Základní signály
Linearita, stacionarita, kauzalita

Modelování systémů a procesů (11MSP)

Bohumil Kovář, Jan Přikryl, Miroslav Vlček

2. přednáška 11MSP

čtvrtek 27. února 2014

verze: 2014-03-05 15:36

Obsah

Tento text je do jisté míry experimentálním pískovištěm na odladění převodu textu prezentace vytvořené v LaTeXové třídě `beamer` do textu vysázeného pomocí `tufte-handout`. Obsah je oproti prezentaci mírně rozšířen o poznámky. Bude se ještě v průběhu semestru měnit, kontrolujte si prosím čas sestavení v záhlaví tohoto souboru.

Úvod do teorie signálů

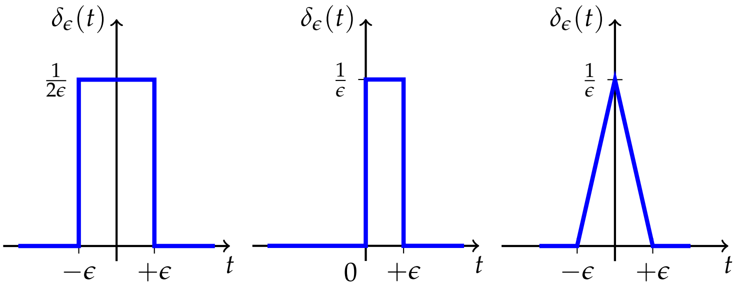
Doporučená literatura pro tuto část je Oppenheim (1997).

Základní spojité signály

doplnit text

Diracův impuls

Tato funkce je definována na časovém intervalu pro všechna t a její nenulovou hodnotu předpokládáme pouze v okolí bodu $t = 0$. Plocha těchto funkcí je rovna 1 pro každé $\varepsilon > 0$.



Obrázek 1: Konečná reprezentace $\delta_\epsilon(t)$ pro $\epsilon > 0$

Funkci $\delta(t)$ definujeme jako $\delta(t) = \lim_{\epsilon \to 0} \delta_\epsilon(t)$.

Funkce $\delta(t)$ se nazývá **Diracův impuls**, Diracova δ-funkce nebo jednotkový impuls. Hodnota $\delta(t)$ pro $t \neq 0$ je $\delta(t) = 0$. Její hodnota v $t = 0$ není definována jako funkce, používá se integrální definice

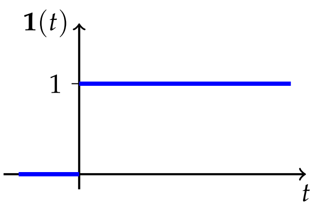
$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-\epsilon}^{\epsilon} \delta(t)\,\mathrm{d}t = \int_{0-}^{0+} \delta(t)\,\mathrm{d}t = 1 \tag{1}$$

pro každé $\epsilon > 0$.

Jednotkový skok

Funkce jednotkového skoku bývá obvykle značena $\mathbf{1}(t)$ a je definována jako

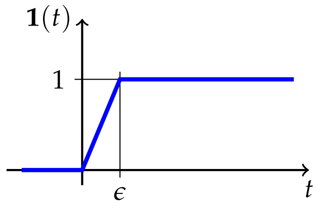
$$\mathbf{1}(t) = \begin{cases} 1 & \text{pro } t \geq 0 \\ 0 & \text{pro } t < 0. \end{cases} \tag{2}$$



Obrázek 2: Jednotkový skok

Platí

$$\delta(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathbf{1}(t).$$



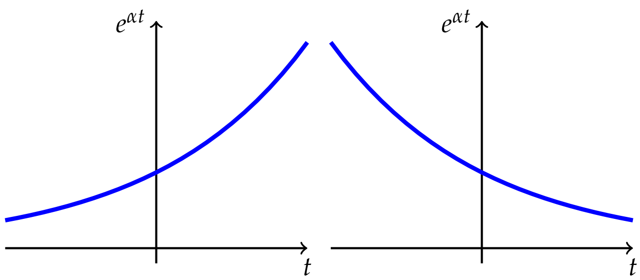
Obrázek 3: Jednotkový skok

Exponenciála

Uvažujme exponenciální funkci

$$f(t) = e^{\alpha t}, \tag{3}$$

kde α je reálná konstanta, podle následujícího obrázku.



Obrázek 4: Reálná exponenciála a) pro $\alpha > 0$, b) pro $\alpha < 0$.

