11MSP: Domácí příprava č. 3

Vnitřní a vnější popis diskrétních systémů
Dopředná $\mathcal{Z}$-transformace
Zpětná $\mathcal{Z}$-transformace
Řešení diferenčních rovnic
Stabilita diskrétních systémů
Spojování systémů
Diskretizace

Jan Přikryl, Bohumil Kovář, Lucie Kárná

11. března 2017

Obsah

Kromě otázek, uvedených v tomto psaní, se v písemce samozřejmě mohou vyskytnout otázky na cokoliv z odpřednášené teorie – předpokládáme, že jste dostatečně seznámeni se základními vlastnostmi spojitých a diskrétních systémů a s teorií (a matematickými postupy) vnějšího a vnitřního popisu systémů.

Doporučujeme vaší pozornosti text *Příklady na $\mathcal{Z}$-transformaci*, jenž si můžete stáhnout jako `priklady_z_2016.pdf` z webových stránek s programem cvičení.

V písemce se neobjeví příklady na stabilitu systémů, spojování systémů a diskretizaci (poslední tři číslované odstavce). Uvádíme je zde pro úplnost, objeví se až v závěrečném testu.

1 Převod mezi vnějším a vnitřním popisem

Převod mezi vnějším a vnitřním popisem jsme si ukazovali na přednášce pro spojité systémy. U systémů diskrétních je postup zcela analogický.

Příklad 1. Diskrétní LTI systém, popsaný rovnicí

$$y[n+2] - y[n+1] + y[n] = -\left(\frac{1}{2}\right)^n \tag{1}$$

s počátečními podmínkami $y[0] = 1$ a $y[1] = -1$ převeďte na ekvivalentní vnitřní popis. Zapište matice vnitřního popisu.

Řešení:
Analogicky se spojitými systémy zavedeme substituci

$$\begin{aligned} x_1[n] &\equiv y[n], \\ x_2[n] &\equiv y[n+1] \end{aligned}$$

z čehož plyne rovnou

$$x_1[n+1] = x_2[n].$$

Po dosazení do (1) máme

$$\begin{aligned} x_2[n+1] - x_2[n] + x_1[n] &= -\left(\frac{1}{2}\right)^n \\ x_2[n+1] &= -x_1[n] + x_2[n] - \left(\frac{1}{2}\right)^n \end{aligned}$$

Systém je tedy popsán soustavou rovnic

$$\begin{aligned} x_1[n+1] &= x_2[n] \\ x_2[n+1] &= -x_1[n] + x_2[n] - \left(\frac{1}{2}\right)^n \\ y[n] &= x_1[n]. \end{aligned}$$

a matice jsou

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{N} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{D} = \emptyset.$$

□

Úkol 1. Diskrétní LTI systém, popsaný rovnicí

$$\frac{1}{2}y[n+2] - y[n] = (-2)^n$$

s počátečními podmínkami $y[0] = -1$ a $y[1] = 0$ převeďte na ekvivalentní vnitřní popis. Zapište matice vnitřního popisu.

Úkol 2. Diskrétní LTI systém, popsaný rovnicí

$$\frac{1}{2}y[n] - y[n-2] = (-2)^n$$

převeďte na ekvivalentní vnitřní popis. Zapište matice vnitřního popisu.

Příklad 2. Mějme diskrétní LTI systém, popsaný soustavou rovnic

$$\begin{aligned} x_1[n+1] &= 2x_1[n] + x_2[n] \\ x_2[n+1] &= -x_1[n] - u[n] \\ y[n] &= x_1[n]. \end{aligned}$$

s počátečními podmínkami $x_1[0] = -1$ a $x_2[0] = 1$. Bez použití $\mathcal{Z}$-transformace nalezněte možnou rovnici vnějšího popisu systému a odpovídající počáteční podmínky.

Řešení:
Prostým dosazením $y[n] \equiv x_1[n]$ *a* $y[n+1] \equiv x_1[n+1]$ *máme*

$$\begin{aligned} y[n+1] &= 2y[n] + x_2[n] \\ x_2[n+1] &= -y[n] - u[n]. \end{aligned}$$

