Linearita, stacionarita, kauzalita
Vnější a vnitřní popis systémů

Modelování systémů a procesů (11MSP)

Bohumil Kovář, Jan Přikryl, Miroslav Vlček

3. přednáška 11MSP
čtvrtek 6. března 2014

verze: 2014-03-21 17:45

Obsah

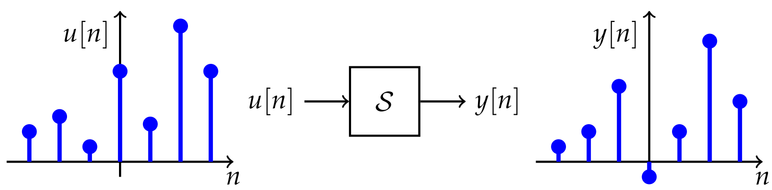
Tento text je do jisté míry experimentálním pískovištěm na odladění převodu textu prezentace vytvořené v LaTeXové třídě `beamer` do textu vysázeného pomocí `tufte-handout`. Obsah je oproti prezentaci mírně rozšířen o poznámky. Bude se ještě v průběhu semestru měnit, kontrolujte si prosím čas sestavení v záhlaví tohoto souboru.

Změny:

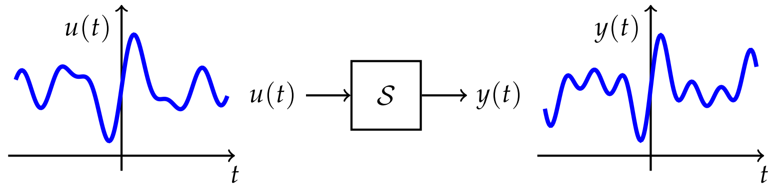
21.3.2014 jp Opraveny koeficienty a a c u modelu ovce-vlci.

Vnější popis systému

Opakování



Obrázek 1: Vnější popis diskrétního obecného systému



Obrázek 2: Vnější popis spojitého obecného systému

Vnitřní popis systému

Vnitřní popis dynamického systému je vztah mezi všemi veličinami systému, je to tedy relace mezi vstupními, stavovými a výstupními veličinami. Vnitřní popis je nejčastěji vyjádřen stavovými rovnicemi. Vnější popis, o němž jsme se bavili do této chvíle, je relace pouze mezi vstupními a výstupními veličinami, vyloučili jsme z něj veličiny stavové a systém popsaný vnějším popisem považujeme za černou skříňku (angl. *black box*).

Problémem souvislosti vnitřního a vnějšího popisu jsme se dosud nezabývali. Známe-li vnitřní popis –– stavové rovnice, snadno z něho jednodušší vnější popis odvodíme tak, že vyloučíme stavové proměnné. Obrácený postup, tedy určení vnitřního popisu z popisu vnějšího, již není tak jednoduchý. Vnitřní popis systému je bohatší a získáme jej z jednoduššího vnějšího popisu pouze za určitých předpokladů o struktuře systému. Z vnějšího popisu není totiž zřejmé, kolik má systém stavů, neboli jaká je dimenze stavového prostoru, ani jak zvolit jeho bázi. Určení vnitřního popisu z popisu vnějšího se nazývá problém realizace systému Štecha (2005).

