ap+(a^2+b^2)}}{U(p)}.$$

V dalším textu počítejme pouze s ustálenou složkou (odezvou na vstupní signál) a přechodovou složku (odezvu na počáteční podmínky) zanedbejme – předpokládejme tedy nulové počáteční podmínky $c_1 = 0, c_2 = 0$. V takovém případě je přenosová funkce

$$H(p) = \frac{1}{(p^2+2ap+a^2)+b^2}. \tag{5.13}$$

Impulsní odezvu $h(t)$ spočteme jako inverzní Laplaceovu transformaci přenosové funkce $H(p)$,

$$h(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{H(p)\right\} = \frac{1}{b}\cdot e^{-at}\sin bt.$$

□

5.7 Přenosová funkce a vnitřní popis

5.7.1 Odvození

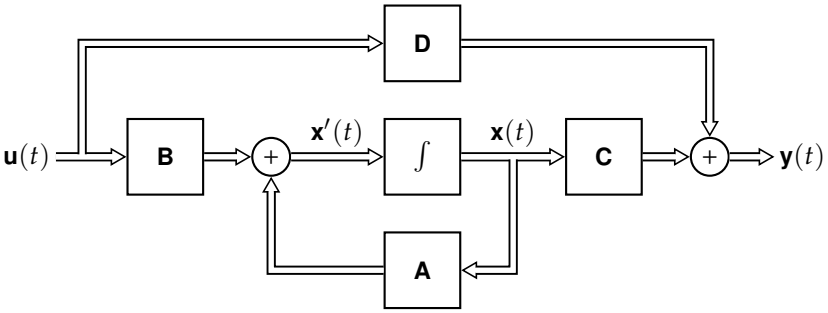
Přenosová funkce vnitřního popisu je určena opět jako

$$H(p) = \frac{Y(p)}{U(p)}$$

ovšem $Y(p)$ nyní závisí na stavových proměnných. Ukažme si nyní, jak lze relativně jednoduše odvodit vztahy pro Laplaceoův obraz výstupu a pro přenos spojitého LTI systému popsaného stavovým popisem.

Mějme spojitý lineární časově invariantního systém, popsaný soustavou rovnic

$$\begin{aligned}\mathbf{x}'(t) &= \mathbf{A}\,\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\,\mathbf{u}(t),\\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{C}\,\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\,\mathbf{u}(t).\end{aligned}$$



převedeme pomocí Laplaceovy na algebraické rovnice rovnice tvaru

$$\begin{aligned}pX(p) - x(0) &= \mathbf{A}\,X(p) + \mathbf{B}\,U(p)\\ Y(p) &= \mathbf{C}\,X(p) + \mathbf{D}\,U(p)\end{aligned}$$

Rovnici upravíme do tvaru

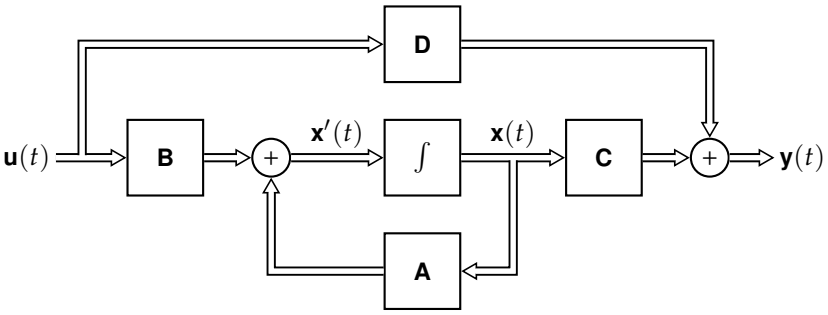
$$(p\mathbf{I} - \mathbf{A})\;X(p) = x(0) + \mathbf{B}\,U(p)$$

a vypočítáme

$$X(p) = (p\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\;x(0) + (p\mathbf{1} - \mathbf{A})^{-1}\;\mathbf{B}\,U(p).$$

Přenosová funkce je definována pro nulovou počáteční podmínku $x(0) = 0$. Po dosazení dostáváme

$$\begin{aligned}Y(p) &= \mathbf{C}\,(p\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\,\mathbf{B}\,U(p) + \mathbf{D}\,U(p)\\ &= \left[\mathbf{C}\,(p\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\,\mathbf{B} + \mathbf{D}\right]U(p)\end{aligned}$$



Obrázek 5.9: Spojitý stavový model

a přenosová funkce je

$$\boxed{H(p) = \mathbf{C}\,(p\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\,\mathbf{B} + \mathbf{D}}$$

Pokud se jedná o ryzí systém, který nemá žádnou přímou vazbu ze vstupu na výstup a tedy $\mathbf{D} = \emptyset$, potom

$$\boxed{H(p) = \mathbf{C}\,(p\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\,\mathbf{B} = \mathbf{C}\,\frac{\operatorname{adj}(p\mathbf{I} - \mathbf{A})}{\det(p\mathbf{I} - \mathbf{A})}\,\mathbf{B}}$$

5.8 *Inverzní matice*

Pro matici 2×2

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

je inverzní matice

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix}$$

přičemž násobením snadno ověříme, že

$$\mathbf{A}\,\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Algebraickým doplňkem k prvku $a_{\ell\,m}$ v matici $n \times n$

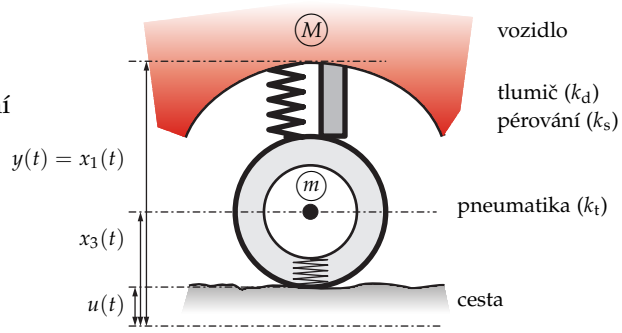
$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ & & \vdots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

je subdeterminant $\Delta_{\ell\,m}$, který vznikne vyškrtnutím ℓ-tého řádku a m-tého sloupce. Prvky inverzní matice jsou potom

$$\mathbf{A}^{-1}_{m\,\ell} = \frac{(-1)^{\ell+m}\Delta_{\ell\,m}}{\Delta},$$

kde $det(\mathbf{A}) = \Delta$.

5.8.1 *Příklad*



Obrázek 5.10: Odpružené zavěšení kola. Vibrace z vozovky, dané $u(t)$ pohlcuje jednak pneumatika, jednak odpružený závěs kola s tlumičem

Příklad 35 (Odpružení kola). Na obrázku 5.10 je model zavěšení kola vozidla a jeho odpružení s koeficienty tuhosti k_t, k_s a k_d.

Jestliže platí pohybové rovnice

$$\begin{aligned} M x_3''(t) + k_t\,[x_3(t) - u(t)] \\ k_s\,[x_1(t) - x_3(t)] + k_d\,[x_1'(t) - x_3'(t)] = 0 \\ m x_1''(t) + k_s\,[x_1(t) - x_3(t)] + k_d\,[x_1'(t) - x_3'(t)] = 0 \end{aligned}$$

nalezněte stavový popis s použitím vektoru stavových proměnných $\mathbf{x} = [x_1(t), x_2(t), x_3(t), x_4(t)]^T$.

Nalezněte přenosovou funkci $H(p) = Y(p)/U(p)$, která charakterizuje chování vozidla v závislosti na povrchu vozovky.

Zvolíme

$$\begin{aligned} x_1(t) &= y(t), & x_1'(t) &= x_2(t) \\ x_3(t), & & x_3'(t) &= x_4(t) \end{aligned}$$

a dostáváme soustavu rovnic

$$\begin{aligned} x_1'(t) &= x_2(t), \\ x_2'(t) &= -\frac{k_s}{m}\,[x_1(t) - x_3(t)] - \frac{k_d}{m}\,[x_1'(t) - x_3'(t)] \\ x_3'(t) &= x_4(t) \\ x_4'(t) &= -\frac{k_t}{M}\,[x_3(t) - u(t)] + \frac{k_s}{M}\,[x_1(t) - x_3(t)] + \frac{k_d}{M}\,[x_1'(t) - x_3'(t)] \end{aligned}$$

Rovnice převedeme na stavový popis

$$\begin{bmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \\ x_3'(t) \\ x_4'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{k_s}{m} & -\frac{k_d}{m} & \frac{k_s}{m} & \frac{k_d}{m} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{k_s}{M} & \frac{k_d}{M} & -\frac{k_s + k_t}{M} & -\frac{k_d}{M} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{k_t}{M} \end{bmatrix} u(t)$$

a

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \end{bmatrix}.$$

Máme matice stavového popisu ve tvaru

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{k_s}{m} & -\frac{k_d}{m} & \frac{k_s}{m} & \frac{k_d}{m} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{k_s}{M} & \frac{k_d}{M} & -\frac{k_s + k_t}{M} & -\frac{k_d}{M} \end{bmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{k_t}{M} \end{bmatrix}$$

a

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{5.14}$$

a platí $H(p) = \mathbf{C}\,(p\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}$, t.j.

$$H(p) = \frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} * & * & * & -\Delta_{41} \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{k_t}{M} \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{(k_d p + k_s)\, k_t}{(M\, p^2 + k_t)(m\, p^2 + k_d p + k_s) + m\,(k_d\, p + k_s)\, p^2}$$

kde $*$ označuje prvky inverzní matice, které nemusíme pro přenosovou funkci počítat a Δ je determinant $\Delta = \det(p\mathbf{I} - \mathbf{A})$.

5.9 Vyšetřování stability spojitých systémů

Docela hezky je to popsáno v [1], respektive v textech DynLABu [2]. Důležité je si uvědomit (a hezky to vyplývá z rozkladu impulsních odezev na parciální zlomky, vedoucí na součet exponenciel), že *pro jednotlivé třídy stability spojitých systémů je určující poloha reálné části pólů přenosové funkce*.

BIBO stabilita – bounded input bounded output

Odezva na omezený vstupní signál musí být vždy omezená – systém je BIBO stabilní.

Odezva systému je kombinací

- odezvy na vstupní signál
- odezvy na počáteční podmínky

[1] Christian SCHMID. Course on dynamics of multidisplicinary and controlled systems, 2005. URL http://www.atp.ruhr-uni-bochum.de/rt1/syscontrol/main.html

[2] DynLAB. Course on modeling and control of multidisciplinary systems, 2008. URL http://virtual.cvut.cz/dynlabcourse/

5.10 Vnější popis

V případě přenosové funkce dané rovnicí (5.10) z odstavce 5.5.1 jsou póly přenosové funkce komplexní čísla ve tvaru

$$p_1 = -a + b\imath,$$
$$p_2 = -a - b\imath.$$

Pro stabilitu systému jsou rozhodující hodnoty $\Re(p_1)$ a $\Re(p_2)$. Jedná se o póly komplexně sdružené (jiné ani u LTI systémů být nemohou), platí proto $\Re(p_1) = \Re(p_2) = -a$ a pro stabilitu systému je proto rozhodující pouze hodnota parametru a.

