11MSP: Domácí příprava č. 2

Odezvy systémů
Vnější a vnitřní popis systémů
Dopředná Laplaceova transformace
Zpětná Laplaceova transformace
Řešení diferenciálních rovnic
Stabilita systémů

Jan Přikryl, Bohumil Kovář, Lucie Kárná

11. března 2017

Obsah

Kromě typu úloh, uvedených v tomto textu, se v písemce samozřejmě mohou vyskytnout otázky na cokoliv z odpřednášené teorie – předpokládáme, že jste dostatečně seznámeni se základními vlastnostmi spojitých a diskrétních systémů a s teorií (a matematickými postupy) vnějšího a vnitřního popisu systémů.

V písemce se neobjeví příklady na stabilitu systémů (poslední číslovaný odstavec). Uvádíme je zde pro úplnost, objeví se až v závěrečném testu.

Důrazně doporučujeme vaší pozornosti text *Příklady na Laplaceovu transformaci*, jenž si můžete stáhnout jako `priklady_laplace_2016.pdf` z webových stránek s programem cvičení.

1 Odezvy systémů

Úkol 1. Je-li $h(t) = t\cos t$, jaký bude průběh přechodové odezvy?

Úkol 2. Z definičního vztahu určete průběh přechodové odezvy diskrétního systému, jehož impulsní odezva je $h[n] = (1/2)^n$.

Úkol 3. Je-li $h(t) = e^{-2t} + e^{-t}$, jaký bude průběh přechodové odezvy?

Úkol 4. Určete přechodovou odezvu systému, je-li

$$h(t) = \sin \omega t.$$

Příklad 1. Vypočtěte prvních 10 členů posloupnosti impulsní odezvy systému, jehož přechodová odezva je

$$s[n] = \left\{ \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \frac{6}{7}, \frac{7}{8}, \frac{8}{9}, \frac{9}{10}, \frac{10}{11}, \frac{11}{12} \right\}_0^{10}.$$

Řešení:
Pouze naznačíme, že z definičního vzorce $s[n] = \sum_{m=1}^{n} h[m]$ plyne

$$\begin{aligned} s[0] &= h[0] \\ s[1] &= h[0] + h[1] \\ s[2] &= h[0] + h[1] + h[2] \end{aligned}$$

a tak dále. Z tohoto rozpisu lze pohodlně odvodit vztah pro výpočet $h[n]$ z hodnot $s[n]$. □

Úkol 5. Je-li $s(t) = e^{-3t} - e^{-2t} + t$, jaký bude průběh impulzní odezvy?

2 Vnější a vnitřní popis systémů

Úkol 6. Pro ryzí spojitý lineární systém n-tého řádu se dvěma vstupy a dvěma výstupy uveďte rozměry všech matic stavového popisu.

Úkol 7. Jaká bude nejvyšší derivace, vyskytující se ve vnějším popisu lineárního systému, jemuž odpovídá stavový popis se stavovým vektorem $\mathbf{x}$ o 7 prvcích?

Úkol 8. Pokud má stavová rovnice lineárního systému matice s rozměry $\mathbf{A}_{4\times4}$, $\mathbf{B}_{4\times2}$, jaký je řád systému? Kolik má tento systém vstupů?

Pokud si nevíte rady s následujícími úkoly, nahlédněte prosím do poznámek ke 4. přednášce, kde se téma poměrně zevrubně probíralo.

Úkol 9. Vnější popis systému rovnicí

$$y''(t) - 2y(t) = \mathbb{1}(t)$$

s počátečními podmínkami $y'(0) = -1$ a $y(0) = 1$ převeďte na ekvivalentní vnitřní popis.

Úkol 10. Vnější popis vázaného systému s výstupy $y(t)$ a $z(t)$, popsaného soustavou rovnic

$$\begin{aligned} y'(t) - 2y(t) &= \mathbb{1}(t) \\ z'(t) + y(t) - z(t) &= 0 \\ z''(t) - z'(t) + z(t) &= \mathbb{1}(t) \end{aligned}$$

s počátečními podmínkami $y(0) = 1$ a $z(0) = 0$, převeďte na ekvivalentní vnitřní popis.

Úkol 11. Vnější popis systému rovnicí

$$y''(t) + 3\,y'(t) - 2\,y(t) = u_1(t) + u_2(t)$$

s počátečními podmínkami $y'(0) = 1$ a $y(0) = 1$ převeďte na ekvivalentní vnitřní popis.

3 Dopředná Laplaceova transformace

Úkol 12. Ve tvaru jedné racionální lomené funkce zapište Laplaceovu transformaci $X(p)$ funkce

$$x(t) = e^{2t} + e^{-3t}.$$

Pokud budete v následujících úlohách tápat, podívejte se na větu o posunutí ať už v poznámkách z přednášky, případně na příklady na Laplaceovy transformaci, přístupné na webu cvičení 11MSP.