Exponenciální funkce

$$f(t) = A\, e^{\alpha t}, \tag{4}$$

kde $\alpha \in \mathbb{C}$ je zajímavá hlavně v případě, kdy $\alpha = i\omega$,

$$f(t) = A\, e^{i\omega t} = A\,(\cos \omega t + i\, \sin \omega t)\,. \tag{5}$$

Periodické a harmonické funkce

O spojitém signálu $f(t)$ říkáme, že je periodický s periodou T, jestliže

$$\forall t : f(t+T) = f(t) \tag{6}$$

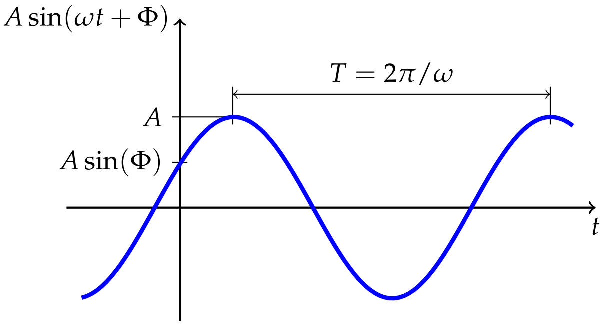
a tedy také pro libovolné $k \in \mathbb{Z}$

$$f(t) = f(t+T) = f(t+2T) = \cdots = f(t+k\cdot T)$$

Nejmenší možné T nazýváme **fundamentální perioda**, značíme T_0.

$$f(t) = A\, \sin(\omega t + \Phi), \tag{7}$$

Konstanty A, ω a Φ se nazývají **amplituda**, **úhlová frekvence** a **fázový posun**. Sinusovka je periodická se základní periodou $T = 2\pi/\omega$.



Obrázek 5: Sinusový signál

Základní diskrétní signály

Jak diskrétní signály vznikají?

- **přirozeně** (průměrné denní teploty, denní kurzy, počty studentů)
- **vzorkováním spojitých signálů** (naměření teploty každou hodinu, měřením průtoku každých 15 minut)

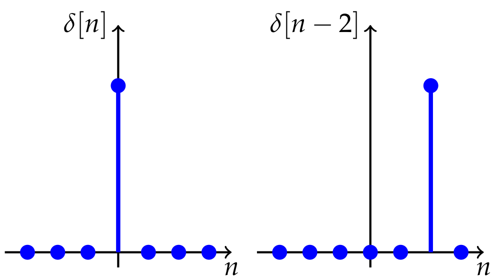
Diskrétní signály, jimiž se budeme v předmětu zabývat, jsou diskrétní v čase, ale *spojité ve funkční hodnotě*.

Digitální signál je totiž často **kvantovaný**, nabývá tedy v každém n pouze diskrétní množiny funkčních hodnot, například $\{0, 1, 2, \ldots, 65535\}$.

Diskrétní jednotkový impuls a skok

Diskrétní jednotkový impuls $\delta[n]$ je definován vztahem

$$\delta[n] = \begin{cases} 1 & \text{pro } n = 0 \\ 0 & \text{pro } n \neq 0\,. \end{cases} \tag{8}$$



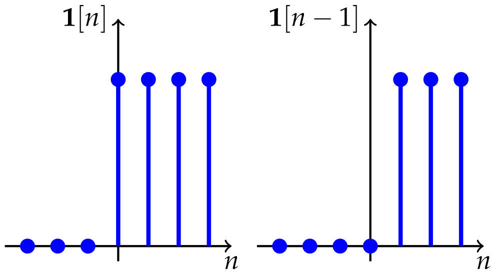
Obrázek 6: Diskrétní jednotkový impuls a posunutý jednotkový impuls.

Diskrétní jednotkový skok $\mathbf{1}[n]$ je definován vztahem

$$\mathbf{1}[n] = \begin{cases} 1 & \text{pro } n \geq 0 \\ 0 & \text{pro } n < 0 \end{cases} \tag{9}$$

Z obrázku 7 snadno nahlédneme, že

$$\mathbf{1}[n] = \sum_{m=0} n\delta[n-m] = \delta[n] + \delta[n-1] + \cdots + \delta[1] + \delta[0].$$



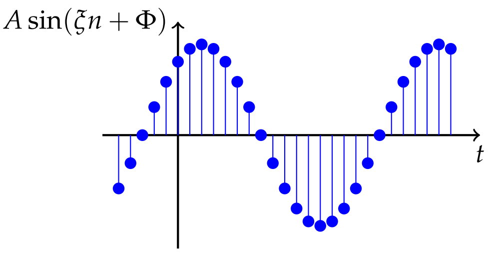
Obrázek 7: Diskrétní jednotkový skok a posunutý jednotkový skok.