5.10.1 Stabilní systém

Stabilní systém splňuje následující kritérium na polohu pólů přenosové funkce:

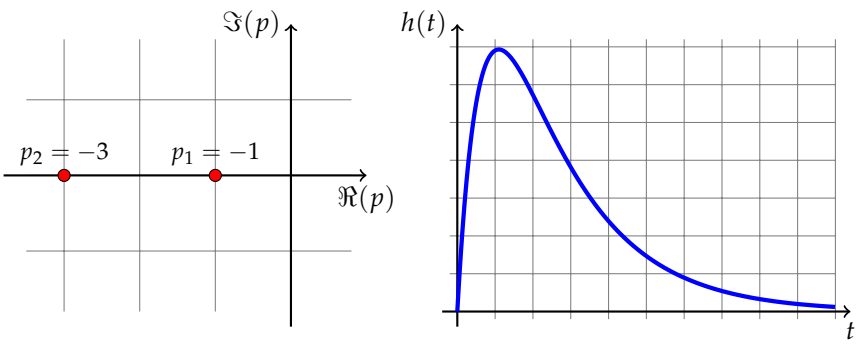
Věta 36 (Stabilní spojitý LTI systém)**.** *Reálná část všech pólů přenosové funkce $H(p)$ stabilního systému leží v levé části p-roviny.*

Příklad 37 (Přenos spojitého LTI 2. řádu – jednoduché póly). Spojitý systém 2. řádu má přenosovou funkci

$$H(p) = \frac{1}{p^2+4p+3} = \frac{1}{(p+1)(p+3)}.$$

Póly přenosové funkce $p_1 = -1$ a $p_2 = -3$ leží v levé části p-roviny a jedná se proto o stabilní systém. Připomeňme, že

$$h(t) = \mathcal{L}^{-1}\{H(p)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{k_1}{p+1} + \frac{k_2}{p+3}\right\} = \frac{1}{2}e^{-t} - \frac{1}{2}e^{-3t}.$$



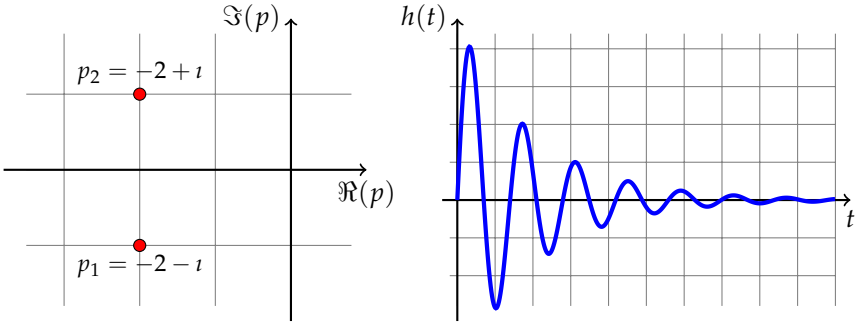
Obrázek 5.11: Příklad 37 – poloha pólů přenosové funkce stabilního spojitého LTI systému a jeho impulsní odezva

Příklad 38 (Přenos spojitého LTI 2. řádu – komplexně sdružené póly). Spojitý systém 2. řádu má přenosovou funkci

$$H(p) = \frac{1}{p^2+4p+20}. \tag{5.15}$$

Tato přenosová funkce má dva komplexně sdružené póly s reálnou částí v levé části p-roviny. Jedná se tedy o stabilní systém. Připomeňme, že

$$h(t) = \mathcal{L}^{-1}\{H(p)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{p^2+4p+20}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{4}\frac{4}{(p+2)^2+16}\right\} = \frac{1}{4}e^{-2t}\sin(4t).$$



Obrázek 5.12: Příklad 38 – poloha pólů přenosové funkce stabilního spojitého LTI systému s komplexně sdruženými póly a jeho impulsní odezva

5.10.2 *Nestabilní systém*

Nestabilní systém splňuje jedno z následujících kritérií:

Věta 39 (Nestabilní spojitý LTI systém). *Reálná část alespoň jednoho pólu přenosové funkce $H(p)$ nestabilního spojitého LTI systému leží v pravé části p-roviny, případně má takový systém násobný pól $H(p)$ na imaginární ose.*

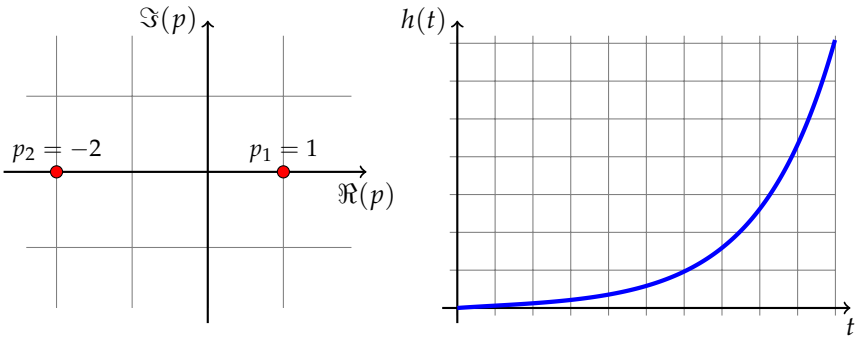
■ **přidat obrázek na násobný pól** ■ Druhá část věty plyne z toho, že násobné póly v nule jsou vždy obrazem násobení $t, t^2, \ldots,$ impulsní odezva pro $t \to \infty$ roste nade všechny meze a systém je nutně nestabilní.

Příklad 40 (Nestabilní spojitý LTI 2. řádu – reálné póly). Spojitý LTI systém 2. řádu má přenosovou funkci

$$H(p) = \frac{1}{p^2 + p - 2} = \frac{1}{(p+2)(p-1)}.$$

Jeden z pólů přenosové funkce, $p_2 = 1$, leží v pravé části p-roviny a jedná se proto o nestabilní systém. Připomeňme, že

$$h(t) = \mathcal{L}^{-1}\{H(p)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{k_1}{p+2} + \frac{k_2}{p-1}\right\} = -\frac{1}{3}e^{-2t} + \frac{1}{3}e^{t}.$$



Obrázek 5.13: Příklad 40 – poloha pólů přenosové funkce netabilního spojitého LTI systému a jeho impulsní odezva

Příklad 41 (Nestabilní spojitý LTI 2. řádu – násobný pól). Spojitý LTI systém 2. řádu má přenosovou funkci

$$H(p) = \frac{1}{p^3 + p^2} = \frac{1}{p^2(p+1)}.$$

Dvojnásobný pól přenosové funkce $p_1 = p_2 = 0$ leží na imagirnární ose p-roviny a jedná se proto o nestabilní systém. Připomeňme, že

$$H(p) = \frac{1}{p^2(p+1)} = \frac{1}{p} \cdot \frac{1}{p(p+1)} = \frac{1}{p}\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p+1}\right) = \frac{1}{p^2} - \frac{1}{p(p+1)} = \\ = \frac{1}{p^2} - \frac{1}{p} + \frac{1}{p+1}.$$

a tedy pro $t \geq 0$

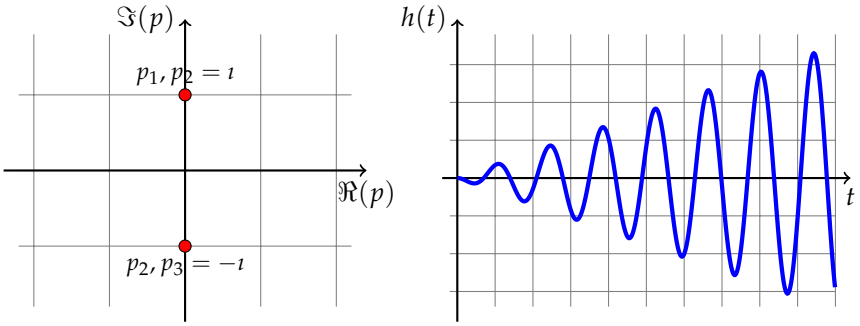
$$h(t) = \mathcal{L}^{-1}\{H(p)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{p^2} - \frac{1}{p} + \frac{1}{p+1}\right\} = t - \mathbf{1}(t) + e^{-t}.$$

Příklad 42 (Nestabilní spojitý LTI 2. řádu – násobný pól). Spojitý LTI systém 2. řádu má přenosovou funkci

$$H(p) = \frac{1}{(p^2+1)^2}.$$

Dvojnásobný pól přenosové funkce $p_\infty = \pm\imath$ leží na imagirnární ose p-roviny a jedná se proto o nestabilní systém. Připomeňme, že

$$h(t) = \mathcal{L}^{-1}\{H(p)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(p^2+1)^2}\right\} = t\,\sin(t).$$



Obrázek 5.14: Příklad 42 – poloha pólů přenosové funkce nestabilního spojitého LTI systému s dvojnásobným komplexně sdruženým ryze imaginárním pólem a jeho impulsní odezva

5.10.3 *Mez stability*

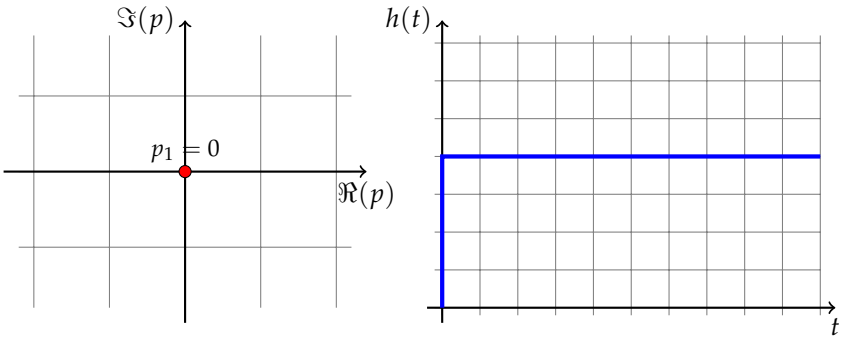
Systém na mezi stability splňuje následující kritérium:

Věta 43 (Spojitý LTI systém na mezi stability)**.** *Reálná část pólů přenosové funkce $H(p)$ spojitého LTI systému na mezi stability je rovna nule a póly nejsou násobné.*

Připomínáme, že násobné póly v nule jsou vždy obrazem násobení $t, t^2, \ldots$ a systém je pak nestabilní.

Příklad 44 (Spojitý LTI 1. řádu na mezi stability – jednoduchý pól). Spojitý LTI systém 1. řádu má přenosovou funkci

$$H(p) = \frac{1}{p}.$$



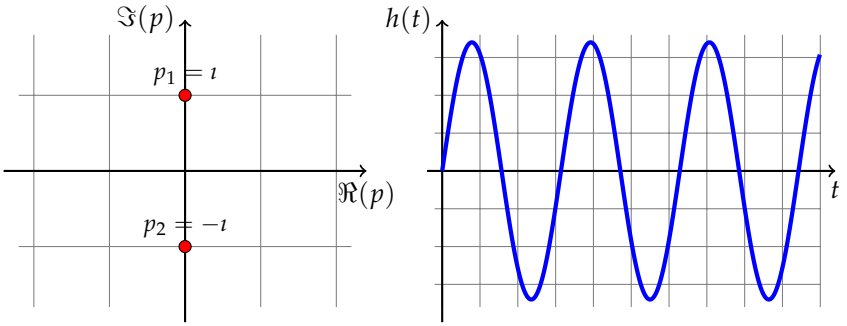
Obrázek 5.15: Příklad 44 – poloha pólu přenosové funkce spojitého systému 1. řádu na mezi stability a jeho impulsní odezva

Příklad 45 (Spojitý LTI 2. řádu na mezi stability – komplexně sdružený pól). Spojitý LTI systém 2. řádu má přenosovou funkci

$$H(p) = \frac{1}{p^2+4}.$$

Připomeňme, že

$$h(t) = \mathcal{L}^{-1}\{H(p)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{2}\frac{2}{p^2+2^2}\right\} = \frac{1}{2}\sin(2t).$$



Obrázek 5.16: Příklad **??** – poloha pólu přenosové funkce spojitého systému 2. řádu na mezi stability a jeho impulsní odezva

Stabilní systém

- $\lim_{t\to\infty} h(t) = 0$
- Všechny póly přenosové funkce $H(p)$ leží v levé polorovině komplexní roviny, $\Re(p_\infty) < 0$.