Vnitřní popis nelineárního systému

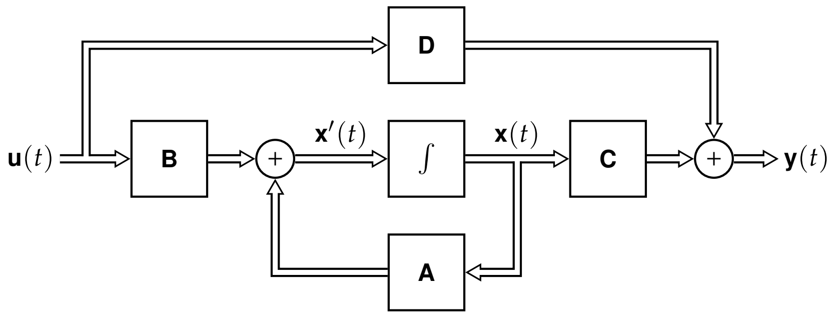
Spojitý systém	**Diskrétní systém**
vektor vstupních (řídicích) proměnných $\mathbf{u}(t)$	$\mathbf{u}[n]$
stavový vektor $\mathbf{x}(t)$	$\mathbf{x}[n]$
vektor výstupních proměnných $\mathbf{y}(t)$	$\mathbf{y}[n]$
$\mathbf{x}'(t) = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t))$	$\mathbf{x}[n+1] = \mathbf{f}(n, \mathbf{x}[n], \mathbf{u}[n])$
$\mathbf{y}(t) = \mathbf{g}(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t))$	$\mathbf{y}[n] = \mathbf{g}(n, \mathbf{x}[n], \mathbf{u}[n])$

Vnitřní popis lineárního systému

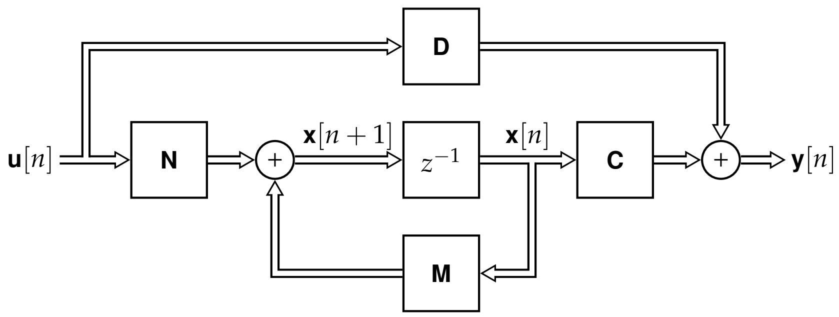
Nejprve obecnější nestacionární systém.

Spojitý systém	**Diskrétní systém**
$\mathbf{u}(t)$ … vektor vstupních (řídicích) proměnných	$\mathbf{u}[n]$
stavový vektor $\mathbf{x}(t)$	$\mathbf{x}[n]$
vektor výstupních proměnných $\mathbf{y}(t)$	$\mathbf{y}[n]$
$\mathbf{x}'(t) = \mathbf{A}(t)\,\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}(t)\,\mathbf{u}(t)$	$\mathbf{x}[n+1] = \mathbf{M}(n)\,\mathbf{x}[n] + \mathbf{N}(n)\,\mathbf{u}[n]$
$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}(t)\,\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}(t)\,\mathbf{u}(t)$	$\mathbf{y}[n] = \mathbf{C}[n]\,\mathbf{x}[n] + \mathbf{D}[n]\,\mathbf{u}[n]$

Spojitý systém	**Diskrétní systém**
$\mathbf{u}(t)$ … vstupní (řídicí) vektor	$\mathbf{u}[n]$ … vstupní (řídicí) vektor
$\mathbf{x}(t)$ … stavový vektor	$\mathbf{x}[n]$ … stavový vektor
$\mathbf{y}(t)$ … výstupní vektor	$\mathbf{y}[n]$ … výstupní vektor
$\mathbf{x}'(t) = \mathbf{A}\,\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\,\mathbf{u}(t)$	$\mathbf{x}[n+1] = \mathbf{M}\,\mathbf{x}[n] + \mathbf{N}\,\mathbf{u}[n]$
$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\,\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\,\mathbf{u}(t)$	$\mathbf{y}[n] = \mathbf{C}\,\mathbf{x}[n] + \mathbf{D}\,\mathbf{u}[n]$
$\mathbf{A}$ je matice systému $(n \times n)$	$\mathbf{M}$ je matice systému $(n \times n)$
$\mathbf{B}$ je matice vstupů (řízení) $(n \times r)$	$\mathbf{N}$ je matice vstupů (řízení) $(n \times r)$
$\mathbf{C}$ je výstupní matice $(m \times n)$	$\mathbf{C}$ je výstupní matice $(m \times n)$
$\mathbf{D}$ je výstupní matice $(m \times r)$	$\mathbf{D}$ je výstupní matice $(m \times r)$