Diskrétní sinusová posloupnost

Mějme sinusový signál $f(t) = A\sin(\omega t + \Phi)$ s periodou $T = 2\pi/\omega$. Pokud tento signál vzorkujeme s periodou $T_s > 0$, získáme diskrétní sinusový signál

$$f[n] = f(nT) = A\sin(\omega n T_s + \Phi) = A\sin(\xi n + \Phi), \qquad (10)$$

kde $n = 0,\ \pm 1,\ \pm 2, \ldots$ a $\xi = \omega T_s$.



Obrázek 8: Diskrétní sinusová posloupnost

Diskrétní signál $f[n]$ je periodický, jestliže existuje kladné celé číslo N takové, že platí

$$f[n] = f[n+N] = f[n+2N] = \cdots = f[n+k \cdot N] \qquad (11)$$

pro všechna $n \in \mathbb{Z}$ (z intervalu $(-\infty,\ \infty)$) a pro libovolné $k \in \mathbb{Z}$. N se nazývá **perioda diskrétního signálu**.

Nejmenší možné N nazýváme **fundamentální perioda** a značíme N_0.

Diskrétní sinusový signál *nemusí být nutně periodický*, záleží na volbě vzorkovací periody T_s. Pro periodický diskrétní sinusový signál s periodou N musí platit

$$N = m \cdot \frac{2\pi}{T_s},$$

kde $m \in \mathbb{N}$. Máme i $N \in \mathbb{N}$, proto $2\pi/T_s$ musí být racionální číslo.

Example 1 (Neperiodický sinusový signál). Signál

$$y[n] = \sin n$$

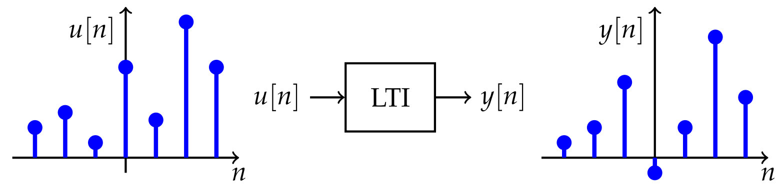
není pro $T_s = 0.1\,\mathrm{s}$ periodický, protože $2\pi/T_s$ není racionální číslo.

Odezva systému

xxxxxx

Diskrétní systém

xxxxxx



Obrázek 9: Diskrétní LTI systém, jeho vstupní a výstupní posloupnost

Definition 2 (Impulsní odezva)**.** Odezvu systému na jednotkový impuls $\delta[n]$ budeme nazývat **impulsní odezva** a značit $h[n]$,

$$\begin{aligned} h[n] &= \mathcal{S}\{\delta[n]\} \\ h[n,m] &= \mathcal{S}\{\delta[n-m]\}\,. \end{aligned}$$

Definition 3 (Přechodová odezva)**.** Odezvu systému na jednotkový skok $\mathbf{1}[n]$ budeme nazývat **přechodová odezva** a značit $s[n]$,

$$s[n] = \mathcal{S}\{\mathbf{1}[n]\} = \mathcal{S}\left\{\sum_{m=0}^{n} \delta[n-m]\right\}.$$

Lineární a nelineární

Řekli jsme si, že systém není nic jiného, než černá skříňka, *black box*, kterou se pokoušíme nejprve identifikovat a poté reprodukovat. Při identifikaci se nejprve ptáme, zda se jedná o lineární systém.
tohle taky nedává moc smysl

Definition 4 (Linearita)**.** V matematice označujeme funkci $f(x)$ jako lineární v případě, že je

1. aditivní $f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2)$ a
2. homogenní, $f(\alpha x) = \alpha f(x)$.

Obdobně to platí i pro lineární systémy.

Definition 5 (Lineární systém)**.** Systém je lineární, pokud pro dva různé vstupní signály $u_1[n]$ a $u_2[n]$ platí

$$\begin{aligned} \mathcal{S}\{u_1[n] + u_2[n]\} &= \mathcal{S}\{u_1[n]\} + \mathcal{S}\{u_2[n]\}\,, \\ \mathcal{S}\{\alpha u[n]\} &= \alpha \mathcal{S}\{u[n]\}\,. \end{aligned}$$

Definice 5 nám trošku zakukleně popisuje jednu základní vlastnost všech lineárních systémů, ať už popisují svět v diskrétním či spojitém čase: Je-li vstupem systému vážený součet několika signálů, výstupem systému je opět stejně vážený součet neboli *superpozice* dílčích odezev na tyto vstupy.