Systém je LTI, první rovnici můžeme proto přepsat substitucí $n \to n+1$ *na*

$$y[n+2] = 2y[n+1] + x_2[n+1]$$

a po dosazení druhé rovnice soustavy za $x_2[n+1]$ *máme*

$$y[n+2] = 2y[n+1] - y[n] - u[n].$$

Výsledná rovnice vnějšího popisu by tedy mohla být například

$$y[n+2] - 2y[n+1] + y[n] = -u[n].$$

Protože je $y[n] = x_1[n]$*, je* $y[0] = x_1[0] = -1$*. Z první rovnice soustavy potom máme* $y[1] = 2x_1[0] + x_2[0]$ *a druhá počáteční podmínka je proto* $y[1] = -1$*.* $\square$

Úkol 3. Mějme diskrétní LTI systém, popsaný soustavou rovnic

$$\begin{aligned} x_1[n+1] &= 2x_2[n] - u[n] \\ x_2[n+1] &= -x_1[n] \\ y[n] &= x_2[n]. \end{aligned}$$

s počátečními podmínkami $x_1[0] = 1$ a $x_2[0] = 0$. Bez použití $\mathcal{Z}$-transformace nalezněte možnou rovnici vnějšího popisu systému a odpovídající počáteční podmínky.

2 Opakování iterativních výpočtů

Příklad 3. Bez použití $\mathcal{Z}$-transformace vypočtěte prvních pět členů posloupnosti výstupu diskrétního LTI systému s impulsní odezvou

$$h[n] = -\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

pokud na vstup přivedeme signál $u[n] = (-1)^n$.

Řešení:
Výstup diskrétního LTI systému je dán konvolucí vstupu s impulsní odezvou, tedy

$$y[n] = \sum_{m=0}^{\infty} h[n-m]u[m] = \sum_{m=0}^{n} h[n-m]u[m].$$

Z toho

$$\begin{aligned}
y[0] &= h[0]u[0] \\
&= 1 \cdot 1 = 1 \\
y[1] &= h[1]u[0] + h[0]u[1] \\
&= \frac{1}{2} \cdot 1 + 1 \cdot (-1) = -\frac{1}{2} \\
y[2] &= h[2]u[0] + h[1]u[1] + h[0]u[2] \\
&= \frac{1}{4} \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot (-1) + 1 \cdot 1 = \frac{3}{4} \\
y[3] &= h[3]u[0] + h[2]u[1] + h[1]u[2] + h[0]u[3] \\
&= \frac{1}{8} \cdot 1 + \frac{1}{4} \cdot (-1) + \frac{1}{2} \cdot 1 + 1 \cdot (-1) = -\frac{5}{8} \\
y[4] &= h[4]u[0] + h[3]u[1] + h[2]u[2] + h[1]u[3] + h[0]u[4] \\
&= \frac{1}{16} \cdot 1 + \frac{1}{8} \cdot (-1) + \frac{1}{4} \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot (-1) + 1 \cdot 1 = \frac{11}{16}
\end{aligned}$$

□

Úkol 4. Nalezněte $h[n]$, víte-li, že $s[n] = (7/8)^n$.

Úkol 5. Nalezněte prvních pět členů odezvy $y[n]$ diskrétního LTI systému na vstupní posloupnost $u[n] = \{1, 1, 0, 0, 0, \dots\}_{n=0}^{\infty}$, víte-li, že $h[n] = (7/8)^n$.

Úkol 6. Nalezněte prvních pět členů posloupnosti impulsní odezvy $h[n]$ diskrétního LTI systému, jehož odezva na vstupní posloupnost $u[n] = \{1, -1, 0, 1, 0, \dots\}_{n=0}^{\infty}$ je $y[n] = \{-1/2, 1, 0, -1, 0, \dots\}_{n=0}^{\infty}$.

3 Dopředná $\mathcal{Z}$-transformace

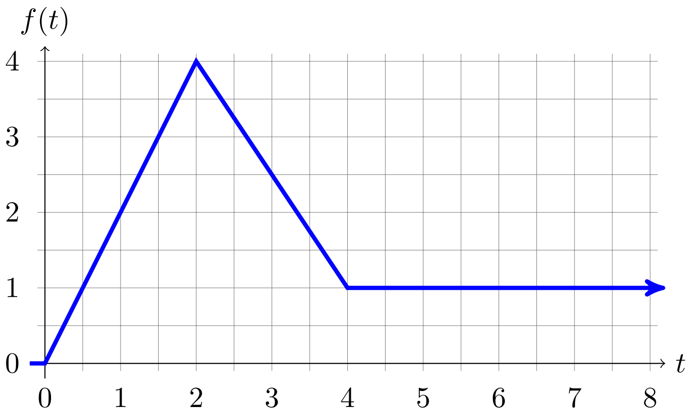
Příklad 4. Určete $F(z)$, pokud $f[n] = na^n$.

