Vnější a vnitřní popis systémů

Modelování systémů a procesů (11MSP)

Bohumil Kovář, Jan Přikryl, Miroslav Vlček

4. přednáška 11MSP

čtvrtek 13. března 2014

verze: 2014-03-18 17:16

Obsah

Tento text je do jisté míry experimentálním pískovištěm na odladění převodu textu prezentace vytvořené v LaTeXové třídě `beamer` do textu vysázeného pomocí `tufte-handout`. Obsah je oproti prezentaci mírně rozšířen o poznámky. Bude se ještě v průběhu semestru měnit, kontrolujte si prosím čas sestavení v záhlaví tohoto souboru.

Vnější a vnitřní popis systému

Systém druhého řádu

Diferenciální rovnice druhého řádu s počátečními podmínkami ve tvaru

$$y''(t) + a_1\,y'(t) + a_0\,y(t) = u(t) \tag{1}$$

$$y(0) = c_1 \quad \text{a} \quad y'(0) = c_2, \tag{2}$$

udává vztah vstupu $u(t)$ a výstupu $y(t)$ spojitého lineárního stacionárního systému.

Tento vnější popis převedeme na stavový popis volbou stavového vektoru

$$x_1(t) = y(t),$$
$$x_2(t) = y'(t).$$

Dosadíme za $y'(t) = x_2(t)$ a $y''(t) = x_2'(t)$ do původní diferenciální rovnice a obdržíme

$$x_2'(t) + a_1\, x_2(t) + a_0\, x_1(t) = u(t).$$

Současně platí

$$x_1'(t) = y'(t) = x_2(t).$$

Dostáváme tak

$$\begin{bmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

respektive

$$\begin{bmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \end{bmatrix} = \mathbf{A} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \mathbf{B} u(t)$$

kde

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Rovnici pro výstup vyjádříme z definice stavových veličin

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + 0\, u(t).$$

Matice $\mathbf{D}$ je nulová a jedná se o tak zvaný **ryzí systém**. Pro výstupní matici dostáváme

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Je vhodné podotknout, že počáteční podmínky se transformují do stavového popisu jako

$$y(0) = x_1(0) = c_1 \quad \text{a} \quad y'(0) = x_2(0) = c_2.$$

Obecný systém n-tého řádu

Předpokládejme opět, že systém je popsán diferenciální rovnicí

$$y^{(n)}(t) + a_{n-1} y^{(n-1)}(t) + \cdots + a_1 y^{(1)}(t) + a_0 y(t) = u(t) \qquad (3)$$

Ukážeme nyní, jak se koeficienty diferenciální rovnice objeví ve stavových maticích. Postup je zobecněním předcházejícího příkladu.

Stavové veličiny volíme jako derivace hledaného řešení $y(t)$ takto

$$\begin{aligned} x_1(t) &= y(t), \\ x_2(t) &= y'(t), \\ x_3(t) &= y''(t), \\ x_4(t) &= y^{(3)}(t), \\ &\vdots \\ x_n(t) &= y^{(n-1)}(t), \end{aligned}$$

Ze soustavy a diferenciální rovnice plyne postupně

$$
\begin{aligned}
x_1'(t) &= x_2(t),\\
x_2'(t) &= x_3(t),\\
&\vdots\\
x_{n-1}'(t) &= x_n(t),\\
x_n'(t) &= u(t) - a_0 x_1(t) - a_1 x_2(t) - \ldots - a_{n-1} x_n(t).
\end{aligned}
$$

$$
\begin{bmatrix} x_1'(t)\\ x_2'(t)\\ x_3'(t)\\ \vdots\\ x_n'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0\\ & & \vdots & & & \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & -a_3 & \ldots & -a_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t)\\ x_2(t)\\ x_3(t)\\ \vdots\\ x_n(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0\\ 0\\ 0\\ \vdots\\ 1 \end{bmatrix} u(t)
$$

V souladu s obecným značením pro stavový popis LTI systémů označíme

$$
\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \ldots & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & \ldots & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & \ldots & 0\\ & & \vdots & & & \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & -a_3 & \ldots & -a_{n-1} \end{bmatrix}
$$

a

$$
\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0\\ 0\\ 0\\ \vdots\\ 1 \end{bmatrix}.
$$