Definition 6 (Princip superpozice)**.** Pro dva různé vstupní signály $u_1[n]$ a $u_2[n]$ platí

$$
\begin{aligned}
y_1[n] &= \mathcal{S}\{u_1[n]\} \\
y_2[n] &= \mathcal{S}\{u_2[n]\}
\end{aligned}
$$

a pro $u[n] = \alpha u_1[n] + \beta u_2[n]$ také

$$\alpha y_1[n] + \beta y_2[n] = y[n] = \mathcal{S}\{u[n]\} = \mathcal{S}\{\alpha u_1[n] + \beta u_2[n]\}$$

Obecně platí

$$u[n] = \sum_i a_i u_i[n] \quad \rightarrow \quad y[n] = \sum_i a_i y_i[n] = \sum_i a_i \mathcal{S}\{u_i[n]\}$$

Example 7 (Lineární systém). Uvažujme systém

$$y[n] + a\, y[n-1] = u[n].$$

Je-li na vstupu lineární kombinace dvou různých signálů

$$u[n] = b_1 u_1[n] + b_2 u_2[n]$$

je na výstupu

$$y[n] = b_1 \left(y_1[n] + a\, y_1[n-1]\right) + b_2 \left(y_2[n] + a\, y_2[n-1]\right)$$

kde

$$
\begin{aligned}
y_1[n] + a\, y_1[n-1] &= u_1[n] \\
y_2[n] + a\, y_2[n-1] &= u_2[n]
\end{aligned}
$$

Example 8 (Nelineární systém). Numerický výpočet druhé odmocniny lze zapsat rekurentním vztahem

$$y[n+1] = \frac{1}{2}\left(y[n] + \frac{u[n]}{y[n]}\right). \tag{12}$$

Odmocnina z čísla 10 je s přesností na 10 desetinných míst rovna $\sqrt{10} = 3{,}16227766017$. Pro $u[n] = u[0] = 10$ dostáváme postupně

n	$y[n]$	$y^2[n]$
1	3	9
2	3,165	10,017225
3	3,162278	10,00000214928
4	3,162277660	9,999999999568
⋮	⋮	⋮

Pro obecný vstupní signál $u[n]$ je pak odezva lineárního systému

$$
\begin{aligned}
y[n] = \mathcal{S}\{u[n]\} &= \mathcal{S}\left\{\sum_{m=-\infty}^{\infty} u[m]\,\delta[n-m]\right\} \\
&= \sum_{m=-\infty}^{\infty} u[m]\,\mathcal{S}\{\delta[n-m]\} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} u[m]\,h[n,m]
\end{aligned}
$$

Vidíme, že chování systému je zcela určeno jeho odezvami na různě posunuté jednotkové pulsy $h[n,m]$.

Přechodová odezva diskrétního lineárního systému $s[n]$ je dána prostým součtem impulsních odezev pro $0 \leq m \leq n$

$$\begin{aligned} s[n] = \mathcal{S}\{\mathbf{1}[n]\} &= \mathcal{S}\left\{\sum_{m=0}^{n} \delta[n-m]\right\} \\ &= \sum_{m=0}^{n} \mathcal{S}\{\delta[n-m]\} = \sum_{m=0}^{n} h[n,m]. \end{aligned}$$

Lze za nějakých podmínek zjednodušit $h[n,m]$?

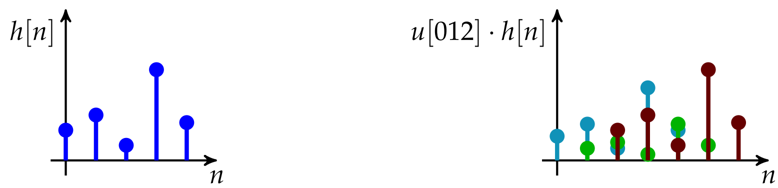
Časově invariantní, resp. stacionární systém

Systém se nazývá **časově invariantní**, jestliže jsou všechny události závislé pouze na časovém intervalu (rozdílu časových událostí) $n-m$ a nikoliv na každém časovém okamžiku n a m samostatně.