Řešení:
Podle přednášek (a s využitím věty o derivaci obrazu a znalosti o derivaci podílu dvou funkcí) je

$$\begin{aligned}\mathcal{Z}\left\{na^n\right\} = \mathcal{Z}\left\{na^n\right\} &= -z\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\frac{1}{1-az^{-1}} \\ &= -z\frac{0\cdot(1-az^{-1})-1\cdot(0+az^{-2})}{(1-az^{-1})^2} = -z\frac{-az^{-2}}{(1-az^{-1})^2} \\ &= \frac{az^{-1}}{(1-az^{-1})^2}.\end{aligned}$$

□

Příklad 5. Nalezněte $F(z)$ pro spojitou funkci na obrázku za předpokladu, že funkce je vzorkována s periodou $T = 1\,\mathrm{s}$.



Řešení:
Prvních jedenáct členů posloupnosti $f[n]$, která vznikne navzorkováním spojitého signálu $f(t)$, zapíšeme pro přehlednost do tabulky:

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
nT	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$f[n] = f(nT)$	0	2	4	2,5	1	1	1	1	1	1	1

Dále postupujeme výpočtem transformace podle definičního vzorce,

$$\begin{aligned}F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f[n]z^{-n} &= 0\cdot z^0 + 2\cdot z^{-1} + 4\cdot z^{-2} + 2{,}5\cdot z^{-3} + 1\cdot z^{-4} + 1\cdot z^{-5}\dots\\ &= 2z^{-1} + 4z^{-2} + 2{,}5z^{-3} + \sum_{m=4}^{\infty} z^{-m}\\ &= 2z^{-1} + 4z^{-2} + 2{,}5z^{-3} + \frac{z^{-4}}{1-z^{-1}}.\end{aligned}$$

□

Úkol 7. Určete $F(z)$, pokud $f[n] = e^{an}$.

Úkol 8. Nalezněte $\mathcal{Z}$-transformaci posloupnosti, jež vznikne vzorkováním spojitého signálu z příkladu 5 s periodou $T = 1/2\,\mathrm{s}$.

Úkol 9. S pomocí definičního vztahu ukažte, že $\mathcal{Z}$-transformace posloupnosti zpožděného jednotkového skoku

$$x_n = \mathbb{1}[n-m] = \begin{cases}1 & \text{pro } n \geq m\\ 0 & \text{pro } n < m\end{cases}$$

je rovna

$$X(p) = \frac{z^{1-m}}{z-1}.$$

Úkol 10. Pomocí Eulerova vzorce odvoďte $\mathcal{Z}\{\cos(an)\}$.

Úkol 11. S pomocí vzorce pro $\mathcal{Z}$-transformaci konvoluce dokažte, že $\mathcal{Z}$-obrazem posloupnosti $w[n] = n+1$ je

$$W(z) = \frac{z^2}{(z-1)^2}.$$

Nápověda: Uvědomte si, jakých hodnot nabývá posloupnost $w[n]$ pro $n = 0, 1, 2, \dots$. Vyjádřete tento součet jako $w[n] = \sum_{m=0}^{n} x[n]y[n-m]$ a nalezněte odpovídající $x[n]$ a $y[n]$ a jim odpovídající $X(z)$ a $Y(z)$.

4 $\mathcal{Z}$-transformace výrazů

Úkol 12. Zapište $\mathcal{Z}$-transformaci soustavy rovnic vnitřního popisu systému

$$\begin{aligned}x_1[n+1] &= x_2[n]\\ x_2[n+1] &= -x_1[n] + x_2[n] - u[n]\\ y[n] &= x_1[n].\end{aligned}$$

Z transformované soustavy vyjádřete $Y(z)$ jako funkci $U(z)$ pro počáteční podmínky $x_1[0] = 1$ a $x_2[0] = -1$.

Příklad 6. Nalezněte $F(z)$ periodické sekvence, pro niž platí $f[n+2] = f[n]$, $f[0] = -5$ a $f[1] = 5$.