Obrázek 3: Blokové schéma spojitého LTI systému



Obrázek 4: Blokové schéma diskrétního LTI systému

Příklady na stavový popis dynamických systémů

Cykloida

Pohyb po **cykloidě** je popsán parametrickou soustavou rovnic

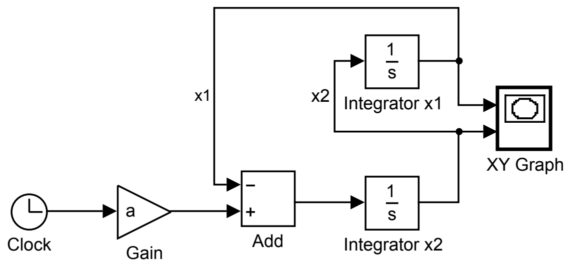
$$x = x_1(t) = a\,t - d \sin t,$$
$$y = x_2(t) = a - d \cos t,$$

která je pro počáteční podmínky

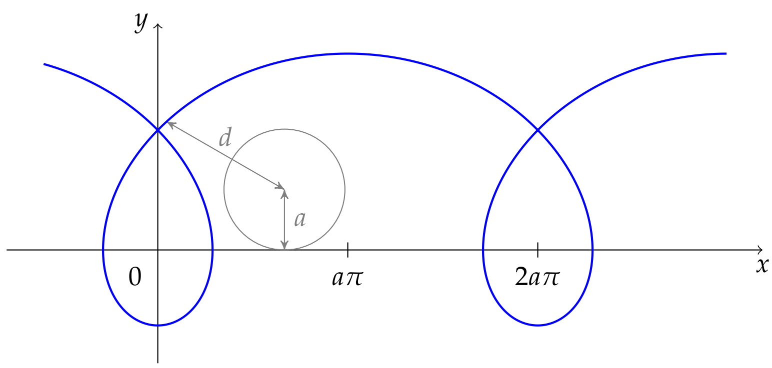
$$x_1(0) = 0 \quad \text{a} \quad x_2(0) = a - d$$

dána řešením stavové rovnice

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ a \end{bmatrix} t.$$



Obrázek 5: Model cykloidy v Simulinku



Obrázek 6: Cykloida vznikne odvalováním bodu ve vzdálenosti d od středu kružnice s poloměrem a

Modely typu predátor-kořist

Nelineární stavový model **vlci a ovečky**, který je znám v literatuře jako *Lotka-Volterra predator-prey model*, se týká populace ovcí popsané stavovou proměnnou $x_1(t)$ a populace vlků popsané stavovou proměnnou $x_2(t)$.

Dynamický model je dán nelineární soustavou stavových rovnic

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x_1(t) = a\,x_1(t) - b\,x_1(t)x_2(t),$$
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x_2(t) = -c\,x_2(t) + d\,x_1(t)x_2(t).$$

Uvedený model můžeme snadno interpretovat. Žijí-li ovce a vlci odděleně, pro ovce platí rovnice

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x_1(t) = a\,x_1(t),$$

jejímž řešením je exponenciální růst populace ovcí nade všechny meze (neuvažujeme omezení zdrojů potravy, nemoci a tak dále)

$$x_1(t) = x_1(0)\,e^{at},$$

zatímco bez potravy je přírůstek populace vlků záporný

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x_2(t) = -c\,x_2(t)$$

a vlci hynou,

$$x_2(t) = x_2(0)\,e^{-ct}.$$

Počet sežraných ovcí a nasycených vlků je úměrný počtu jejich setkání – ten je dán součinem