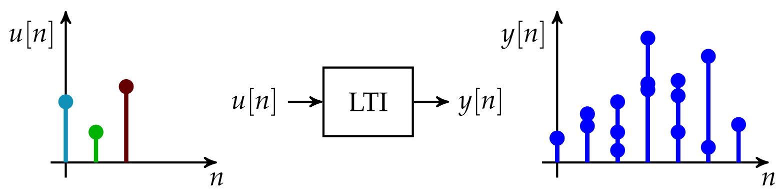
$$\begin{array}{rll} \text{dnes} & \ldots & y[n] = \mathcal{S}\,[u[n]] \\ \text{včera} & \ldots & y[n-1] = \mathcal{S}\,[u[n-1]] \\ & & \vdots \end{array}$$

Potom také rovnice (**??**) pro impulsní odezvu přejde z maticového tvaru na prostý vektorový zápis

$$h[n,m] \to h[n-m] = \mathcal{S}\{\delta[n-m]\}\,.$$



$$y[n] = u[0] \cdot h[n] + u[1] \cdot h[n-1] + u[2] \cdot h[n-2]$$



Obrázek 10: Superpozice odezvy $y[n]$ jako $\sum_{k=0} nu[k]h[n-k]$

V důsledku časové invariance dostáváme z rovnice (**??**) **konvoluční sumu**

$$y[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} h[n-m] \cdot u[m] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k] \cdot u[n-k], \qquad (13)$$

kterou pro úsporu místa značíme

$$y[n] = h[n] * u[n].$$

Pozor: nejde o násobení!

$$h[n] \neq \frac{y[n]}{u[n]}$$

Example 9 (Časově invariantní systém). Uvažujme mikroekonomický systém variace ceny popsaný diferenční rovnici

$$y[n] + a\, y[n-1] = u[n].$$

Protože její koeficienty nezávisí na čase, tj. a je konstantní a není funkcí n, zachovává tato rovnice tvar při záměně $n \rightarrow n - m$. Impulsní odezva je potom

$$h[n] = (-a)^n \mathbf{1}[n].$$

Example 10 (Časově proměnný systém). Uvažujme nyní obměněnou diferenční rovnici

$$y[n] + n \cdot y[n-1] = u[n].$$

Koeficient u $y[n-1]$ závisí na čase a tato rovnice nezachovává tvar při záměně $n \rightarrow n - m$. Impulsní odezvu lze psát ve tvaru

$$h[n] = (-1)^n\, n!\, \mathbf{1}[n].$$

Kauzální, příčinný systém

Systém je **kauzální**, pokud jeho výstup závisí pouze na současných a minulých hodnotách vstupů.

Výstupní signál $y[n]$ kauzálního systému tedy závisí pouze na $\{u[n], u[n-1], u[n-2], \dots\}$. V konvoluční sumě (13) proto

$$\begin{aligned} y[n] &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]\, u[n-k] \\ &= \underbrace{\sum_{k=-\infty}^{-1} h[k]\, u[n-k]}_{0} + \sum_{k=0}^{\infty} h[k]\, u[n-k] \end{aligned}$$

musíme položit všechny členy impulsní odezvy $h[n] = 0$ pro $n < 0$.

Pro kauzální systémy tedy platí, že jejich impulsní odezva musí být nulová před okamžikem vstupního impulsu, což odpovídá našemu intuitivnímu vnímání kauzality: napřed musí existovat příčina, až po ní můžeme pozorovat důsledky.

Pro lineární kauzální systémy přitom také platí, že pokud je jejich vstup až do nějakého okamžiku roven 0, i výstup bude až do toho okamžiku nulový.

Konvoluční suma pro lineární, časově invariantní a kauzální systém má tvar

$$y[n] = \sum_{k=0}^{\infty} h[k] \cdot u[n-k] = \sum_{k=-\infty}^{0} u[k] \cdot h[n-k].$$

Jestliže navíc budeme požadovat, aby vstupní a výstupní signály měly dobře definovaný počátek, tj. aby $\forall n < 0 : u[n] = 0, y[n] = 0$ (oba signály mohou mít nenulové členy pouze pro $n \geq 0$), potom platí

$$y[n] = \sum_{k=0}^{n} h[k] \cdot u[n-k] = \sum_{k=0}^{n} h[n-k] \cdot u[k].$$

Spojitý systém

Definition 11 (Impulsní odezva)**.** Odezvu systému na Diracův impuls $\delta(t)$ budeme nazývat **impulsní odezva** a značit $h(t)$,

$$\begin{aligned} h(t) &= \mathcal{S}\{\delta(t)\} \\ h(t,\tau) &= \mathcal{S}\{\delta(t-\tau)\}\,. \end{aligned}$$