Řešení:
Podle věty o posunutí je

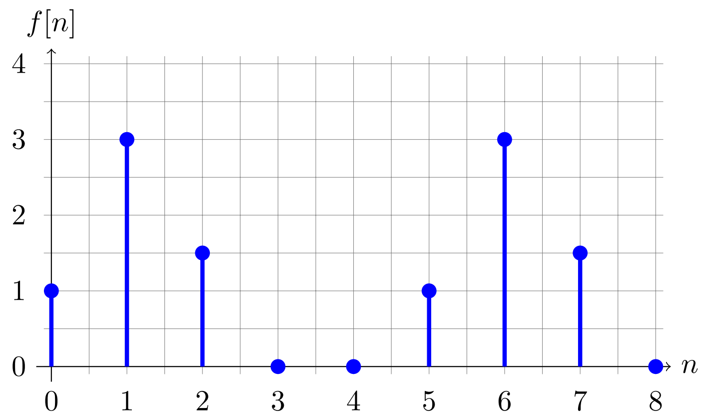
$$
\begin{aligned}
\mathcal{Z}\{f[n+2]\} &= \mathcal{Z}\{f[n]\}, \\
z^2F(z) - z^2f[0] - zf[1] &= F(z) \\
z^2F(z) - F(z) &= -z^2f[0] - zf[1] \\
F(z) &= \frac{-z^2f[0] - zf[1]}{z^2 - 1}
\end{aligned}
$$

a po dosazení počátečních podmínek

$$F(z) = 5\frac{z(z-1)}{(z+1)(z-1)} = 5\frac{z}{z+1}.$$

□

Úkol 13. Určete fundamentální periodu a nalezněte $\mathcal{Z}$-transformaci periodické posloupnosti $f[n]$, naznačené na následujícím obrázku



Úkol 14. Vyjádřete $Y(z)$ jako funkci $U(z)$ pro diskrétní LTI systém popsaný diferenční rovnicí

$$y[n+2] - y[n+1] + y[n] = u[n]$$

s počátečními podmínkami $y[0] = 1$ a $y[1] = -1$.

5 Zpětná $\mathcal{Z}$-transformace

Úkol 15. Najděte

$$y[n] = \mathcal{Z}^{-1}\left\{\frac{bz}{z-1}\frac{1}{1-az^{-1}}\right\}.$$

Řešení: $\left[\dfrac{b(a^{n+1}-1)}{a-1}\right]$

Úkol 16. Najděte

$$y[n] = \mathcal{Z}^{-1}\left\{-\frac{z\,(-2\,z+b+a)}{(-z+a)(-z+b)}\right\}.$$

Řešení: $\left[a^n + b^n\right]$

Úkol 17. Najděte

$$y[n] = \mathcal{Z}^{-1}\left\{\frac{za(b-1)}{(za-b)(za-1)}\right\}.$$

Řešení: $\left[\dfrac{b^n-1}{a^n}\right]$

Úkol 18. Najděte

$$y[n] = \mathcal{Z}^{-1}\left\{\frac{z\,(-za+a^2-z^2+2\,zb-b^2)}{a\,(-z+b)^2\,(-z+a)}\right\}.$$

Řešení: $\left[nb^{n-1} + a^{n-1}\right]$

6 Řešení diferenčních rovnic

Úkol 19. S pomocí $\mathcal{Z}$-transformace vyřešte diferenční rovnici

$$y[n+1] - 3y[n] = 4n.$$

Počáteční podmínka je $y[0] = 0$.

Úkol 20. S pomocí $\mathcal{Z}$-transformace vyřešte soustavu diferenčních rovnic

$$\begin{aligned} x[n+1] &= \frac{\sqrt{2}}{2}x[n] - \frac{\sqrt{2}}{2}y[n] \\ y[n+1] &= \frac{\sqrt{2}}{2}x[n] + \frac{\sqrt{2}}{2}y[n] \end{aligned}$$

s počátečními podmínkami $x[0] = 1$ a $y[0] = 0$.

Příklad 7. Vyřešte homogenní diferenční rovnici

$$y[n+2] - 4y[n+1] + 3y[n] = 0 \tag{2}$$

s počátečními podmínkami $y[0] = y_0 = 1$ a $y[1] = y_1 = 5$.