Nestabilní systém

- $\lim_{t\to\infty} h(t) = \infty$
- Alespoň jeden pól přenosové funkce $H(p)$ leží v pravé polorovině komplexní roviny, $\Re(p_\infty) > 0$ nebo alespoň jeden *násobný* pól leží na imaginární ose.

Mez stability

- $\lim_{t\to\infty} h(t) = c$ nebo neexistuje
- Alespoň jeden *jednoduchý* pól leží na imaginární ose a žádný pól neleží v pravé polorovině komplexní roviny. Případné násobné póly leží v levé polorovině.

5.11 Vnitřní popis

Stabilitu určujeme opět na základě polohy pólů přenosové funkce $H(p)$ v p-rovině. V případě vnitřního popisu je přenosová funkce definována vztahem

$$H(p) = \mathbf{C}\,(p\,\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D}.$$

Věta 46 (Stabilita vnitřního popisu). *Pro stabilitu systému je rozhodující matice* $\mathbf{A}$*, respektive determinant výrazu* $p\,\mathbf{I} - \mathbf{A}$ *(pokud si nejste jistí, proč tomu tak, je, podívejte se na postup výpočtu inverzní matice), tedy*

$$\det(p\,\mathbf{I} - \mathbf{A}).$$

odpovídající jmenovateli přenosové funkce.

Další postup je identický s vyšetřováním stability vnějšího popisu.

Příklad 47 (Přenosová funkce vnitřního popisu spojitého LTI systému). Vnějšímu popisu spojitého LTI systému z Příkladu 38 odpovídá diferenciální rovnice 2. řádu

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}y(t) + 4\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}y(t) + 20\,y(t) = u(t).$$

Přenosová funkce (připomínáme nulové počáteční podmínky) je dána rovnicí (**??**), tedy

$$H(p) = \frac{1}{p^2 + 4p + 20}.$$

Pokud při převodu do vnitřního popisu zavedeme stavy

$$\begin{aligned} x_1(t) &= y(t), \\ x_2(t) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}y(t), \end{aligned}$$

bude matice vývoje stavu $\mathbf{A}$, výraz $(p\,\mathbf{I} - \mathbf{A})$ a jeho determinant rovny

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -20 & -4 \end{bmatrix}, \\ p\mathbf{I} - \mathbf{A} &= \begin{bmatrix} p & -1 \\ 20 & p+4 \end{bmatrix}, \\ \det(p\,\mathbf{I} - \mathbf{A}) &= p^2 + 4p + 20. \end{aligned} \tag{5.16}$$

Polynom (5.16) je charakteristický polynom systému a jeho kořeny jsou póly přenosové funkce. Porovnáním s přenosovou funkcí vnějšího popisu, danou rovnicí (5.15), vidíme, že se obě přenosové funkce opravdu shodují.

Další rozhodování o stabilitě vnitřního popisu systému je shodné s kritérii stability vnějšího popisu.

5.12 Vyšetření stability obecného systému druhého řádu

Mějme LTI systém popsaný rovnicí

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}y(t) + my'(t) + n \cdot y(t) = u(t) \tag{5.17}$$

kde $u(t) = \mathbf{1}(t)$ a s nulovými počátečními podmínkami, $y'(0) = y(0) = 0$. Zkusme zjistit, pro jaká m a n bude systém stabilní, nestabilní a na mezi stability.

Přenosová funkce systému popsaného rovnicí (5.17) bude

$$H(p) = \frac{1}{p^2 + mp + n}. \tag{5.18}$$

Zajímá nás poloha pólů přenosové funkce. Polohu můžeme vyšetřit buď použitím rozkladu

$$p^2 + mp + n = (p - p_{\infty 1})(p - p_{\infty 2}), \tag{5.19}$$

kde platí

$$p_{\infty 1} p_{\infty 2} = n$$
$$p_{\infty 1} + p_{\infty 2} = -m$$

a nebo použitím klasického vzorce pro řešení kvadratické rovnice,

$$p_{\infty 1,2} = \frac{-m \pm \sqrt{m^2 - 4n}}{2}. \tag{5.20}$$

Projděme si postup s využitím tohoto vzorce, postup řešení podle zápisu (5.19) je podobný, podle mého názoru však kostrbatější.

Pro vyhodnocení stability systému (5.17) nás zajímá, jestli reálné části pólů přenosové funkce (5.18) jsou všechny záporné (pak je systém stabilní) nebo má-li alespoň jeden pól reálnou část kladnou (pak půjde o systém nestabilní). Řešení se nám rozpadá na tři rozdílné případy podle toho, jaké hodnoty bude nabývat výraz diskriminantu ve vzorci (5.20):

$m^2 < 4n$: V tomto případě dá odmocnina imaginární složku dvou komplexně sdružených kořenů a pro reálnou část platí

$$\Re(p_{\infty 1,2}) = -\frac{m}{2}.$$

Protože $4n > m^2$, je nutně $n > 0$. Zvolíme-li $m \in (0, 2\sqrt{n})$, dostáváme stabilní systém, pro $m \in (-2\sqrt{n}, 0)$ dostáváme systém nestabilní. Pro $m = 0$ půjde o systém na mezi stability, jehož přenosová funkce má dva komplexně sdružené imaginární póly.

$m^2 = 4n$: Výraz pod odmocninou je roven nule, platí

$$p_{\infty 1,2} = -\frac{m}{2}$$

a pokud $n \neq 0$, pro $m = -2\sqrt{n}$ dostáváme stabilní systém a pro $m = 2\sqrt{n}$ systém nestabilní. Pro $n = 0$ je $m = 0$ a přenosová funkce má dvojnásobný pól v nule – systém je v tomto případě nestabilní, jeho impulsní odezva je $h(t) = t$.

$m^2 > 4n$: Zde je situace komplikovanější, póly leží oba na reálné ose. Aby systém byl stabilní, musí platit

$$p_{\infty 1,2} < 0$$

a tedy

$$-m \pm \sqrt{m^2 - 4n} < 0$$

(jenom pro pořádek: celý výraz na pravé straně (5.20) jsme vynásobili dvěma, což na nerovnosti nic nezmění). Vzhledem k tomu, že

$$-m + \sqrt{m^2 - 4n} > -m - \sqrt{m^2 - 4n},$$

stačí, když pro stabilní systém splníme podmínku

$$-m + \sqrt{m^2 - 4n} < 0, \tag{5.21}$$

a podmínka

$$-m - \sqrt{m^2 - 4n} < 0,$$

bude splněna automaticky.

Podmínka (5.21) bude splněna pouze v případě, kdy $m > 0$ a výraz pod odmocninou bude menší, než m^2, což je splněno pro $n \in (0, \frac{1}{4}m^2)$.

Závěr: Systém popsaný rovnicí (5.17) bude stabilní, pokud $m > 0 \wedge n > 0$. Na mezi stability se bude systém nalézat, pokud $m = 0 \wedge n > 0$. Pro ostatní volby m a n půjde o systém nestabilní.

6 $\mathcal{Z}$-transformace

■ rozbité záhlaví kvůli $\mathcal{Z}$ ■

6.1 Matematické nářadí

6.1.1 Motivace

Chceme analyzovat chování nějakého systému, případně navrhnout systém, který má přesně specifikované parametry.

Opíráme se o

- **fyzikální model**, založený na fyzikálních zákonech
- **black-box model**, založený na pozorování, identifikaci

Analýza chování reálného systému je složitý proces (model představuje jedna či více diferenciálních či diferenčních rovnic vyššího řádu) $\Rightarrow$ numerické řešení.

Jak analýzu *zjednodušit*?

6.1.2 Použití

Analýza či návrh systému v **časové oblasti** (vstupy a výstupy jsou funkcí času) jsou velmi pracné.

Převod do **frekvenční oblasti** (vstupy a výstupy jsou funkcí komplexní proměnné nazývané *úhlová frekvence*) nám

- poskytuje *fundamentálně odlišný nástroj* k pochopení funkce systému,
- často *drasticky sníží složitost* matematických výpočtů potřebných pro analýzu systému.

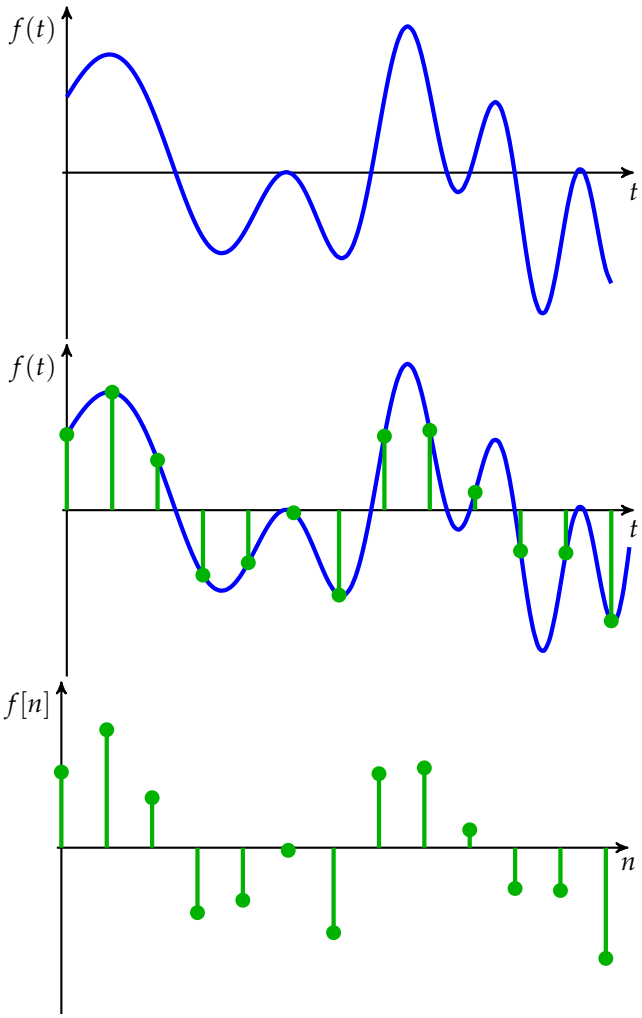
6.2 Dopředná $\mathcal{Z}$-transformace

■ dopsat ■

6.2.1 O původu diskrétní transformace

Diskrétní systém vznikne ze spojitého systému *vzorkováním* s periodou vzorkování T. Příklad je uveden na Obrázku 6.1.

Z hlediska teorie signálu jde o tak zvanou **analogovou sekvenci**, nikoliv o posloupnost či sekvenci digitální (ta nabývá diskrétních funkčních hodnot, jejichž počet je dán například počtem bitů A/D převodníku).



Obrázek 6.1: Vzorkování spojité funkce s periodou $T = 1$s

■ **Zde ještě zopakovat Diracovo $\delta()$ a Kroneckerovo $\delta[]$. A zopakovat** $\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\cdot\delta(t-nT-\tau)\,\mathrm{d}\tau$ ■

Vztah mezi spojitou funkcí $f(t)$ a ideálně vzorkovanou funkcí $f^*(t)$ lze formálně zapsat jako

$$\begin{aligned} f^*(t) &= \sum_{n=0}^{\infty} f(t) * \delta(t-nT) = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\cdot\delta(t-nT-\tau)\,\mathrm{d}\tau \\ &= f(nT)\delta(t-nT) \equiv \{f_n\}_{n=0}^{\infty}, \end{aligned}$$

kde T je vzorkovací perioda signálu. Funkce f^* nabývá hodnot $f(nT)$ pro $t = nT$ a nulových hodnot pro ostatní hodnoty t.

