Laplaceova transformace

Modelování systémů a procesů (11MSP)

Bohumil Kovář, Jan Přikryl, Miroslav Vlček

5. přednáška 11MSP

čtvrtek 20. března 2014

verze: 2014-03-20 15:40

Obsah

Tento text je do jisté míry experimentálním pískovištěm na odladění převodu textu prezentace vytvořené v LaTeXové třídě `beamer` do textu vysázeného pomocí `tufte-handout`. Obsah je oproti prezentaci mírně rozšířen o poznámky. Bude se ještě v průběhu semestru měnit, kontrolujte si prosím čas sestavení v záhlaví tohoto souboru.

Fourierova transformace

Matematické nástroje pro reprezentaci a analýzu LTI systémů, které jsme si doposud ukazovali, jsou založeny na reprezentaci vztahu vstup-výstup pomocí konvoluce a na reprezentaci signálů jako lineární kombinace vzájemně posunutých a škálovaných impulsů.

Ukážeme si nyní, že podobným způsobem, jako v předcházejících přednáškách, lze signály reprezentovat jako lineární kombinaci komplexních exponenciál. Výsledkem takovéto reprezentace je potom tak zvaná **Fourierova transformace**, jež převádí signál z časové do frekvenční roviny.

Komplexní exponenciála

Důležitost komplexních exopnenciálních funkcí při studiu LTI systémů plyne z faktu, že odezva LTI systému na takovýto signál je ta samá komplexní exponenciála, pouze se změněnou amplitudou[1]. Platí tedy

$$\text{spojitý systém: } e^{st} \longrightarrow H(s) \cdot e^{st}$$
$$\text{diskrétní systém: } z^n \longrightarrow H(z) \cdot z^n$$

[1] Jak jsme si říkali, LTI systém nedokáže změnit frekvenci vstupního signálu.

kde $H(s)$ respektive $H(z)$ je komplexní škálovací faktor, jež obecně může záviset na komplexní proměnné s nebo z.

Signál, pro nějž je výstup systému roven vstupu až na násobení konstantou, nazýváme **vlastní funkce** systému a odpovídající škálovací faktor pak nazýváme **vlastní číslo** systému.

Ukažme si nyní, že komplexní exponenciála je opravdu vlastní funkcí LTI systému: Uvažujme spojitý LTI systém s impulsní odezvou $h(t)$ a vstupním signálem $u(t) = e^{st}$, kde $s \in \mathbb{C}$. Výstup je dán konvolučním integrálem

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)\, u(t-\tau)\mathrm{d}\tau = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)\, e^{s(t-\tau)}\mathrm{d}\tau.$$

Platí $e^{s(t-\tau)} = e^{st}e^{-s\tau}$ a člen e^{st} nezávisí na integrandu, je tedy

$$y(t) = e^{st} \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)\, e^{-s\tau}\mathrm{d}\tau.$$

Předpokládejme nyní bez další hlubší analýzy (která je ovšem zcela na místě), že integrál na pravé straně rovnice (**??**) konverguje k nějaké hodnotě, závislé v obecném případě na s. V takovém případě je odezva systému na vstupní signál $u(t) = e^{st}$ rovna

$$y(t) = H(s) \cdot e^{st},$$

kde $H(s)$ je komplexní konstanta závisející jednak na s a jednak na impulsní odezvě systému vztahem

$$H(s) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)\, e^{-s\tau}\mathrm{d}\tau.$$

Ukázali jsme si tedy, že komplexní exponenciála e^{st} je opravdu vlastní funkcí spojitých LTI systémů. Konstanta $H(s)$ pro nějakou konkrétní hodnotu s je potom vlastním číslem systému spojeným s vlastní funkcí e^{st}.

Jak uvidíme později, to samé lze ukázat i pro diskrétní systémy.

Pro imaginární hodnoty s, tedy pro $s = i\omega$, odpovídá $H(s)$ Fourierově transformaci signálu impulsní odezvy $h(t)$.