Řešení:
Po $\mathcal{Z}$-transformaci obdržíme z rovnice (2) algebraickou rovnici ve tvaru

$$z^2Y(z) - z^2y_0 - zy_1 - 4zY(z) + 4zy_0 + 3Y(z) = 0$$

a proto

$$\begin{aligned} z^2Y(z) - 4zY(z) + 3Y(z) &= z^2y_0 + zy_1 - 4zy_0 \\ Y(z)\left[z^2 - 4z + 3\right] &= z^2 + 5z - 4z \\ Y(z) &= \frac{z^2+z}{(z-1)(z-3)}. \end{aligned}$$

Pro rozklad na parciální zlomky musíme vztah upravit (stupeň polynomu v čitateli musí být nižší, než stupeň polynomu ve jmenovateli),

$$\frac{1}{z}Y(z) = \frac{z+1}{(z-1)(z-3)} = -1 \cdot \frac{1}{z-1} + 2 \cdot \frac{1}{z-3}$$

a odtud

$$y[n] = \mathcal{Z}^{-1}\left\{Y(z)\right\} = \mathcal{Z}^{-1}\left\{-\frac{z}{z-1} + 2\frac{z}{z-3}\right\} = -1 + 2\,(3)^n.$$

□

7 Stabilita diskrétních systémů

Úkol 21. Určete, zda je odezva systému, popsaného v příkladu 7, stabilní.

Úkol 22. Vyšetřete stabilitu systému, diskutovaného v úloze 19.

Úkol 23. Určete, jaké hodnoty parametrů a a b zaručí stabilitu systému s impulsní odezvou

$$h[n] = \frac{b^n - 1}{a^n}.$$

8 Spojování systémů

Příklad 8. Diskrétní systém je tvořen dvěma paralelně zapojenými subsystémy, popsanými pomocí dílčích přenosových funkcí

$$H_1(z) = \frac{z}{z-\frac{1}{2}} \quad \text{a} \quad H_2(z) = -\frac{z}{z-\alpha}.$$

Zapište výslednou přenosovou funkci celého systému.

Řešení:
Pro dva systémy zapojené paralelně (tedy „vedle sebe“) platí, že výsledná přenosová funkce systému bude součtem dílčích přenosů. V našem případě tedy

$$H(z) = H_1(z) + H_2(z) = \frac{z}{z-\frac{1}{2}} - \frac{z}{z-\alpha} = \frac{z(z-\alpha) - z(z-\frac{1}{2})}{(z-\frac{1}{2})(z-\alpha)}$$
$$= \frac{z(\frac{1}{2}-\alpha)}{(z-\frac{1}{2})(z-\alpha)}.$$

□

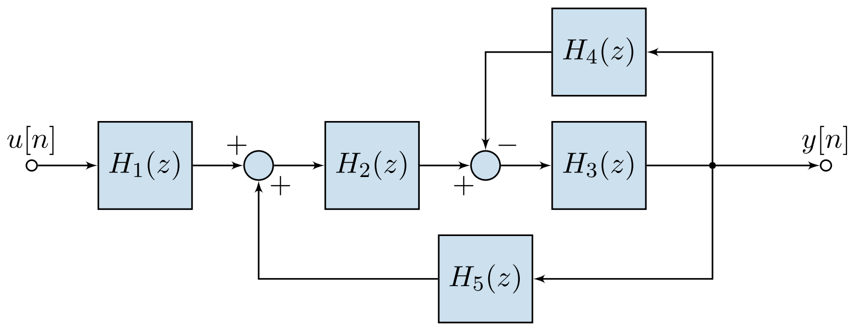
Úkol 24. Zapište přenosovou funkci sériově zapojených subsystémů z příkladu 8.

Úkol 25. Uvažujte nestabilní diskrétní systém s přenosem

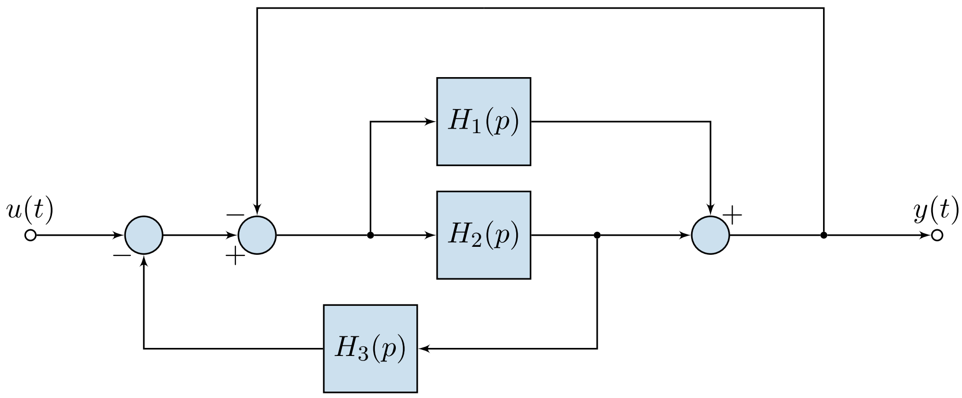
$$H(z) = \frac{z^3 + 2z^2 - 3z + 2}{z^3 + 3z + 3}.$$

Jaké zesílení α musí mít zpětnovazební člen, jímž výše uvedený systém stabilizujeme? *Nápověda:* Přenos zpětnovazebního členu je $H_\alpha(z) = \alpha$.