Ze spojité funkce $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ se tak stane **posloupnost** reálných hodnot $f_n : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$.

U této posloupnosti je zvykem neuvádět vzorkovací periodu signálu. Značíme ji $f[n]$ a platí

$$f[n] = \{f(nT)\}_{n=0}^{\infty}.$$

Jestliže budeme hledat Laplaceovu transformaci funkce $f^*(t)$, dostaneme

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{f^*(t)\} &= \int_0^{\infty} f^*(t)\, e^{-pt} dt \\ &= \int_0^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} f(t)\,\delta(t-nT)\, e^{-pt} dt \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{\infty} \delta(t-nT)\, f(t)\, e^{-pt} dt \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} f(nT) e^{-pnT} \equiv \sum_{n=0}^{\infty} f[n] z^{-n}, \end{aligned}$$

kde jsme zavedli komplexní proměnnou $z = e^{pT}$ a $f[n]$ označuje n-tý vzorek příslušné spojité funkce.

6.2.2 *Definice*

Definice 48 (Jednostranná $\mathcal{Z}$-transformace)**.** Jednostranná $\mathcal{Z}$-transformace posloupnosti $f[n]$ je definována nekonečnou řadou

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f[n] z^{-n}, \tag{6.1}$$

kterou často označujeme $F(z) = \mathcal{Z}\{f[n]\}$.

Zpětná $\mathcal{Z}$-transformace má tvar integrálu podél uzavřené křivky $\mathcal{C}$, jež obsahuje všechny singulární body funkce $F(z)$. Pro všechna $n = 0, 1, \ldots, \infty$ platí

$$f[n] = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\mathcal{C}} F(z) z^{n-1}\,\mathrm{d}z \equiv \mathcal{Z}^{-1}\{F(z)\}.$$

6.2.3 *Vlastnosti*

Věta 49 (Linearita). *$\mathcal{Z}$-transformace je lineární:*

$$\mathcal{Z}\left\{\sum_k a_k f_k[n]\right\} = \sum_k a_k \mathcal{Z}\left\{f_k[n]\right\}$$
$$\mathcal{Z}^{-1}\left\{\sum_m b_m F_m(z)\right\} = \sum_m b_m \mathcal{Z}^{-1}\left\{F_m(z)\right\}$$

Důkaz. Pomocí definičního vztahu $\mathcal{Z}$-transformace (6.1) dostaneme

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty}\left(a_1 f_1[n] + a_2 f_2[n]\right) z^{-n} &= \sum_{n=0}^{\infty} a_1 f_1[n] z^{-n} + \sum_{n=0}^{\infty} a_2 f_2[n] z^{-n} \\ &= a_1 \sum_{n=0}^{\infty} f_1[n] z^{-n} + a_2 \sum_{n=0}^{\infty} f_2[n] z^{-n} \\ &= a_1 \mathcal{Z}\left\{f_1[n]\right\} + a_2 \mathcal{Z}\left\{f_2[n]\right\} = a_1 F_1(z) + a_2 F_2(z).\end{aligned}$$

□

Věta 50 (O změně měřítka). *Pro $F(z) = \mathcal{Z}\left\{f[n]\right\}$ je*

$$a^{-n} f[n] = \mathcal{Z}^{-1}\left\{F(az)\right\}$$
$$F(a^{-1}z) = \mathcal{Z}\left\{a^n f[n]\right\}$$

Důkaz. Z definičního vztahu $\mathcal{Z}$-transformace (6.1) a s využitím substituce $az = \zeta$ máme

$$\sum_{n=0}^{\infty} a^{-n} f[n] z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} f[n] a^{-n} z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} f[n](az)^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} f[n]\zeta^{-n} = F(\zeta) = F(az)$$

□

Když tedy v rovině diskrétního času měníme měřítko k menším hodnotám (násobíme a^n), v rovině kmitočtů se nám měřítko roztahuje. Opět platí Heisenbergův princip neurčitosti časového a kmitočtového rozlišení.

Věty o posunutí jsou velmi důležité pro transformaci diferenčních rovnic na algebraické rovnice v $\mathcal{Z}$-rovině, podobně, jako je tomu u spojitých systémů s větami o obrazu derivací v Laplaceově transformaci.

$$\mathcal{Z}\left\{f[n-m]\right\} = z^{-m}\mathcal{Z}\left\{f[n]\right\} = z^{-m}F(z)\;|_{\forall n-m<0:\, f[n-m]=0}$$
$$\begin{aligned}\mathcal{Z}\left\{f[n+m]\right\} &= z^m\left[\mathcal{Z}\left\{f[n]\right\} - \sum_{\nu=0}^{m-1} f[\nu] z^{-\nu}\right] \\ &= z^m\left[F(z) - \sum_{\nu=0}^{m-1} f[\nu] z^{-\nu}\right]\end{aligned}$$

Důkaz. Napřed naznačíme důkaz s posunutím doprava o jeden vzorek,

$$\mathcal{Z}\left\{f[n-1]\right\} = \sum_{n=0}^{\infty} f[n-1] z^{-n} = \sum_{m=-1}^{\infty} f[m] z^{-(m+1)}|_{n-1=m} = z^{-1}\sum_{m=0}^{\infty} f[m] z^{-m} + f[-1]z^0 = z^{-1}F(z).$$

Díky tomu, že používáme jednostrannou $\mathcal{Z}$-transformaci, musí být $f[-1] = 0$. Každé posunutí o jeden krok dopředu způsobí, že původní systém bude zpožděný o jeden krok, což se projeví násobením původního obrazu operátorem z^{-1}.

Nenulové počáteční podmínky jsou přípustné pouze u posunutí doleva,

$$\sum_{n=0}^{\infty} f[n+1]z^{-n} = \sum_{m=1}^{\infty} f[m]z^{-(m-1)}|_{n+1=m} = \sum_{m=0}^{\infty} f[m]z^{-(m-1)} - f[0]z^0 = z\sum_{m=0}^{\infty} f[m]z^{-m} - f[0]z^0$$
$$= z\,F(z) - f[0],$$

kde se počáteční podmínka $f[0]$ objeví vzhledem k nutnosti převést sčítání v původní sumě od $m = 1$ na sčítání od $m = 0$, neboť definiční vzorec pro $\mathcal{Z}$-transformaci sčítá od nuly. □

Příklad 51 (Diferenční rovnice). Vyjádřete $Y(z)$ z diferenční rovnice

$$y[n+2] - 2y[n+1] + y[n] = 0, \qquad y[0] = -1, y[1] = 1.$$

Řešení:

■ příklad na Z jednoduché diferenční rovnice ■ □

Věta 52 (Transformace částečného součtu)**.** *Částečnou sumu posloupnosti $f[n]$ lze transformovat jako*

$$\mathcal{Z}\left\{\sum_{\nu=0}^{n} f[\nu]\right\} = \frac{z}{z-1}F(z)$$
$$\mathcal{Z}\left\{\sum_{\nu=0}^{n-1} f[\nu]\right\} = \frac{1}{z-1}F(z)$$

Důkaz. Nejjednodušeji to lze přes konvoluci ■ ta ale teprve přijde ■

$$\mathcal{Z}\left\{\sum_{m=0}^{n} f[m]\right\} = \mathcal{Z}\left\{\sum_{m=0}^{\infty} f[m]\mathbf{1}[n-m]\right\} = \mathcal{Z}\{f[n]\}\,\mathcal{Z}\{\mathbf{1}[n]\}$$
$$= F(z)\frac{z}{z-1}$$

□

Pro $m = 1, 2, \ldots, \infty$ a diference m-tého řádu

$$\Delta^0 f[n] = f[n],$$
$$\Delta^1 f[n] = f[n+1] - f[n],$$
$$\Delta^2 f[n] = \Delta^1\left[\Delta^1 f[n]\right] = f[n+2] - 2f[n+1] + f[n]$$
$$\Delta^m f[n] = \Delta^1\left[\Delta^{m-1} f[n]\right]$$

platí tato věta o transformaci diferencí: ■ vysázet jako větu ■

$$\mathcal{Z}\left\{\Delta^1 f[n]\right\} = (z-1)F(z) - f[0]z$$
$$\mathcal{Z}\left\{\Delta^2 f[n]\right\} = (z-1)^2F(z) - f[0]\,z(z-1) + \Delta^1 f[0]z$$

Podobně, jako ve spojitém případě, i pro $\mathcal{Z}$-transformaci platí tato věta o transformaci konvoluční sumy:

Věta 53 (O konvoluci). *Je-li* $F(z) = \mathcal{Z}\{f[n]\}$ *a* $G(z) = \mathcal{Z}\{g[n]\}$, *pak pro diskrétní kovoluci obou posloupností platí*

$$\mathcal{Z}\{f[n] * g[n]\} = \mathcal{Z}\left\{\sum_{m=0}^{\infty} f[n-m]\cdot g[m]\right\} = F(z)\cdot G(z)$$

Důkaz. Vzorec pro konvoluci lze dokázat z definice $f[n-m]$ a $F(z)$ následovně:

$$y[n] = \sum_{m=0}^{n} h[n-m]\cdot u[m] = \sum_{m=0}^{n} h[m]\cdot u[n-m]$$

a odtud

$$Y(z) = \sum_{n=0}^{\infty} y[n]z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{m=0}^{\infty} h[n-m]\cdot u[m]\right)z^{-n}$$

po prohození sumace přes m a n

$$\begin{aligned} Y(z) &= \sum_{m=0}^{\infty} u[m]\left(\sum_{n=0}^{\infty} h[n-m]z^{-n}\right) = \sum_{m=0}^{\infty} u[m]\left(H(z)\cdot z^{-m}\right) \\ &= H(z)\sum_{m=0}^{\infty} u[m]z^{-m} = H(z)\cdot U(z) \end{aligned}$$

□

Pro ilustraci diskrétní konvoluce lze použít příklad násobení dvou polynomů: Pokud násobím dva polynomy $p(x)$ a $q(x)$, a $p[n]$ resp. $q[n]$ jsou posloupnosti koeficientů těchto polynomů, pak pro koeficienty polynomu $r(x) = p(x)q(x)$ platí, že $r[n] = p[n] * q[n]$.

Věta 54 (O derivaci obrazu). *Jednoduchá derivace obrazu* $F(z)$ *se na vzoru* $f[n]$ *projeví jako násobení proměnnou* n*:*

$$\mathcal{Z}\{nf[n]\} = -z\frac{dF(z)}{dz}$$

Důkaz. Máme

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}F(z) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\sum_{n=0}^{\infty} f[n]z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} f[n]\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}z^{-n} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} f[n] - nz^{-(n+1)} = -\sum_{n=0}^{\infty} n\,f[n]z^{-n}z^{-1} \\ &= -\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty} n\,f[n]z^{-n} = -\frac{1}{z}\mathcal{Z}\{nf[n]\}. \end{aligned}$$

Je tedy

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}F(z) = -\frac{1}{z}\mathcal{Z}\{nf[n]\}$$

respektive

$$-z\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}F(z) = \mathcal{Z}\{nf[n]\}.$$

□

$f[n] = \mathcal{Z}^{-1}\{F(z)\}$	$F(z) = \mathcal{Z}\{f[n]\}$
$\delta[n]$	1
$\mathbf{1}[n]$	$\frac{1}{1-z^{-1}}$
a^n	$\frac{1}{1-a\cdot z^{-1}}$
n	$\frac{z^{-1}}{(1-z^{-1})^2}$
$n\cdot a^{n-1}$	$\frac{z^{-1}}{(1-az^{-1})^2}$

Tabulka 6.1: Tabulka základních vzorů a obrazů $\mathcal{Z}$-transformace

6.2.4 *Tabulka obrazů*

Toto je pouze základní tabulka obrazů $\mathcal{Z}$-transformace, detailnější tabulka je vystavena na webových stránkách předmětu.