Matematické nářadí - Laplaceova transformace

V minulém odstavci jsme si ukázali, že pro imaginární s odpovídá $H(s)$ Fourierově transformaci signálu impulsní odezvy $h(t)$. Pokud budeme uvažovat namísto ryze imaginárních komplexních hodnot obecná komplexní čísla p, bude výsledkem generalizace Fourierovy transformace – tak zvaná **Laplaceova transformace**.

Důvody použití

Laplaceova transformace významně zjednodušuje některé operace v oblasti analýzy spojitých LTI systémů, například

- *derivace* $\Rightarrow$ *násobení* proměnnou p
- *integrace* $\Rightarrow$ *dělení* proměnnou p
- *diferenciální rovnice* n-tého řádu s konstantními koeficienty $\Rightarrow$ *algebraické rovnice* n-tého řádu
- *konvoluce* $f(t) * g(t) \Rightarrow$ *součin* $F(p) \cdot G(p)$

Definice

Definice 1 (Laplaceova transformace)**.** Laplaceova transformace funkce $f(t)$, která je *nanejvýš polynomiálního růstu*

$$f(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \cdots + a_n t^n$$

je definována integrálem

$$F(p) = \int_0^\infty f(t) e^{-pt} \mathrm{d}t \equiv \mathcal{L}\left\{f(t)\right\}. \tag{1}$$

Funkci $f(t)$ nazýváme **vzorem** a funkci $F(p)$ Laplaceovým **obrazem**.

Zpětná Laplaceova transformace má tvar integrálu podél křivky v komplexní rovině p

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} F(p)\, e^{pt} \mathrm{d}p \equiv \mathcal{L}^{-1}\left\{F(p)\right\}. \tag{2}$$

Praktické počítání zpětné Laplaceovy transformace vychází z residuové věty, která pro racionálně lomené funkce v proměnné p vede v operátorovém počtu na **Heavisideovu větu**.

Obrázek 1: Oliver Heaviside, 1850-1925

Vlastnosti

Věta 2 (Linearita)**.** *Laplaceova transformace je lineární:*

$$\mathcal{L}\left\{\sum_k a_k f_k(t)\right\} = \sum_k a_k \mathcal{L}\left\{f_k(t)\right\} = \sum_k a_k F_k(p)$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\sum_m b_m F_m(p)\right\} = \sum_m b_m \mathcal{L}^{-1}\left\{F_m(p)\right\} = \sum_m b_m f_m(t)$$

Věta 3 (O změně měřítka)**.** *Pro* $F(p) = \mathcal{L}\left\{f(t)\right\}$ *je*

$$\mathcal{L}\left\{f(at)\right\} = \frac{1}{a} F\left(\frac{p}{a}\right)$$

Důkaz. Substitucí $at = \tau$

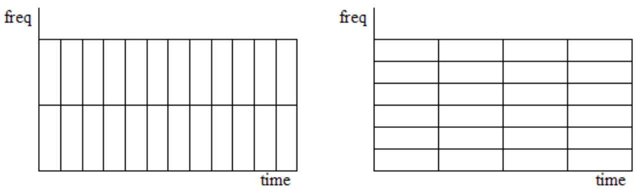
$$\mathcal{L}\left\{f(at)\right\} = \int_0^\infty f(at)e^{-pt}\mathrm{d}t = \int_0^\infty f(\tau)e^{-\frac{p}{a}\tau}\frac{1}{a}\mathrm{d}\tau = \frac{1}{a}F\left(\frac{p}{a}\right)$$

□

Věta o změně měřítka platí samozřejmě i obráceně pro $b = 1/a$:

$$\frac{1}{b}f\left(\frac{t}{b}\right) = \mathcal{L}^{-1}\left\{F(bp)\right\}$$

Všechny integrální transformace (Laplace, Fourier, Wavelets) podléhají Hesienbergově principu neurčitosti v časovém a kmitočtovém rozlišení.