Dále platí

$$
y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t)\\ x_2(t)\\ x_3(t)\\ \vdots\\ x_n(t) \end{bmatrix},
$$

takže

$$
\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{bmatrix}
$$

a

$$
\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}.
$$

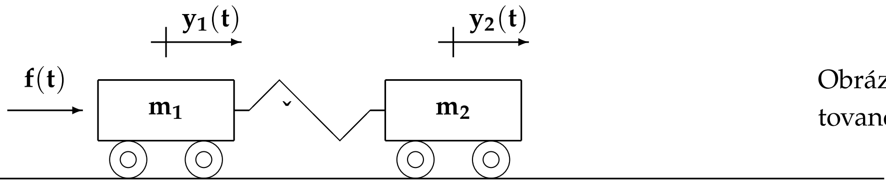
Počáteční podmínky mají tvar

$$\begin{aligned} y(0) &= x_1(0) = & c_1, \\ y'(0) &= x_2(0) = & c_2, \\ y''(0) &= x_3(0) = & c_3, \\ & \vdots & \\ y^{(n-1)}(0) &= x_n(0) = & c_n. \end{aligned}$$

Příklad

Soustava dvou vozíků

Example 1 (Soustava dvou vozíků). Dva vozíky s hmotností m_1 a m_2 zobrazené na obrázku 1 jsou spojeny pružinou, která má koeficient pružnosti κ.



Obrázek 1: Dva vozíky diskutované v příkladu 1

Podle obrázku působí na první vozík hnací síla $f(t)$.

Polohy vozíků jsou $y_1(t)$ a $y_2(t)$, takže při zanedbání tření mají pohybové rovnice tvar

$$\begin{aligned} m_1\, y_1''(t) &= f(t) + \kappa\,(y_2(t) - y_1(t)) \\ m_2\, y_2''(t) &= -\kappa\,(y_2(t) - y_1(t)) \end{aligned}$$

Máme sestavit stavové rovnice pro systém dvou vozíků.

Položíme

$$\begin{aligned} x_1(t) &= y_1(t), \qquad & x_2(t) &= y_2(t), \\ x_3(t) &= y_1'(t), \qquad & x_4(t) &= y_2'(t) \end{aligned}$$

a dostáváme soustavu rovnic

$$\begin{aligned} x_1'(t) &\equiv y_1'(t) = x_3(t), \\ x_2'(t) &\equiv y_2'(t) = x_4(t), \\ x_3'(t) &\equiv y_1''(t) = \frac{\kappa}{m_1}\,(x_2(t) - x_1(t)) + \frac{1}{m_1}\, f(t), \\ x_4'(t) &\equiv y_2''(t) = -\frac{\kappa}{m_2}\,(x_2(t) - x_1(t)). \end{aligned}$$

kterou již snadno převedeme na stavový popis

$$\begin{bmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \\ x_3'(t) \\ x_4'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{\kappa}{m_1} & \frac{\kappa}{m_1} & 0 & 0 \\ \frac{\kappa}{m_2} & -\frac{\kappa}{m_2} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{m_1} \\ 0 \end{bmatrix} f(t)$$

a

$$y = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \end{bmatrix}.$$

Máme matice stavového popisu ve tvaru

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{\kappa}{m_1} & \frac{\kappa}{m_1} & 0 & 0 \\ \frac{\kappa}{m_2} & -\frac{\kappa}{m_2} & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{m_1} \\ 0 \end{bmatrix}$$

a

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Diskrétní systémy

Systém druhého řádu

Diferenční rovnice druhého řádu s počátečními podmínkami ve tvaru

$$y[n+2] + \alpha_1\, y[n+1] + \alpha_0\, y[n] = u[n] \tag{4}$$
$$y(0) = \gamma_1 \quad \text{a} \quad y(1) = \gamma_2, \tag{5}$$

udává vztah vstupu $u[n]$ a výstupu $y[n]$ diskrétního LTI systému

Tento vnější popis převedeme na stavový popis volbou stavového vektoru

$$\begin{aligned} x_1[n] &= y[n]\,, \\ x_2[n] &= y[n+1]\,. \end{aligned}$$

Dosadíme za $y[n+1] = x_2[n]$ a $y(n+2) = x_2[n+1]$ do původní diferenční rovnice a je

$$x_2[n+1] = -\alpha_1\, x_2[n] - \alpha_0\, x_1[n] + u[n]\,. \tag{6}$$

Současně platí

$$x_1[n+1] = y[n+1] = x_2[n]\,. \tag{7}$$

Dostáváme tak

$$\begin{bmatrix} x_1[n+1]) \\ x_2[n+1] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\alpha_0 & -\alpha_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1[n] \\ x_2[n] \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u[n] \tag{8}$$

nebo
$$\begin{bmatrix} x_1[n+1]) \\ x_2[n+1] \end{bmatrix} = \mathbf{M} \begin{bmatrix} x_1[n] \\ x_2[n] \end{bmatrix} + \mathbf{N}\, u[n], \tag{9}$$
resp.
$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\alpha_0 & -\alpha_1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{N} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Rovnici pro výstup vyjádříme z definice stavových veličin
$$y[n] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1[n] \\ x_2[n] \end{bmatrix} + 0\, u[n]\,. \tag{10}$$
Matice **D** je tedy nulová a pro výstupní matici dostáváme
$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}\,. \tag{11}$$
Lineární systém, který má matici **D** nulovou, se nazývá ryzí systém. Je vhodné podotknout, že počáteční podmínky se transformují do stavového popisu takto
$$y(0) = \gamma_1 = x_1(0) \quad \text{a} \quad y(1) = \gamma_2 = x_2(0).$$