Ukažme si nyní na příkladech, jak vznikly $\mathcal{Z}$-páry vzor-obraz, uvedené v tabulce 6.1.

Příklad 55 (Odvození $\mathcal{Z}\{\delta[n]\}$). Pro Kroneckerovo $\delta[n]$ platí

$$\delta[n] = \begin{cases} 1 & n = 0, \\ 0 & n \neq 0 \end{cases}$$

a proto

$$\mathcal{Z}\{\delta[n]\} = \sum_{n=0}^{\infty} \delta[n] z^{-n} = 1 \cdot z^{-0} = 1.$$

Pro další vztahy si musíme připomenout, jak se počítá součet nekonečné geometrické řady. Ukažme si princip na jednoduchém příkladě:

Příklad 56 (Částečný součet geometrické řady). Chceme odvodit vzorek pro částečný součet prvních N členů geometrické řady s kvocientem q. Postupujeme tak, že od sebe odečteme částečný součet S_N a jeho q-násobek, qS_N:

$$\begin{aligned} S_N &= 1 + q + q^2 + q^3 + \cdots + q^{N-1} + q^N \\ qS_N &= q + q^2 + q^3 + q^4 + \cdots + q^N + q^{N+1} \quad S_N - qS_N \quad = 1 - q^{N+1} \end{aligned}$$

a z toho

$$S_N = \frac{1 - q^{N+1}}{1 - q} = \frac{q^{N+1} - 1}{q - 1}.$$

Analogicky pro součet nekonečné řady je

$$S_\infty = \lim_{N\to\infty} S_N = \lim_{N\to\infty} \frac{1 - q^{N+1}}{1 - q} = \frac{1}{1 - q},$$

Příklad 57 (Odvození $\mathcal{Z}\{\mathbf{1}[n]\}$ a $\mathcal{Z}\{a^n\}$). Obraz jednotkového skoku $\mathbf{1}[n]$ určíme nyní z definice jako

$$\mathcal{Z}\{\mathbf{1}[n]\} = \sum_{n=0}^{\infty} z^{-n} = \frac{1}{1 - z^{-1}} = \frac{z}{z - 1}.$$

a pro obraz diskrétní exponenciely máme analogicky

$$\mathcal{Z}\{a^n\} = \sum_{n=0}^{\infty} a^n z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{a}\right)^{-n} = \frac{1}{1 - az^{-1}} = \frac{z}{z - a}.$$

Příklad 58 (Odvození $\mathcal{Z}\{n\}$). Pro posloupnost $\{n\}_0^\infty$ dostaneme s využitím věty o derivaci

$$\mathcal{Z}\{n\} = \mathcal{Z}\{n\mathbf{1}[n]\} = -z\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\frac{1}{1-z^{-1}}. \tag{6.2}$$

Vzpomeneme si, že pokud $f(z) = g(z)/h(z)$, tak

$$f'(z) = \frac{g'(z)h(z) - g(z)h'(z)}{h(z)^2}$$

a že tedy

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\frac{1}{1-z^{-1}} = \frac{0\cdot(1-z^{-1}) - 1\cdot(0+z^{-2})}{(1-z^{-1})^2} = \frac{-z^{-2}}{(1-z^{-1})^2}.$$

Po dosazení zpět do (6.2) dostaneme

$$\mathcal{Z}\{n\} = \mathcal{Z}\{n\mathbf{1}[n]\} = -z\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\frac{1}{1-z^{-1}} = \frac{z^{-1}}{(1-z^{-1})^2}.$$

Příklad 59 (Odvození $\mathcal{Z}\{na^{n-1}\}$). Pro posloupnost $\{na^{n-1}\}_0^\infty$ dostaneme opět s využitím věty o derivaci

$$\begin{aligned}\mathcal{Z}\left\{na^{n-1}\right\} &= \frac{1}{a}\mathcal{Z}\{na^n\} = -\frac{z}{a}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\frac{1}{1-az^{-1}} \\ &= -za^{-1}\frac{0\cdot(1-az^{-1}) - 1\cdot(0+az^{-2})}{(1-az^{-1})^2} = -za^{-1}\frac{-az^{-2}}{(1-az^{-1})^2} \\ &= \frac{z^{-1}}{(1-az^{-1})^2}.\end{aligned}$$

6.3 *Inverzní $\mathcal{Z}$-transformace*

Obdobně jako u Laplaceovy transformace, i u $\mathcal{Z}$-transformace je na první pohled složitým úkolem nalézt patřičný vzor $x[n]$, máme-li zadán obecný $\mathcal{Z}$-obraz $X(z)$. Připomeňme si, že inverzní $\mathcal{Z}$-transfrmaci označujeme symbolem $\mathcal{Z}^{-1}$.

Inverzní $\mathcal{Z}$-transformace $X(z)$ nám určí posloupnost $x[n]$, a jakkoliv je tato posloupnost jednoznačně dána, neznamená to, že v případě převodu na spojitý signál $x(t)$ bude tento převod jednoznačný. Inverzní transformace $X(z)$ nám umožní určit hodnoty $x(t)$ pouze ve vybraných diskrétních časových okamžicích $t = 0, T, 2T, \cdots = nT$ a neříká nic o hodnotách mezi vzorky. Jak je vidět na obrázku **??**, jednomu $x[k]$ může odpovídat více průběhů $x(t)$.

Tam, kde nelze použít přímou zpětnou transformaci s použitím tabulek $\mathcal{Z}$-transformace, lze použít několik metod:

1. metodu přímého dělení,
2. výpočetní metodu,
3. metodu rozkladu na parciální zlomky, a případně
4. metodu výpočtu pomocí integrálu inverzní transformace.

■ doplnit informace o výpočtu přímým dělením, výpočetní metodě (Matlab), výpočtu integrálu ■

Metoda **přímého dělení** spočívá v rozkladu původní racionální lomené funkce na mocninnou řadu pomocí polynomiálního dělení.

6.3.1 *Metody výpočtu*

Zpětná $\mathcal{Z}$-transformace má tvar integrálu

$$y[n] = \frac{1}{2\pi i} \oint_C Y(z) z^{n-1} dz \equiv \mathcal{Z}^{-1}\{Y(z)\}$$

podél uzavřené křivky C, která obsahuje všechny singulární body racionální lomené funkce

$$Y(z) = \frac{Q(z)}{N(z)}.$$

6.3.2 *Nuly a póly v $\mathcal{Z}$-rovině*

V inženýrských aplikacích nabývají obrazy transformovaných veličin většinou formy racionální lomené funkce, tedy

$$X(z) = \frac{b_m z^m + b_{m-1} z^{m-1} + \cdots + b_1 z + b_0}{a_n z^n + b_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0}$$

kde $m \leq n$.

O racionální lomené funkci

$$\frac{Q(z)}{N(z)}$$

říkáme, že má *nulové body* $z_{0\nu}$, jestliže

$$Q(z_{0\nu}) = 0,$$

a že má *póly* $z_{\infty\mu}$, jestliže

$$N(z_{\infty\mu}) = 0.$$

Pokud má funkce $\frac{Q(z)}{N(z)}$ jednoduché póly, potom

$$N(z) = \prod_{\mu=1}^{N} (1 - z_{\infty\mu} z^{-1}) = (1 - z_{\infty 1} z^{-1})(1 - z_{\infty 2} z^{-1}) \ldots (1 - z_{\infty N} z^{-1})$$

a platí

$$\begin{aligned} \frac{Q(z)}{N(z)} &= \sum_{\mu=1}^{N} \frac{k_\mu}{1 - z_{\infty\mu} z^{-1}} \\ &= \frac{k_1}{1 - z_{\infty 1} z^{-1}} + \frac{k_2}{1 - z_{\infty 2} z^{-1}} + \cdots + \frac{k_N}{1 - z_{\infty N} z^{-1}} \end{aligned}$$

kde

$$\begin{aligned} k_\mu &= \lim_{z \to z_{\infty\mu}} (1 - z_{\infty\mu} z^{-1}) \frac{Q(z)}{N(z)} \\ &= Q(z_{\infty\mu}) \lim_{z \to z_{\infty\mu}} (1 - z_{\infty\mu} z^{-1}) \frac{1}{N(z)} \\ &= Q(z_{\infty\mu}) \lim_{z \to z_{\infty\mu}} \frac{1}{\frac{N(z)}{1 - z_{\infty\mu} z^{-1}}} \\ &= Q(z_{\infty\mu}) \frac{1}{N_\mu(z_{\infty\mu})} \end{aligned}$$

Pro jednoduchost budeme dále psát $z_{\infty\mu} \to z_\mu$. Protože pro $|az^{-1}| < 1$ platí

$$\mathcal{Z}^{-1}\left\{\frac{1}{1-az^{-1}}\right\} = \mathcal{Z}^{-1}\left\{\sum_{n=0}^{\infty} a^n z^{-n}\right\} = a^n$$

dostaneme

$$\mathcal{Z}^{-1}\left\{\frac{Q(z)}{N(z)}\right\} = \mathcal{Z}^{-1}\left\{\sum_{\mu=1}^{N}\frac{k_\mu}{1-z_\mu z^{-1}}\right\} = \sum_{\mu=1}^{N} k_\mu z_\mu^n.$$

Při použití zápisu transformace v kladných mocninách z musíme před vlastním rozkladem na parciální zlomky provést ještě jeden krok, a to vytknutí mocniny z před roozkládanou racionální lomenou funkci. Jedině tak totiž obdržíme jako výsledek rozkladu zlomky ve tvaru $z/(z-a)$, odpovídající tabulkovým údajům.

Příklad 60 (Rozklad s kladnými mocninami z). Mějme $\mathcal{Z}$-obraz funkce $f[n]$ ve tvaru

$$F(z) = \frac{2z^2+z}{z^2-\frac{5}{2}z+1}$$

Nalezněte $f[n]$.

Řešení:

Nejprve nalezneme póly $F(z)$,

$$F(z) = \frac{2z^2+z}{z^2-\frac{5}{2}z+1} = \frac{2z^2+z}{(z-\frac{1}{2})(z-2)}.$$

Tuto racionální lomenou funkci ale nemůžeme ještě rozložit na parciální zlomky ve tvaru $k_\mu/(z-z_{\infty\mu})$, protože jednak stupeň polynomu v čitateli je shodný se stupněm polynomu ve jmenovateli, jednak ale potřebujeme rozklad získat ve tvaru

$$F(z) = \sum_{\mu=1}^{N} k_\mu \frac{z}{z-z_{\infty\mu}},$$

což zakrývacím pravidlem nejde. Pomůže jednoduchá úprava

$$\frac{1}{z}F(z) = \frac{2z+1}{(z-\frac{1}{2})(z-2)} = -\frac{4}{3}\frac{1}{z-\frac{1}{2}} + \frac{10}{3}\frac{1}{z-2}.$$

Odtud

$$F(z) = -\frac{4}{3}\frac{z}{z-\frac{1}{2}} + \frac{10}{3}\frac{z}{z-2}$$
$$f[n] = -\frac{4}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^n + \frac{10}{3}(2)^n.$$

□

6.4 *Příklady použití*

Uveďme si nyní pár příkladů použití $\mathcal{Z}$-trasformace pro řešení příkladů.