Úkol 26. Vyjádřete přenos $H(z) = Y(z)/U(z)$ složeného systému na následujícím obrázku:

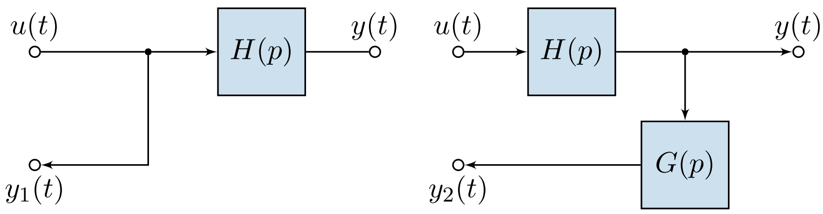


Úkol 27. Vyjádřete přenos $H(p) = Y(p)/U(p)$ systému na následujícím obrázku:



Řešení: $\left[H(p) = \dfrac{H_1(p) + H_2(p)}{1 + H_1(p) + H_2(p) + H_2(p)H_3(p)} \right]$

Úkol 28. V jakém vztahu musí být přenos $G(p)$ ku $H(p)$, aby pro níže uvedené systémy platilo $y_1(t) \equiv y_2(t)$? Zdůvodněte.



Řešení: $\left[G(p) = \dfrac{1}{H(p)} \right]$

9 Diskretizace

Příklad 9. Převeďte autonomní spojitý LTI systém, popsaný homogenní diferenciální rovnicí

$$y''(t) + 4y(t) = 0 \tag{3}$$

s počátečními podmínkami $y(0) = 1$ a $y'(0) = 0$, na systém diskrétní náhradou derivace dopřednou diferencí.

Řešení:

Nahradíme-li derivaci dopřednou diferencí, dostaneme

$$
\begin{aligned}
y'(t) &\approx \frac{y(nT+T)-y(nT)}{T} \\
y''(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}y(t)\right) &\approx \frac{y(nT+2T)-2y(nT+T)+y(nT)}{T^2}
\end{aligned}
$$

a po dosazení do (3)

$$
\begin{aligned}
\frac{y(nT+2T)-2y(nT+T)+y(nT)}{T^2} + 4t(nT) &= 0, \\
y(nT+2T)-2y(nT+T)+y(nT)+4T^2y(nT) &= 0.
\end{aligned}
$$

Pro členy výstupní posloupnosti $y[n]$ *platí* $y[n] \equiv y(nT)$ *a proto*

$$
\begin{aligned}
y[n+2]-2y[n+1]+y[n]+4T^2y[n] &= 0, \\
y[n+2]-2y[n+1]+(4T^2+1)y[n] &= 0.
\end{aligned}
$$

Zbývá určit počáteční podmínky diskrétního systému. Protože je $y(0) = 1$*, je také* $y[0] = 0$*. Počáteční podmínku v* $y[1]$ *musíme ale dopočítat z dopředné diference*

$$
y'(0) \approx \frac{y(T)-y(0)}{T} \equiv \frac{y[1]-y[0]}{T}
$$

odkud dostaneme postupně

$$
\begin{aligned}
y[1]-y[0] &\approx Ty'(0), \\
y[1] &\approx Ty'(0)+y[0].
\end{aligned}
$$

Odtud po dosazení za $y[0] = 0$

$$
y[1] \approx T \cdot 0 + 1 = 1.
$$

$\square$

Úkol 29. Na rovnici z příkladu 9 demonstrujte vliv různé délky vzorkovací periody T na kovergenci řešení diferenční rovnice k řešení původní diferenciální rovnice:

- Nalezněte $y(t)$ jako řešení rovnice (3) ve spojitém čase.
- Nalezněte $y_1[n]$, $y_2[n]$ a $y_3[n]$ jako řešení odpovídající diferenční rovnice se vzrokovací periodou $T_1 = 1\,\mathrm{s}$, $T_2 = 0{,}01\,\mathrm{s}$ a $T_3 = 0{,}0001\,\mathrm{s}$.
- Zakreslete všechny čtyři průběhy do jednoho grafu. Nezapomeňte na správné měřítko na ose t.