Definition 12 (Přechodová odezva)**.** Odezvu systému na jednotkový skok $\mathbf{1}(t)$ budeme nazývat **přechodová odezva** a značit $s(t)$,

$$s(t) = \mathcal{S}\{\mathbf{1}(t)\} = \mathcal{S}\left\{\int_0^t \delta(t-\tau)\,\mathrm{d}t\right\}.$$

V případě spojitého casu postupujeme podobně a odvodíme pro lineární časově invariantní systém konvoluční integrál

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)u(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau = \int_{-\infty}^{\infty} h(t-\tau) \cdot u(\tau)\,\mathrm{d}\tau.$$

Operaci často zapisujeme ve zjednodušené formě jako

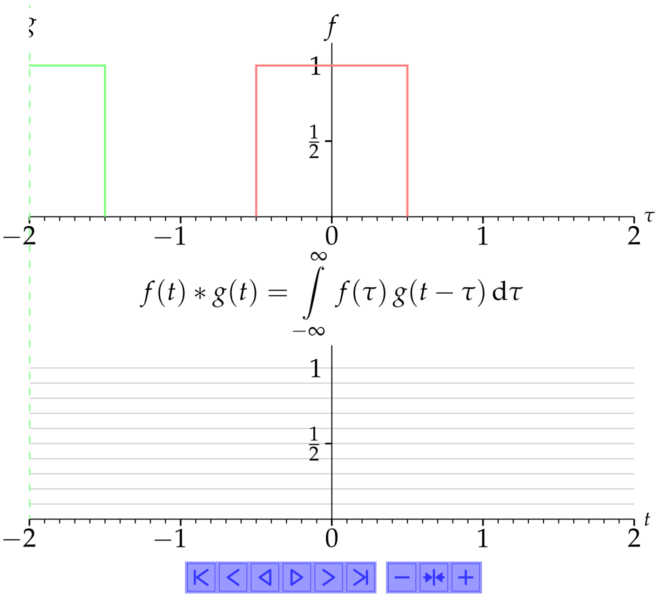
$$y(t) = h(t) * u(t).$$

Opět připomínáme, že se v tomto zápisu nejedná o násobení!

Pro $u(t) = \delta(t)$ platí pro lineární a časové invariantní systém samozřejmě

$$y(t) = \mathcal{S}\{u(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) \cdot \delta(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau = h(t). \tag{14}$$

Výstupní signál $y(t)$ spojitého kauzálního systému závisí pouze na hodnotách vstupů pro předešlé časové okamžiky. Z důvodu,



Obrázek 11: Animovaný obrázek výpočtu konvoluce dvou signálů. Funguje pouze v prostředí Adobe Reader, jinde uvidíte prázdno

které klademe na kauzální chování systému, přejde konvoluční integrál (14) na tvar

$$\begin{aligned} y(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)\, u(t-\tau)\, \mathrm{d}\tau \\ &= \underbrace{\int_{-\infty}^{0} h(\tau)\, u(t-\tau)\, \mathrm{d}\tau}_{0} + \int_{0}^{\infty} h(\tau)\, u(t-\tau)\, \mathrm{d}\tau \end{aligned}$$

a hodnoty impulsní odezvy pro $t < 0$ uvažujeme opět $h(t) = 0$.

Konvoluční integrál pro lineární, časově invariantní a kauzální systém má tvar

$$y(t) = \int_{0}^{\infty} h(\tau) \cdot u(t-\tau)\, \mathrm{d}\tau = \int_{-\infty}^{0} u(\tau) \cdot h(t-\tau)\, \mathrm{d}\tau.$$

Jestliže navíc budeme požadovat, aby vstupní a výstupní signály měly dobře definovaný počátek, tj. aby $\forall t < 0 : u(t) = 0, y(t) = 0$ (oba signály mohou být nenulové členy pouze pro $t \geq 0$), potom platí

$$y(t) = \int_{0}^{t} h(\tau) \cdot u(t-\tau)\, \mathrm{d}\tau = \int_{0}^{t} u(\tau) \cdot h(t-\tau)\, \mathrm{d}\tau.$$

Reference

OPPENHEIM, Alan V., Alan S. WILLSKY a Syed Hamid NAWAB. *Signals and Systems*. 2. vyd. Upper Saddle River: Prentice Hall, 1997, 957 s. ISBN 01-381-4757-4.