Příklad 61 (Nabídka-poptávka). Rovnice nabídky – nabídka dnes závisí na včerejší ceně a to tak, že nabídka stoupá s rostoucí cenou. Pro $\mathcal{C} > 0$ platí

$$n[k] = \mathcal{C}c[k-1] + \mathcal{A}x[k].$$

Rovnice poptávky – poptávka dnes závisí na dnešní ceně a to tak, že poptávka klesá s rostoucí cenou. Pro $\mathcal{D} > 0$ platí

$$p[k] = -\mathcal{D}c[k] + \mathcal{B}x[k].$$

Rovnost nabídky a poptávky

$$n[k] = p[k]$$

pak vede na diferenční rovnici prvního řádu

$$c[k] + \frac{\mathcal{C}}{\mathcal{D}}c[k-1] = \frac{\mathcal{B}-\mathcal{A}}{\mathcal{D}}x[k].$$

Tuto diferenční rovnici jsme iterativně řešili již na první přednášce. Ukažme si nyní, jak lze k řešení dospět pomocí $\mathcal{Z}$-transformace.

Řešení:
Pro jednoduchost označíme

$$\frac{\mathcal{C}}{\mathcal{D}} = \gamma, \qquad \frac{\mathcal{B}-\mathcal{A}}{\mathcal{D}} = \alpha.$$

Diferenční rovnice má v označení $c[k] \equiv y[k]$ tvar

$$y[k] + \gamma y[k-1] = \alpha x[k]$$

Za přepokladu $x[k] = \mathbf{1}[k]$ a $y[k] = 0$ pro $k < 0$ dostaneme použitím $\mathcal{Z}$-transformace algebraickou rovnici

$$Y(z) + \gamma z^{-1}Y(z) = \frac{\alpha}{1-z^{-1}}$$

s řešením v $\mathcal{Z}$-rovině ve tvaru

$$Y(z) = \frac{\alpha}{(1-z^{-1})(1+\gamma z^{-1})}.$$

Rozložíme na parciální zlomky

$$Y(z) = \frac{\alpha}{(1-z^{-1})(1+\gamma z^{-1})} = \frac{k_1}{1-z^{-1}} + \frac{k_2}{1+\gamma z^{-1}},$$

kde

$$k_1 = \lim_{z\to 1}(1-z^{-1})Y(z) = \frac{\alpha}{1+\gamma},$$
$$k_2 = \lim_{z\to -\gamma}(1+\gamma z^{-1})Y(z) = \frac{\alpha\gamma}{1+\gamma}.$$

Zpětná transformace funkce

$$Y(z) = \frac{\alpha}{1+\gamma}\left(\frac{1}{(1-z^{-1})} + \frac{\gamma}{1+\gamma z^{-1}}\right)$$

pak vede na řešení ve tvaru diferenční rovnice

$$y[k] = \frac{\alpha}{1+\gamma}\left(1-(-\gamma)^{k+1}\right)\mathbf{1}[k],$$

cena

Obrázek 6.2: Výsledek simulace rovnice nabídky a poptávky vede na pavoučkový diagram, ukazující závislost nabídka-cena a poptávka-cena

které v případě stabilního trhu $\gamma = \frac{C}{D} < 1$ určuje limitní velikost ceny

$$\lim_{k\to\infty} c[k] = \frac{\alpha}{1+\gamma} = \frac{B-A}{C+D}. \tag{6.3}$$

Řešení je pro hodnoty $A = 100$, $B = 120$, $C = 3$ a $D = 4$ znázorněno na obrázku 6.2: pro každou hodnotu ceny je vidět rozdíl mezi nabídkou a poptávkou a tento rozdíl se postupně zmenšuje, dokud systém nedosáhne rovnovážného stavu, daného limitní cenou dle rovnice (6.3). Na obrázku 6.3 je znázorněn postupný vývoj hodnot nabídky a poptávky v čase.

□

Příklad 62. Diferenční rovnice 2. řádu

Hledejme řešení diferenční rovnice druhého řádu, která popisuje LTI diskrétní systém,

$$y[n+2] + 2a\,y[n+1] + (a^2+b^2)y[n] = c_0 u[n] \tag{6.4}$$

splňující počáteční podmínky ve tvaru

$$y[0] = y_0 = 1, \quad y[1] = y_1 = -1.$$

Řešení:
Rovnici (6.4) řešíme pomocí $\mathcal{Z}$-transformace. Protože platí

$$\mathcal{Z}\{y[n+m]\} = z^m \left[Y(z) - \sum_{\nu=0}^{m-1} y[\nu] z^{-\nu} \right]$$

tak

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}\{y[n]\} &= Y(z), \\ \mathcal{Z}\{y[n+1]\} &= z^1 \left[Y(z) - y[0] \right], \\ \mathcal{Z}\{y[n+2]\} &= z^2 \left[Y(z) - y[0] - z^{-1} y[1] \right]. \end{aligned}$$

Transformací nalezneme algebraický tvar diferenční rovnice (6.4) a po dosazení počátečních podmínek obdržíme

$$Y(z)\left(z^2 + 2a\,z^1 + (a^2+b^2)\right) - z^2 y_0 - z^1 y_1 - 2a\,z^1 y_0 = c_0 X(z).$$

a vyjádříme

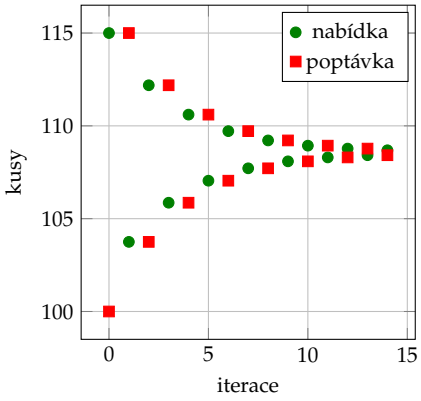
$$Y(z) = \frac{c_0 X(z) + z^1 + z^2 - z^1}{z^2 + 2a\,z^1 + (a^2+b^2)} \times \frac{z^{-2}}{z^{-2}}.$$

respektive

$$Y(z) = \frac{1 + c_0 X(z) z^{-2}}{1 + 2a\,z^{-1} + (a^2+b^2) z^{-2}}.$$

Přenosová funkce $H(z)$ je definována jako podíl obrazu výstupu k obrazu vstupu

$$H(z) = \frac{Y(z)}{U(z)}$$



Obrázek 6.3: Vývoj nabídky a poptávky po jednotlivých iteracích

pro nulové počáteční podmínky a tedy

$$H(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{c_0 z^{-2}}{1 + 2a\, z^{-1} + (a^2 + b^2) z^{-2}} = \frac{c_0 z^{-2}}{(1 - z_1 z^{-1})(1 - z_2 z^{-1})},$$

kde z_1 a z_2 jsou póly přenosové funkce

$$z_{1,2} = -a \pm \imath b.$$

Impulsní odezvu určíme jako inverzní $\mathcal{Z}$-transformaci přenosové funkce. Potože platí

$$\lim_{z \to z_1} H(z)(1 - z_1 z^{-1}) = \frac{c_0 z_1^{-1}}{z_1 - z_2},$$
$$\lim_{z \to z_2} H(z)(1 - z_2 z^{-1}) = -\frac{c_0 z_2^{-1}}{z_1 - z_2},$$

obdržíme impulsní odezvu ve tvaru

$$h[n] = \mathcal{Z}^{-1}\{H(z)\} = c_0 \frac{z_1^{n-1} - z_2^{n-1}}{z_1 - z_2}$$

□

Část III

Jednoduché aplikace

7 Analýza LTI systémů

7.1 Přenos diskrétních systémů

7.1.1 Přenosová funkce

Diferenční rovnice lineárního časově invariantního systému, za předpokladu nulových počátečních podmínek, tj. $y[n-k] = 0$ a $u[n-k] = 0$ pro $n-k < 0$, má tvar

$$a_N\, y[n-N] + a_{N-1}\, y[n-N+1] + \cdots + a_0\, y[n] = \\ = b_M\, u[n-M] + b_{M-1}\, u[n-M+1] + \cdots + b_0\, u[n]$$

tedy

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y[n-k] = \sum_{m=0}^{M} b_m u[n-m].$$

Použijeme $\mathcal{Z}$-transformaci

$$\mathcal{Z}\left\{\sum_{k=0}^{N} a_k\, y[n-k]\right\} = \mathcal{Z}\left\{\sum_{m=0}^{M} b_m\, u[n-m]\right\}$$
$$\sum_{k=0}^{N} a_k\, \mathcal{Z}\left\{y(n-k)\right\} = \sum_{m=0}^{M} b_m\, \mathcal{Z}\left\{u(n-m)\right\}$$

a dostáváme algebraickou rovnici

$$\sum_{k=0}^{N} a_k\, z^{-k} \cdot Y(z) = \sum_{m=0}^{M} b_m\, z^{-m} \cdot U(z).$$

Nyní můžeme snadno vyjádřit $Y(z)$ ve tvaru

$$Y(z) = \frac{\sum_{m=0}^{M} b_m z^{-m}}{\sum_{k=0}^{N} a_k z^{-k}} \cdot U(z)$$
$$Y(z) = H(z) \cdot U(z). \tag{7.1}$$

Připomeňme si, že mezi vstupem a výstupem v časové rovině platí vztah

$$y[n] = \sum_{m=0}^{n} h(n-m) \cdot u[n]$$

jehož $\mathcal{Z}\{-\}$transformace odpovídá rovnici (7.1)

7.1.2 Definice

Funkce $H(z) = \mathcal{Z}\{h[n]\}$ je **přenosová funkce** a má tvar racionální lomené funkce v proměnné z^{-1}

$$H(z) = \frac{\sum_{m=0}^{M} b_m z^{-m}}{\sum_{k=0}^{N} a_k z^{-k}} = \frac{Q(z)}{N(z)}$$

Funkce $S(z) = \mathcal{Z}\{s[n]\}$ je obrazem přechodové odezvy a z přenosové funkce ji určíme snadno jako

$$S(z) = H(z) \cdot \mathcal{Z}\{\mathbf{1}[n]\} = H(z)\,\frac{1}{1-z^{-1}} = H(z)\,\frac{z}{z-1}$$

7.2 Převod spojitého systému na diskrétní

7.2.1 Dopředné diference

Spojitý systém popsaný stavovými rovnicemi

$$\mathbf{x}'(t) = \mathbf{A}\,\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\,\mathbf{u}(t) \tag{7.2}$$
$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\,\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\,\mathbf{u}(t) \tag{7.3}$$

můžeme převést na ekvivalentní diskrétní systém tak, že čas t nahradíme diskrétními časovými okamžiky $t = nT$, kde T je vzdálenost mezi následujícími časovými okamžiky, neboli **perioda vzorkování**.