Úkol 13. Zapište Laplaceovu transformaci funkce

$$x(t) = \begin{cases} t^2 - 2t + 1 & t \geq 1, \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

Úkol 14. Zapište Laplaceovu transformaci funkce

$$x(t) = \mathbb{1}(t-2)\left(te^{-t}e^2 - 2e^{2-t}\right).$$

Příklad 2. Pomocí definičního vzorce odvoďte Laplaceovu transformaci $X(p)$ funkce

$$x(t) = \begin{cases} 1 & 0 \leq t \leq 1, \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

Řešení:
Pouze naznačíme, že

$$X(p) = \int_0^\infty x(t)e^{-pt}\mathrm{d}t = \int_0^1 e^{-pt}\mathrm{d}t.$$

Zbytek je triviální. □

Úkol 15. S využitím Eulerova vzorce pro vyjádření $\sin \omega t$ pomocí součtu komplexních exponenciel a s využitím znalostí o výpočtu obrazu $\mathcal{L}\left\{t\right\}$ respektive $\mathcal{L}\left\{te^{-\alpha t}\right\}$ z podkladů k přednáškám odvoďte Laplaceovu transformaci $X(p)$ funkce

$$x(t) = t \sin \omega t.$$

Výsledek si můžete ověřit v tabulkách.

Příklad 3. Zapište algebraický tvar stavových rovnic, jenž vznikne Laplaceovou transformací soustavy

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x_1(t) &= x_1(t) - 2\,x_2(t) + \delta(t)\\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x_2(t) &= -x_1(t) + x_2(t).\end{aligned}$$

s počátečním stavem systému $x_1(0) = 0$ a $x_2(0) = 1$.

Řešení:
V soustavě se vyskytuje pouze první derivace, je tedy

$$\begin{aligned}p\,X_1(p) &= X_1(p) - 2\,X_2(p) + 1\\ p\,X_2(p) - 1 &= -X_1(p) + X_2(p).\end{aligned}$$

$\square$

Úkol 16. Zapište algebraický tvar stavových rovnic

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}\mathbf{x}(t) - \begin{bmatrix} a \\ 0 \end{bmatrix} u(t)$$

je-li počáteční stav systému $\mathbf{x}(0) = (x_1, x_2)^{\mathrm{T}} = (0,1)^{\mathrm{T}}$ a $u(t) = t$.

Příklad 4. Diferenciální rovnici

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}y(t) + a_1\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}y(t) + a_0\,y(t) = u(t)$$

s počátečními podmínkami ve tvaru

$$y(0) = 1, \qquad\qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}y(0) = 2,$$

transformujte pomocí Laplaceovy transformace na algebraický tvar. Přepokládejte, že $u(t) = \delta(t)$ a určete tvar algebraického řešení pro $Y(p)$.

Řešení:
Podle věty o obrazu derivace je algebraický tvar rovnice

$$p^2Y(p) - p\,y(0) - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}y(0) + a_1pY(p) - a_1\,y(0) + a_0Y(p) = U(p)$$

a protože $u(t) = \delta(t)$ tak $U(p) = 1$. Do rovnice dosadíme za $U(p)$ a za počáteční podmínky

$$p^2Y(p) - p - 2 + a_1pY(p) - a_1 + a_0Y(p) = 1$$

a upravíme

$$Y(p)\left(p^2 + a_1p + a_0\right) = 1 + p + 2 + a_1.$$

Algebraické řešení pro $Y(p)$ je tedy

$$Y(p) = \frac{p + 3 + a_1}{p^2 + a_1p + a_0}$$

□

Úkol 17. Ve tvaru jedné racionální lomené funkce zapište Laplaceův obraz výstupu $Y(p)$ spojitého LTI systému popsaného vnějším popisem

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}y(t) - y(t) = e^{2t}.$$

při nulových počátečních podmínkách.