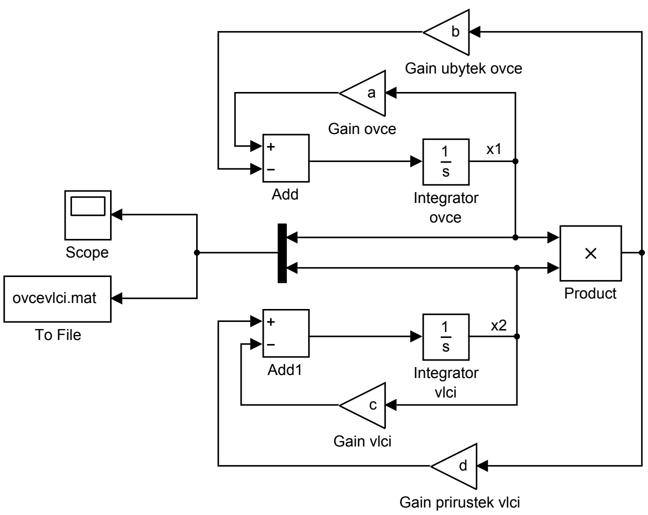
$$x_1(t)x_2(t)$$

a počet ovcí klesá úměrně s

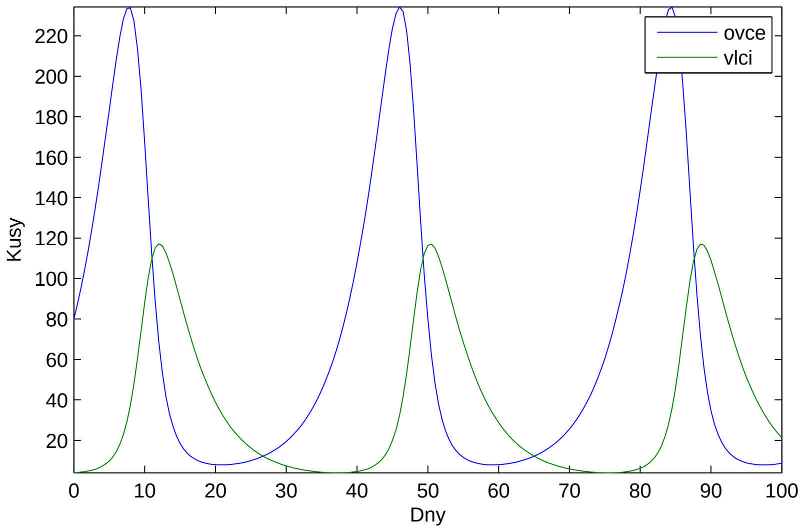
$$-b\,x_1(t)x_2(t)$$

zatímco se vlci mají dobře a jejich počet stoupá úměrně s

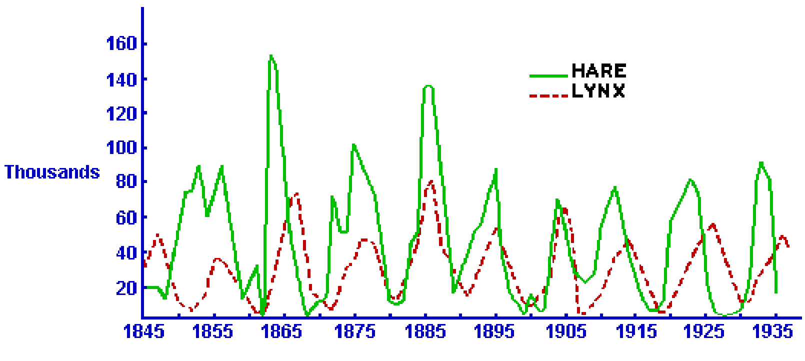
$$d\,x_1(t)x_2(t).$$



Obrázek 7: Model typu predator-prey (ovce-vlci) implementovaný v Simulinku



Obrázek 8: Vývoj populací vlků a oveček s parametry $x_1(0) = 80$, $x_2(0) = 4$, $a = 0{,}2$, $b = 0{,}006$, $c = 0{,}2$, $d = 0{,}003$



Obrázek 9: Vývoj populací rysů a sněžných zajíců v Kanadě

Reference

ŠTECHA, Jan a Vladimír HAVLENA. *Teorie dynamických systémů*. Skriptum ČVUT FEL. Praha : Ediční středisko ČVUT, 2005, 254 s.