Všechny veličiny měříme pouze v čase $t = nT$ a proto

$$\begin{aligned} x(t) = x(nT) &\to x[n], \\ y(t) = y(nT) &\to y[n], \\ u(t) = u(nT) &\to u[n]. \end{aligned}$$

Derivaci stavu $\mathbf{x}'(t)$ nahradíme v prvním přiblížení první diferencí

$$\mathbf{x}'(t) \approx \frac{\mathbf{x}\,(nT+T) - \mathbf{x}(nT)}{T} = \frac{1}{T}\,(\mathbf{x}[n+1] - \mathbf{x}[n])\,.$$

Dosazením do (7.2) a (7.3) za dostaneme rovnici vývoje stavu ve formě

$$\frac{1}{T}\,(\mathbf{x}[n+1] - \mathbf{x}[n]) = \mathbf{A}\,\mathbf{x}[n] + \mathbf{B}\,\mathbf{u}[n].$$

Tuto rovnici upravujeme dále.

Dosazením do původních spojitých stavových rovnic dostaneme po úpravě jejich diskrétní tvar

$$\begin{aligned} \mathbf{x}[n+1] &= (\mathbf{I} + T\,\mathbf{A})\;\mathbf{x}[n] + T\mathbf{B}\,\mathbf{u}[n] \\ \mathbf{y}[n] &= \mathbf{C}\,\mathbf{x}[n] + \mathbf{D}\,\mathbf{u}[n] \end{aligned}$$

resp.

$$\begin{aligned} \mathbf{x}[n+1] &= \mathbf{M}\,\mathbf{x}[n] + \mathbf{N}\,\mathbf{u}[n] \\ \mathbf{y}[n] &= \mathbf{C}\,\mathbf{x}[n] + \mathbf{D}\,\mathbf{u}[n] \end{aligned}$$

7.3 Stabilita diskrétních systémů

Diferenční rovnice 2. řádu s konstantními koeficienty

$$y[n+2] + a\,y[n+1] + b\,y[n] = u[n]$$

má za *nulových počátečních podmínek* přenosovou funkci

$$H(z) = \frac{z^2 + z}{z^2 + a\,z + b} = \frac{z^2 + z}{(z - z_1)(z - z_2)}.$$

Poloha pólů přenosové funkce $H(z)$ rozhoduje o stabilitě systému.

7.3.1 Kritérium stability

BIBO stabilita – bounded input bounded output

Odezva na omezený vstupní signál musí být vždy omezená – systém je BIBO stabilní.

Odezva systému je kombinací

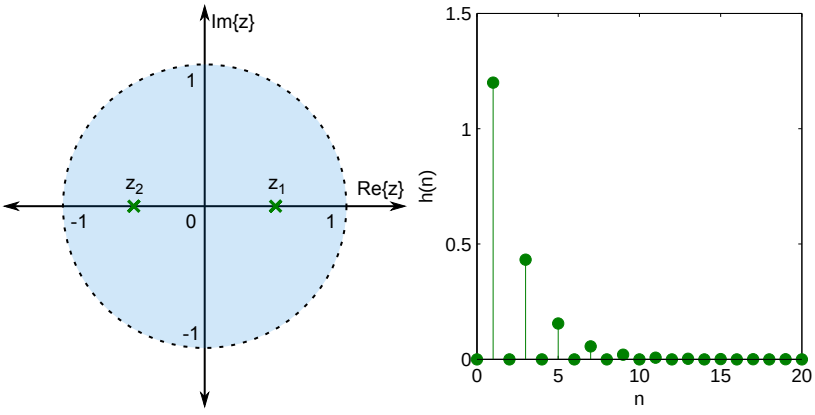
- odezvy na vstupní signál
- odezvy na počáteční podmínky

- **Stabilní systém** Všechny póly přenosové funkce $H(z)$ leží uvnitř jednotkové kružnice.
- **Nestabilní systém** Alespoň jeden pól přenosové funkce $H(z)$ leží vně jednotkové kružnice nebo alespoň jeden násobný pól leží na jednotkové kružnici.
- **Mez stability** Alespoň jeden jednoduchý pól leží na jednotkové kružnici a žádný pól neleží vně kružnice. Případné násobné póly leží uvnitř.

7.3.2 Stabilní systém

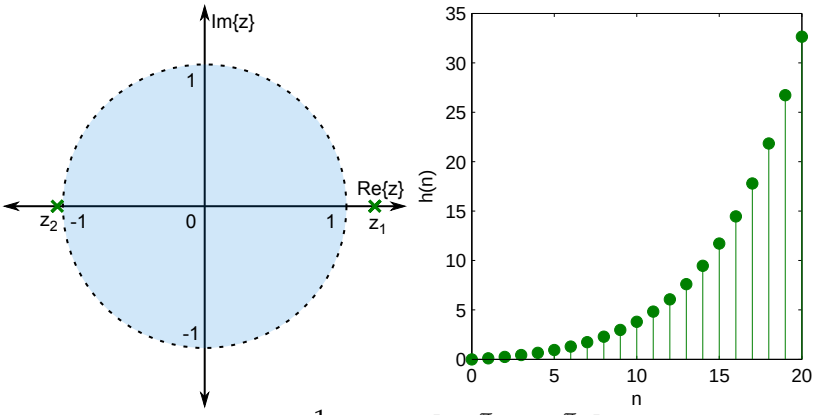
$$h[n] = (0{,}6)^n - (-0{,}6)^n$$

$$H(z) = \frac{z^2}{z^2 - \frac{1}{4}} = \frac{z^2}{(z - \frac{3}{5})(z + \frac{3}{5})}$$

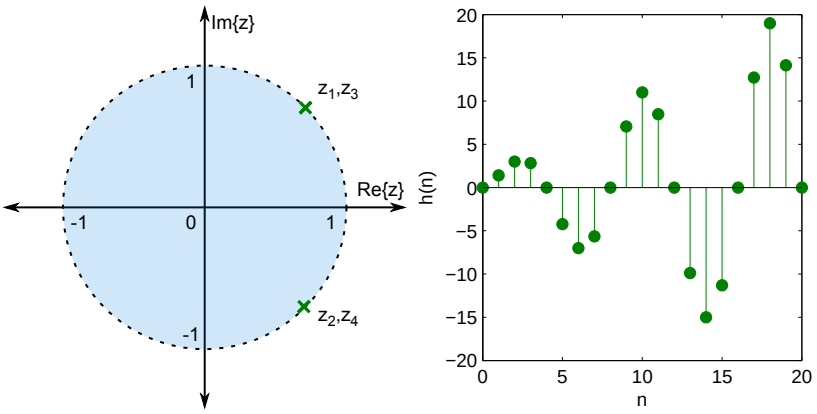


7·3·3 *Nestabilní systém*

$$h[n] = \left(\tfrac{6}{5}\right)^n - \left(-\tfrac{12}{11}\right)^n$$
$$H(z) = \frac{1}{z^2 + \frac{6}{55} + \frac{72}{55}} = \frac{1}{(z - \frac{6}{5})(z + \frac{12}{11})}$$

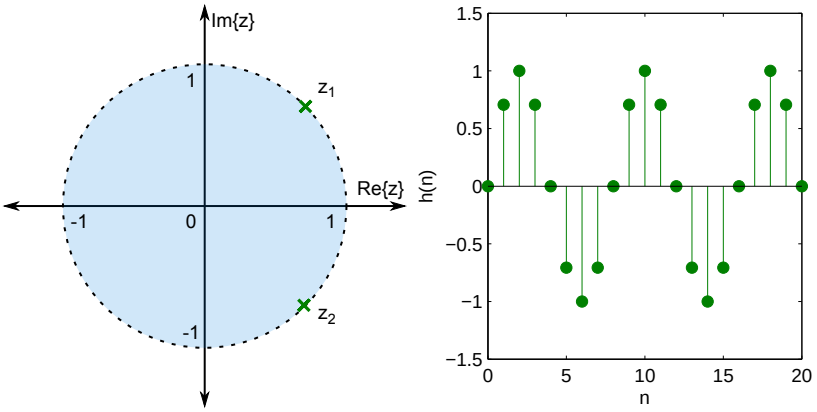


$$h[n] = (n+1) \cdot \sin \tfrac{\pi}{4} n = \frac{1}{2} i (n+1) \left[e^{-i\frac{\pi}{4}n} - e^{i\frac{\pi}{4}n} \right] [3\text{pt}]\ H(z) =$$
$$\frac{\sqrt{2}z^3 - z^2}{\left(z^2 - \sqrt{2}z + 1\right)^2} = \frac{-\frac{1}{2}i \cdot z}{z - e^{\frac{\pi}{4}i}} + \frac{-\frac{1}{2}i \cdot z}{\left(z - e^{\frac{\pi}{4}i}\right)^2} + \frac{\frac{1}{2}i \cdot z}{z - e^{-\frac{\pi}{4}i}} + \frac{\frac{1}{2}i \cdot z}{\left(z - e^{-\frac{\pi}{4}i}\right)^2}$$

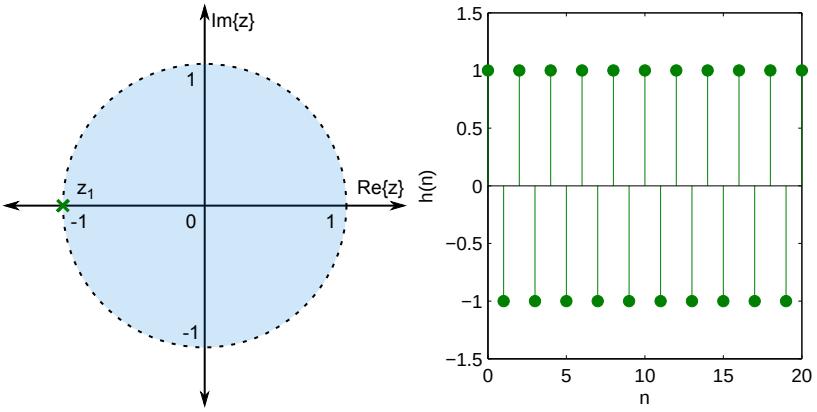


7·3·4 *Mez stability*

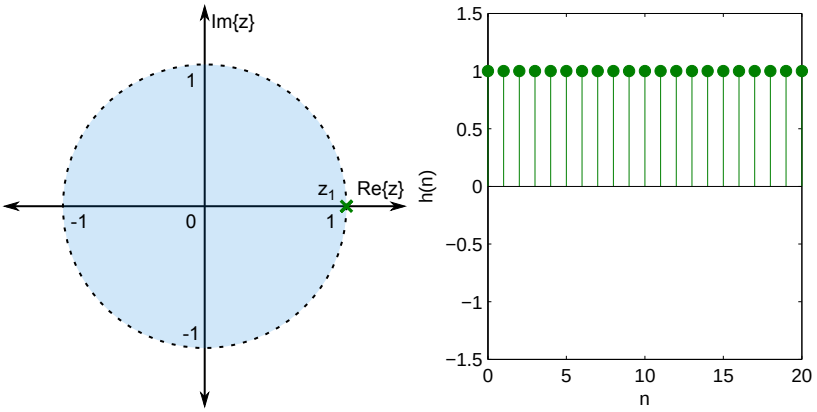
$$h[n] = \sin \tfrac{\pi}{4} n = \frac{1}{2} i \left[e^{-i\frac{\pi}{4}n} - e^{i\frac{\pi}{4}n} \right] [3\text{pt}]\ H(z) = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}z}{z^2 - \sqrt{2}z + 1} =$$
$$\frac{-\frac{1}{2}i \cdot z}{z - e^{\frac{\pi}{4}i}} + \frac{\frac{1}{2}i \cdot z}{z - e^{-\frac{\pi}{4}i}}$$



$$h[n] = (-1)^n$$
$$H(z) = \frac{1}{1+z^{-1}} = \frac{z}{z+1}$$



$$h[n] = (1)^n$$
$$H(z) = \frac{1}{1-z^{-1}} = \frac{z}{z-1}$$



7·4 *Stavový popis diskrétních systémů*

7.4.1 *Přenosová funkce*

Nalezněte přenosovou funkci $H(z)$ diskrétního LTI systému popsaného stavovými rovnicemi

$$\begin{aligned}\mathbf{x}[n+1] &= \mathbf{M}\,\mathbf{x}[n] + \mathbf{N}\,\mathbf{u}[n]\\ \mathbf{y}[n] &= \mathbf{C}\,\mathbf{x}[n]\end{aligned}$$

- Uvažujte pouze jeden vstup a výstup.
- Při odvození použijte $\mathcal{Z}$-transformaci!
- Která matice ve stavovém popisu je rozhodující pro stabilitu řešení?