Úkol 18. V podobě jedné racionální lomené funkce určete přenosovou funkci $H(p) = \mathcal{L}\{h(t)\}$ systému, o němž víte, že za nulových počátečních podmínek je jeho odezva na vstupní signál

$$u(t) = e^{-3t} + e^{-t}$$

rovna

$$y(t) = 2te^{-3t}.$$

4 Zpětná Laplaceova transformace

Příklad 5. Určete $f(t)$, pokud pro $a \in \mathbb{R}$ je

$$F(p) = \frac{e^{-2p}}{2a} \cdot \frac{2p + a}{p^2 + 3p + 3}.$$

Řešení:
Ve vztahu pro $F(p)$ označuje e^{-2p} posunutí s $\tau = 2$ a $1/2a$ je blíže neurčená reálná konstanta. Obraz $F(p)$ můžeme proto přepsat na

$$F(p) = \frac{e^{-2p}}{2a} \cdot G(p) \tag{1}$$

a nejprve určit $g(t) = \mathcal{L}^{-1}\{G(p)\}$. Z rovnice (1) potom plyne, že

$$f(t) = \mathbb{1}(t-2)\frac{g(t-2)}{2a}.$$

Vzor $g(t)$ určíme zpětnou transformací

$$
\begin{aligned}
g(t) &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2p+a}{p^2+3p+3}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2p+a}{\left(p+\frac{3}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}\right\} = \\
&= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2p+a}{\left(p+\frac{3}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{2}\frac{p+\frac{3}{2}-\frac{3}{2}+\frac{a}{2}}{\left(p+\frac{3}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}\right\} = \\
&= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{2}\frac{p+\frac{3}{2}}{\left(p+\frac{3}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}\right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{2}\frac{\frac{a-3}{2}\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}}{\left(p+\frac{3}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}\right\} = \\
&= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{2}\frac{p+\frac{3}{2}}{\left(p+\frac{3}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}\right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{a-3}{2\sqrt{3}}\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\left(p+\frac{3}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}\right\} \\
&= \frac{1}{2}e^{-\frac{3}{2}t}\left[\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t+\frac{a-3}{\sqrt{3}}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t\right].
\end{aligned}
$$

Je tedy

$$
f(t) = \mathbb{1}(t-2)\frac{1}{4a}e^{-\frac{3}{2}(t-2)}\left[\cos\frac{\sqrt{3}}{2}(t-2)+\frac{a-3}{\sqrt{3}}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}(t-2)\right].
$$

□

Úkol 19. Určete $f(t)$, pokud je

$$
F(p) = \frac{3p+4}{p^2+2p+10}
$$

Výsledek neuvádějte v komplexním oboru.

Úkol 20. Určete $f(t)$, pokud je

$$
F(p) = \frac{2}{p^2}(1-e^{-p}-pe^{-3p})
$$

Úkol 21. Určete $f(t)$, pokud je

$$
F(p) = \frac{3p^2+2p-4}{p^3+7p^2+10p}.
$$

Úkol 22. Určete $f(t)$, pokud je

$$
F(p) = \frac{1}{p(p+2)^2}.
$$

Úkol 23. Určete $f(t)$, pokud je

$$F(p) = \frac{3p + 2 - 6e^{-\pi p}}{p^2 + 4}.$$

Úkol 24. Určete $f(t)$, pokud je

$$F(p) = \frac{5p}{(p^2 + 4)(p^2 + 9)}.$$

5 Řešení integrálních rovnic

Příklad 6. Nalezněte řešení integrální rovnice

$$y(t) = 4t - \int_0^t y(t - \tau)\tau \, \mathrm{d}\tau. \tag{2}$$

Řešení:
Podle věty o konvoluci je

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(t - \tau)g(\tau) \, \mathrm{d}\tau\right\} = F(p) \cdot G(p)$$

a v případě konvoluce, jež se vyskytuje v rovnici (2), vidíme, že

$$\begin{aligned} f(t) &= y(t), \\ g(t) &= t \end{aligned}$$

a po transformaci rovnice získáme

$$\begin{aligned} Y(p) &= \frac{4}{p^2} - Y(p) \cdot \frac{1}{p^2}, \\ p^2 Y(p) + Y(p) &= 4, \\ Y(p) &= \frac{4}{p^2 + 1} = 4\frac{1}{p^2 + 1}. \end{aligned}$$

Po zpětné transformaci dostaneme

$$y(t) = 4 \sin t.$$

□

Úkol 25. Nalezněte řešení integrální rovnice

$$y'(t) + y(t) - 2\int_0^t y(\tau) \, \mathrm{d}\tau = t, \quad y(0) = 0$$

Úkol 26. Nalezněte řešení integrální rovnice

$$x'(t) + \int_0^t (t - \tau)x(\tau) \, \mathrm{d}\tau = t + \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{24}t^4, \quad x(0) = 0$$

6 Řešení diferenciálních rovnic

Vzorové řešené úlohy k této části najdete jak v podkladech z přednášek, tak i ve zmíněném textu text *Příklady na Laplaceovu transformaci*, jenž si můžete stáhnout jako `priklady_laplace_2016.pdf` z webových stránek s programem cvičení.

Úkol 27. Určete průběh signálu na výstupu spojitého LTI systému, popsaného diferenciální rovnicí

$$y''(t) + 2\,y'(t) + 3\,y(t) = 1000\,[\mathbb{1}(t) - \mathbb{1}(t-1)]$$

s počátečními podmínkami $y(0) = 1$ a $y'(0) = -1$.