... podobně diferencální rovnice druhého řádu s počátečními podmínkami ve tvaru
$$\ddot{y}(t) + a_1\, \dot{y}(t) + a_0\, y(t) = u(t) \tag{12}$$
$$y(t)|_{t=0+} = c_1 \quad \text{a} \quad \dot{y}(t)|_{t=0+} = c_2, \tag{13}$$
udává vztah vstupu $u(t)$ a výstupu $y(t)$ spojitého LTI systému

Tento vnější popis převedeme na stavový popis volbou stavového vektoru
$$\begin{aligned} x_1(t) &= y(t)\,, \\ x_2(t) &= \dot{y}(t)\,. \end{aligned}$$

Použijeme $\dot{y}(t) = x_2(t)$ a je $\ddot{y}(t) = \dot{x}_2(t)$, Tento vztah dosadíme do původní diferenciální rovnice a je
$$\dot{x}_2(t) = -a_1\, x_2(t) - a0\, x_1(t) + u(t)\,. \tag{14}$$
Současně platí
$$\dot{x}_1(t) = \dot{y}(t) = x_2(t)\,. \tag{15}$$

Dostáváme tak
$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t)) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \tag{16}$$

nebo

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t)) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \mathbf{A} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \mathbf{B}\, u(t), \tag{17}$$

resp.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Rovnici pro výstup vyjádříme z definice stavových veličin

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + 0\, u(t)\,. \tag{18}$$

Matice **D** je tedy nulová a pro výstupní matici dostáváme

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}\,. \tag{19}$$

Počáteční podmínky se transformují do stavového popisu takto

$$y(t)|_{t=0+} = c_1 = x_1(t)|_{t=0+} \quad \text{a} \quad \dot{y}(t)|_{t=0+} = c_2 = x_2(t)|_{t=0+}$$

Příklad stavového modelu z reálného světa

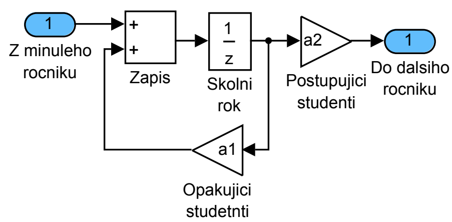
Model fakulty

Vznik nové fakulty a hledání odpovědí na různé otázky související s počty studentů jsou ukázkou diskrétního stavového systému, ve kterém složka stavového vektoru x_i reprezentuje počet studentů v i-tém ročníku. Předpokládejme dále, že do prvního ročníku budeme přijímat pravidelně každý rok $u[n]$ studentů.

- Jestliže z každého ročníku postoupí bez potíží $a_1 x_i$ studentů, opakuje $a_2 x_i$ studentů a fakultu opustí $a_3 x_i$ studentů, kde $a_1 + a_2 + a_3 = 1$, nalezněte počty absolventů, pokud úspěšnost u státních závěrečných zkoušek je a, pro které platí $a \equiv a_1^{(5)}$.
- Nalezněte celkový počet studentů, kteří studují v jednom akademickém roce na fakultě.

Stavový popis této vzorové situace je

$$\begin{bmatrix} x_1[n+1] \\ x_2[n+1] \\ x_3[n+1] \\ x_4[n+1] \\ x_5[n+1] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_2^{(1)} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_1^{(1)} & a_2^{(2)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_1^{(2)} & a_2^{(3)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_1^{(3)} & a_2^{(4)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_1^{(4)} & a_2^{(5)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1[n] \\ x_2[n] \\ x_3[n] \\ x_4[n] \\ x_5[n] \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u[n]$$



Obrázek 2: Model jednotlivého ročníku fakulty

$$y[n] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1[n] \\ x_2[n] \\ x_3[n] \\ x_4[n] \\ x_5[n] \end{bmatrix}.$$

Nebo se můžeme ptát, jaký je celkový počet studentů na fakultě v určitém roce. Potom pro výstup obdržíme

$$y[n] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1[n] \\ x_2[n] \\ x_3[n] \\ x_4[n] \\ x_5[n] \end{bmatrix}.$$