7.4.2 *Příklad*

S pomocí vztahů pro $\mathcal{Z}$-transformaci transformujeme rovnice

$$\begin{aligned}\mathbf{x}[n+1] &= \mathbf{M}\,\mathbf{x}[n] + \mathbf{N}\,u[n]\\ y[n] &= \mathbf{C}\,\mathbf{x}[n]\end{aligned}$$

na

$$\begin{aligned}z(\mathbf{X}(z) - \mathbf{x}[0]) &= \mathbf{M}\,\mathbf{X}(z) + \mathbf{N}\,U(z)\\ Y(z) &= \mathbf{C}\,\mathbf{X}(z)\end{aligned}$$

Protože přenosová funkce je definována pro $x[0] = 0$, obdržíme z první rovnice

$$\mathbf{X}(z) = (z\mathbf{1} - \mathbf{M})^{-1}\mathbf{N}\,U(z)$$

a dosazením do druhé rovnice je

$$Y(z) = \mathbf{C}\,(z\mathbf{1} - \mathbf{M})^{-1}\mathbf{N}\,U(z)$$

Přenosová funkce $H(z)$ je tedy

$$H(z) = \mathbf{C}\,(z\mathbf{1} - \mathbf{M})^{-1}\mathbf{N} = \mathbf{C}\,\frac{\operatorname{adj}(z\mathbf{1} - \mathbf{M})}{\det(z\mathbf{1} - \mathbf{M})}\,\mathbf{N}$$

8 Spojování systémů

8.1 Spojování systémů

Subsystémy mohou být spojeny třemi typy vazeb:

kaskádní (do série) – $H(p) = H_1(p) \cdot H_2(p)$

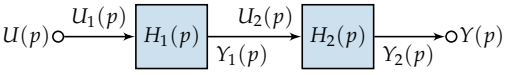
paralelní – $H(p) = H_1(p) + H_2(p)$

zpětnovazební – $H(p) = \dfrac{H_1(p)}{1 \pm H_1(p) \cdot H_2(p)}$

8.1.1 Kaskádní

Pro výslednou přenosovou funkci kaskádního řazení dvou subsystémů platí

$$H(p) = \frac{Y_1(p)}{U(p)} \cdot \frac{Y(p)}{Y_1(p)} = \frac{Y_1(p)}{U_1(p)} \cdot \frac{Y(p)}{U_2(p)} = H_1(p) \cdot H_2(p).$$

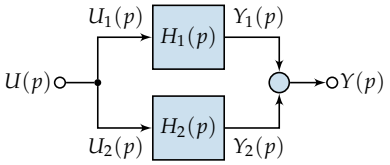


Obrázek 8.1: Kaskádní zapojení dvou subsystémů

8.1.2 Paralelní

Pro výslednou přenosovou funkci paralelního řazení dvou subsystémů platí

$$H(p) = \frac{Y_1(p)}{U(p)} + \frac{Y_2(p)}{U(p)} = H_1(p) + H_2(p).$$



Obrázek 8.2: Paralelní zapojení dvou subsystémů

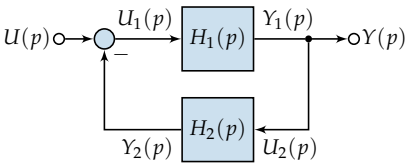
8.1.3 Zpětnovazební

Pro výslednou přenosovou funkci zpětnovazebního řazení dvou subsystémů odvodíme postupně

$$\begin{aligned} \text{na výstupu} \quad & Y_1(p) = Y(p) = U_2(p) \\ \text{na vstupu} \quad & U_1(p) = U(p) - Y_2(p)\,. \end{aligned}$$

Nyní vyjádříme výstupní $Y_1(p)$ a $Y_2(p)$ pomocí dílčích přenosových funkcí a dostaneme

$$\begin{aligned} Y(p) = Y_1(p) &= H_1(p) \cdot U_1(p) \\ &= H_1(p)\,(U(p) - Y_2(p)) \\ &= H_1(p)\,(U(p) - H_2(p) \cdot U_2(p)) \\ &= H_1(p)\,(U(p) - H_2(p) \cdot Y(p))\,. \end{aligned}$$



Obrázek 8.3: Zpětnovazební zapojení dvou subsystémů se zápornou zpětnou vazbou. Přenos přímé větve je $H_1(p)$, přenos rozpojené zpětnovazební smyčky je $H_1(p) \cdot H_2(p)$.

Vyjádříme nakonec

$$Y(p) + H_1(p) \cdot H_2(p) \cdot Y(p) = H_1(p) \cdot U(p),$$

a je

$$H(p) = \frac{Y(p)}{U(p)} = \frac{H_1(p)}{1 + H_1(p) \cdot H_2(p)}.$$

Přenos systému s jednoduchou **zápornou zpětnou vazbou** je dán poměrem přenosu přímé větve ku přenosu celé rozpojené smyčky zvětšenému o 1.

Pokud je zpětný signál na vstupu přičítán, hovoříme o **kladné zpětné vazbě** a znaménko ve jmenovateli je opačné

$$H(p) = \frac{Y(p)}{U(p)} = \frac{H_1(p)}{1 - H_1(p) \cdot H_2(p)}.$$

8.1.4 *Dynamické vlastnosti*

Na dynamických vlastnostech a časových odezvách se podílejí póly $\left[p_{1\infty\mu}, p_{2\infty\mu}\right]$ dílčích přenosových funkcí.

Pro

- **kaskádní** spojení se poloha pólů nemění,
- **paralelní** spojení se poloha pólů nemění, ale
- **zpětnovazební** spojení se poloha pólů *významně* mění.

Příklad 63 (Spojitý případ). Do série s nestabilním systémem druhého řádu

$$H_1(p) = \frac{p^2 + 3p + 2}{p^2 - p + 1}$$

je zapojen zesilovací člen se zesílením A. Systém je uzavřen zápornou zpětnou vazbou. Určete $H(p)$.

Řešení:

Přenos záporné zpětné vazby je

$$H(p) = \frac{Y(p)}{U(p)} = \frac{H_1(p)}{1 + H_1(p) \cdot A}.$$

a tedy

$$H(p) = \frac{p^2 + 3p + 2}{p^2 - p + 1} \frac{p^2 - p + 1}{p^2 - p + 1 + A\,p^2 + 3A\,p + 2A}$$

Výsledek je

$$H(p) = A\,\frac{p^2 + 3p + 2}{(A+1)\,p^2 + (3A-1)\,p + 2A + 1}$$

□

Příklad 64 (Diskrétní případ). Do série se stabilním diskrétním systémem druhého řádu

$$H_1(z) = \frac{z^2 - 2z}{z^2 - \frac{1}{4}}$$

je zapojen zesilovací člen se zesílením $\alpha > 0$. Systém je uzavřen kladnou zpětnou vazbou. Určete výsledný přenos $H(z)$.

Řešení:

Přenos kladné zpětné vazby je

$$H(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{H_1(z)}{1 - H_1(z) \cdot \alpha}.$$

a tedy

$$H(z) = \frac{z^2 - 2z}{z^2 - \frac{1}{4}} \cdot \frac{z^2 - \frac{1}{4}}{z^2 - \frac{1}{4} - (\alpha z^2 - 2\alpha z)}.$$

Výsledný přenos systému je

$$H(z) = \frac{z^2 - 2z}{(1 - \alpha) z^2 + 2\alpha z - \frac{1}{4}}$$

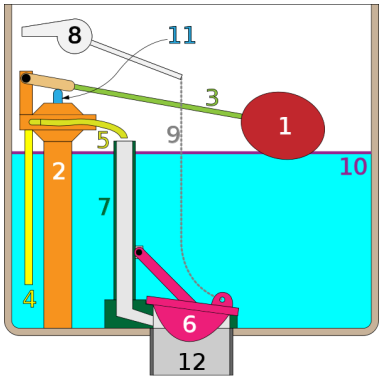
□

8.1.5 *Příklady zpětnovazebních systémů*

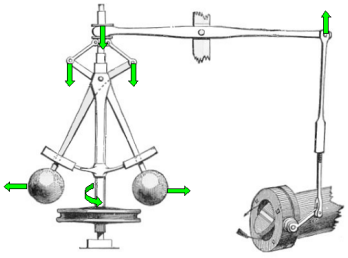
V reálném světě okolo nás se ze zpětnovazebními zapojeními setkáváme velmi často, aniž si to mnohdy uvědomujeme.

Asi nejčastěji se vyskytující mechanické zařízení se zpětnou vazbou v našem okolí je uvedeno na obrázku 8.4. Najdete jej v každé nádržce splachovacího WC.

Velmi často se i dnes setkáme s odstředivým regulátorem otáček (často se mu ne zcela přesně říká Wattův odstředivý regulátor), jenž byl původně součástí parních strojů, ale i dnes jej najdeme například ve jako součást bicího mechanismu velkých věžních hodin. Původní Wattův regulátor je znázorněn na obrázku 8.5.



Obrázek 8.4: Plovákový ventil udržující stálou hladinu kapaliny v nádrži. Převzato z Wikipedie



Obrázek 8.5: Wattův odstředivý regulátor rychlosti. Převzato z Wikipedie

Literatura

DynLAB. Course on modeling and control of multidisciplinary systems, 2008. URL http://virtual.cvut.cz/dynlabcourse/.

Alan V. OPPENHEIM, Alan S. WILLSKY, and Syed Hamid NAWAB. *Signals and Systems*. Prentice Hall, Upper Saddle River, 2 edition, 1997. ISBN 01-381-4757-4.

Christian SCHMID. Course on dynamics of multidisplicinary and controlled systems, 2005. URL http://www.atp.ruhr-uni-bochum.de/rt1/syscontrol/main.html.

Jan ŠTECHA and Vladimír HAVLENA. *Teorie dynamických systémů*. Skriptum ČVUT FEL. Ediční středisko ČVUT, Praha, 2005.

Rejstřík

úhlová frekvence, 17
časově invariantní, 21

amplituda, 17
analogovou sekvenci, 73

cykloidě, 28

Diracův impuls, 15

fázový posun, 17
Fourierova transformace, 41
fundamentální perioda, 17, 18

Heavisideův vzorec, 53
Heavisideovu větu, 44

impulsní odezva, 19, 23

kauzální, 22
konvoluční sumu, 21
kvantovaný, 17

Laplaceova transformace, 43
license, 2

model systému, 7
modely
  deterministické, 6
  empirické, 7
  mechanistické, 7
  stochastické, 6

obrazem, 43

operátorového počtu, 51

přímého dělení, 80
přechodová odezva, 19, 23
parciálních zlomků, 52
perioda diskrétního signálu, 18

residua, 53
ryzí systém, 32

stavový popis, 10, 35, 36

vlastní číslo, 41
vlastní funkce, 41
vlci a ovečky, 29
vnitřních stavů, 10
vzorem, 43