Úkol 28. Nalezněte řešení diferenciální rovnice

$$x'(t) - 2x(t) = f(t), \quad x(0) = -3$$

kde

$$f(t) = \begin{cases} 8 - 4t & 0 \le t \le 2, \\ 0 & t > 2. \end{cases}$$

Úkol 29. Nalezněte řešení diferenciální rovnice

$$y''(t) - y'(t) - 6\,y(t) = 2$$

s počátečními podmínkami $y(0) = 1$ a $y'(0) = 0$.

7 Stabilita systémů

Jak jsme již uváděli v úvodu tohoto textu, příklady na stabilitu zde uvádíme pouze pro úplnost, úlohy na stabilitu spojitých systémů nebudou předmětem testu. Na stabilitu spojitých a diskrétních systémů se ale budeme ptát v zápočtovém testu.

Příklad 7. Určete podmínky stabilní odezvy autonomního spojitého LTI systému, popsaného diferenciální rovnicí

$$y''(t) - (a-2)\,y'(t) - 2a\,y(t) = 0$$

s počátečními podmínkami $y(0) = 1$ a $y'(0) = -1$. Vykreslete přibližný průběh odezvy pro $a = 1$.

Řešení:
Pro stabilní odezvu autonomního systému platí $\lim_{t\to\infty} y(t) = 0$, *musí tedy platit, že všechny póly* $p_{\infty i}$ *Laplaceova obrazu* $Y(p)$ *mají* $\mathrm{Re}(p_{\infty i}) < 0$. *Po transformaci máme*

$$p^2Y(p) - py(0) - y'(0) - (a-2)\,[pY(p) - y(0)] - 2aY(p) = 0$$

$$Y(p)\left(p^2 - (a-2)p - 2a\right) = py(0) + y'(0) - (a-2)y(0)$$

$$Y(p) = \frac{p - a + 1}{(p-a)(p+2)}$$

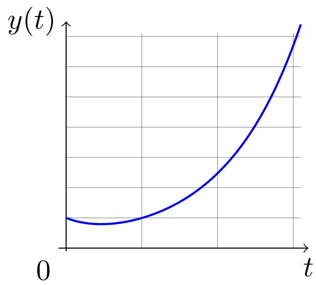
a odezva $y(t)$ bude stabilní pro $a < 0$. Je totiž

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{p-a+1}{(p-a)(p+2)}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{a+2}\frac{1}{p-a} + \frac{a+1}{a+2}\frac{1}{p+2}\right\} =$$
$$= \frac{1}{a+2}\left(e^{at} + (a+1)\,e^{-2t}\right).$$

Pro $a = 1$ je odezva

$$y(t) = \frac{1}{3}\left(e^{t} + 2\,e^{-2t}\right)$$

a její obrázek je



$\square$

Příklad 8. Určete podmínky stabilní odezvy autonomního spojitého LTI systému, popsaného diferenciální rovnicí

$$y'(t) + ay(t) = 0$$

s počáteční podmínkou $y(0) = 2$.

Řešení:
Odezva $y(t)$ je stabilní v případě, že $\lim_{t\to\infty} y(t) = 0$. Je tedy třeba vyjádřit $Y(p)$ a podívat se na polohu pólů. $\square$

Úkol 30. Určete, pro která a je spojitý LTI systém, popsaný diferenciální rovnicí

$$y''(t) + 2a\,y'(t) + a^2 y(t) = 2u(t).$$

stabilní a v jakých případech bude na mezi stability.

Úkol 31. Vyšetřete stabilitu spojitého LTI systému, popsaného diferenciální rovnicí

$$y^{(3)}(t) - 2\,y''(t) + y'(t) - 3\,y(t) = 2u(t).$$

Úkol 32. Vyšetřete stabilitu spojitého LTI systému, popsaného stavovou rovnicí

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x_1(t) = x_1(t) - 2\,x_2(t) + u(t)$$
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x_2(t) = -x_1(t) + x_2(t).$$

Úkol 33. Je spojitý LTI systém, popsaný následující rovnicí, stabilní? Uveďte proč.

$$y'(t) + 5y(t) + 6\int_0^t y(\tau)d\tau = 0, \quad y(0) = 1$$

Úkol 34. Pro jaké hodnoty α *nebude* následující spojitý LTI systém stabilní?

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x_1(t) &= x_1(t) - \alpha\, x_2(t) + u(t) \\
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x_2(t) &= -x_1(t) + x_2(t) \\
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x_3(t) &= x_2(t) + x_3(t).
\end{aligned}$$