Obrázek 2: Časově-kmitočtové rozlišení

Věta 4 (O posunutí). *Je-li* $F(t) = \mathcal{L}\left\{f(t)\right\}$*, pak*

$$\mathcal{L}\left\{\mathbf{1}(t-\tau)f(t-\tau)\right\} = e^{-p\tau}\mathcal{L}\left\{f(t)\right\} = e^{-p\tau}F(p).$$

Důkaz. Substitucí $t - \tau = \vartheta$ obdržíme

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\left\{f(t-\tau)\right\} &= \int_0^\infty f(t-\tau)e^{-pt}\mathrm{d}t = \int_{-\tau}^\infty f(\vartheta)e^{-p(\tau+\vartheta)}\mathrm{d}\vartheta \\ &= e^{-p\tau}\int_{-\tau}^{-0} f(\vartheta)e^{-p\vartheta}\mathrm{d}\vartheta + e^{-p\tau}\int_0^\infty f(\vartheta)e^{-p\vartheta}\mathrm{d}\vartheta \\ &= e^{-p\tau}\int_0^\infty f(\vartheta)e^{-p\vartheta}\mathrm{d}\vartheta \equiv e^{-p\tau}F(p)\end{aligned}$$

□

Velice často se můžeme setkat se zápisem věty o posunutí ve tvaru

$$\mathcal{L}\left\{f(t-\tau)\right\} = e^{-p\tau}F(p). \tag{3}$$

Tento zápis je zcela korektní za předpokladu, že dodržíme následující podmínku definice jednostranné Laplaceovy transformace: definiční obor transformované funkce $f(t)$ je $t \geq 0$, pro $t < 0$ volíme $f(t) = 0$. Jednostranná transformace neposunté funkce funguje i bez této podmínky, neboť definiční integrál zahrnuje pouze nezáporné hodnoty t, v případě posunu parametru funkce o výše uvedené τ se ale dostáváme do problémů, způsobených nejednoznačností výše uvedeného zápisu. Demonstrujme si tyto problémy na následujícím příkladu.

Příklad 5 (Blíže o větě o posunutí). Laplaceův obraz funkce $f(t) = \frac{1}{2}t^2$ je

$$\mathcal{L}\left\{f(t)\right\} = \mathcal{L}\left\{\frac{1}{2}t^2\right\} = \frac{1}{p^3}.$$

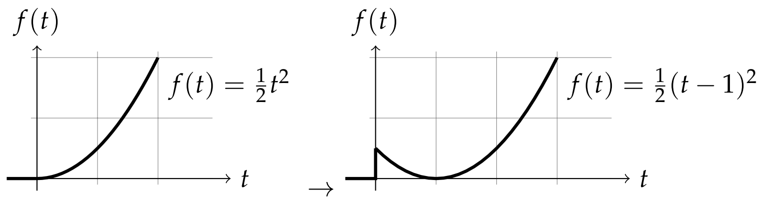
Jak to ale bude v případě, že budeme počítat obraz té samé funkce, posunuté o $\tau = 1$, tedy $f(t-1) = \frac{1}{2}(t-1)^2$?

Řešení:

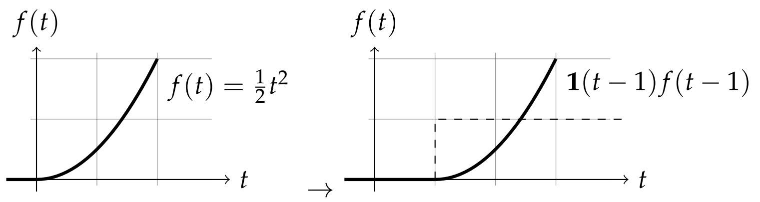
Pokud zvolíme podle (3)

$$\mathcal{L}\left\{f(t-1)\right\} = \mathcal{L}\left\{\frac{1}{2}(t-1)^2\right\} = \mathcal{L}\left\{\frac{1}{2}(t^2-2t+1)\right\} = \frac{1}{p^3} - \frac{1}{p^2} + \frac{1}{p}$$

odpovídá průběh naší transformované $f(t-1)$ obrázku



a to není to, co potřebujeme: z pravého grafu vidíme, že takto vyjádřená funkce $f(t-1)$ nabývá nenulových hodnot i pro záporné hodnoty argumentu, kokrétně pro $0 < t < 1$. Korektní způsob naznačuje následující obrázek:



Tomu odpovídá zápis transformace posunuté funkce, obsahující posunutý jednotkový skok

$$\mathcal{L}\left\{\mathbf{1}(t-1)\cdot f(t-1)\right\} = e^{-p}\cdot\mathcal{L}\left\{f(t)\right\} = e^{-p}\cdot\mathcal{L}\left\{\frac{1}{2}t^2\right\} = e^{-p}\cdot\frac{1}{p^3}.$$

Ukazuje se tedy, že je vhodnější a názornější zapisovat větu o posuntí argumentu ve tvaru

$$\mathcal{L}\left\{\mathbf{1}(t-\tau)\cdot f(t-\tau)\right\} = e^{-p\tau}\,F(p). \tag{4}$$

Věta 6 (O konvoluci)**.**

$$\mathcal{L}\left\{f(t)*g(t)\right\} = \mathcal{L}\left\{\int_0^\infty f(t-\tau)\cdot g(\tau)d\tau\right\} = F(p)\cdot G(p)$$

Důkaz se snáze provádí v diskrétním čase.

Důsledek

$$\mathcal{L}\left\{y(t) = \int_0^\infty h(\tau)\cdot u(t-\tau)\mathrm{d}\tau\right\} \Leftrightarrow Y(p) = H(p)\cdot U(p)$$

Věta 7 (O obrazu derivace funkce)**.**

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{f(t)\} &= F(p) \\
\mathcal{L}\left\{\frac{d}{dt}f(t)\right\} &= pF(p) - f(0) \\
\mathcal{L}\left\{\frac{d^2}{dt^2}f(t)\right\} &= p^2F(p) - pf(0) - \frac{d}{dt}f(0) \\
&\vdots \\
\mathcal{L}\left\{\frac{d^n}{dt^n}f(t)\right\} &= p^nF(p) - p^{n-1}f(0) - p^{n-2}\frac{d}{dt}f(0)\ldots - f^{(n-1)}(0)
\end{aligned}$$

Důkaz. Integrováním per partes, $\int_a^b u'v = [uv]_a^b - \int_a^b uv'$:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\left\{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}f(t)\right\} &= \int_0^\infty \frac{d}{dt}f(t)e^{-pt}\mathrm{d}t \\
&= \left[f(t)e^{-pt}\right]_0^\infty - (-p)\int_0^\infty f(t)e^{-pt}\mathrm{d}t \\
&= -f(0) + pF(p).
\end{aligned}$$

Opakováním tohoto procesu získáme postupně

$$\mathcal{L}\left\{\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}f(t)\right\} = p^2F(p) - pf(0+) - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}f(0+)$$

□

Věta 8 (O obrazu integrálu funkce)**.**

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(\tau)d\tau\right\} = \frac{1}{p}F(p)$$

Důkaz. Integrováním per partes

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(\tau)\mathrm{d}\tau\right\} &= \int_0^\infty \left(\int_0^t f(\tau)\mathrm{d}\tau\right) e^{-pt}\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{-p}\left[\int_0^t f(\tau)\mathrm{d}\tau e^{-pt}\right]_0^\infty - \frac{1}{-p}\int_0^\infty f(t)e^{-pt}\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{p}F(p).
\end{aligned}$$

V důkazu jsme využili toho, že $f(t)$ má polynomiální **ale mohl by to být i nejvýše exponenciální, ne?** růst a proto

$$\lim_{t\to\infty}\int_0^t f(\tau)\mathrm{d}\tau e^{-pt} = 0.$$

□

Tabulky Laplaceovy transformace

Tabulky Laplaceových obrazů základních funkcí lze odvodit z definičních vzorců postupnými aplikacemi definičního vzorce či využitím kombinací již známých obrazů. Uveďme si několik příkladů:

Pro Diracův impuls platí

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-\tau) f(\tau) \mathrm{d}\tau$$

a proto je Laplaceova transformace Diracova impulsu $\delta(t)$ rovna

$$\mathcal{L}\left\{\delta(t)\right\} = \int_{0}^{\infty} \delta(t) e^{-pt} \mathrm{d}t = e^{-p\cdot 0} = 1.$$

Obdobně pro jednotkový skok je

$$\mathcal{L}\left\{\mathbf{1}(t)\right\} = \int_{0}^{\infty} \mathbf{1}(t) e^{-pt} \mathrm{d}t = \int_{0}^{\infty} e^{-pt} = \left[-\frac{1}{p} e^{-pt}\right]_0^{\infty} = 0 - \left(-\frac{1}{p}\right) = \frac{1}{p}.$$

Zde jsme si pomohli faktem, že pro $t > 0$ je $\mathbf{1}(t) = 1$ a z hlediska výše uvedeného integrálu se chová jako konstanta.

$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{F(p)\right\}$	$F(p) = \mathcal{L}\left\{f(t)\right\}$
$f(t) = \dfrac{1}{2\pi i} \displaystyle\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} F(p)\, e^{pt} \mathrm{d}p$	$F(p) = \displaystyle\int_{0}^{\infty} f(t)\, e^{-pt} \mathrm{d}t$
$\delta(t)$	1
$\mathbf{1}(t)$	$\dfrac{1}{p}$

Pro exponenciální funkci s parametrem $\alpha \in \mathbb{R}, \alpha > 0$ máme obdobně, jako pro jednotkový skok je

$$\mathcal{L}\left\{e^{-\alpha t}\right\} = \int_{0}^{\infty} e^{-\alpha t} e^{-pt} \mathrm{d}t = \int_{0}^{\infty} e^{-(p+\alpha)t} = \left[-\frac{1}{p+\alpha} e^{-(p+\alpha)t}\right]_0^{\infty} = 0 - \left(-\frac{1}{p+\alpha}\right) = \frac{1}{p+\alpha}.$$

Pro základní trigonometrické funkce platí v komplexním oboru Eulerův vztah

$$e^{i\omega t} = \cos\omega t + i \sin\omega t$$

a proto také

$$\sin\omega t = \frac{1}{2i}\left(e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}\right)$$
$$\cos\omega t = \frac{1}{2}\left(e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}\right)$$

a odsud pro sinus

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\left\{\sin\omega t\right\} &= \frac{1}{2i}\mathcal{L}\left\{e^{i\omega t}\right\} - \frac{1}{2i}\mathcal{L}\left\{e^{-i\omega t}\right\} = \\
&= \frac{1}{2i}\frac{1}{p-i\omega} - \frac{1}{2}\frac{1}{p+i\omega} = \\
&= \frac{1}{2i}\frac{p+i\omega-p+i\omega)}{p^2+\omega^2} = \\
&= \frac{\omega}{p^2+\omega^2}.
\end{aligned}$$

a analogicky

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{\cos\omega t\} &= \frac{1}{2}\mathcal{L}\left\{e^{i\omega t}\right\} + \frac{1}{2i}\mathcal{L}\left\{e^{-i\omega t}\right\} = \\ &= \frac{1}{2}\frac{1}{p-i\omega} + \frac{1}{2}\frac{1}{p+i\omega} = \\ &= \frac{1}{2}\frac{p+i\omega+p-i\omega}{p^2+\omega^2} = \\ &= \frac{p}{p^2+\omega^2}.\end{aligned}$$

$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(p)\}$	$F(p) = \mathcal{L}\{f(t)\}$
$e^{-\alpha t}$	$\frac{1}{p+\alpha}$
$\sin\omega t$	$\frac{\omega}{p^2+\omega^2}$
$\cos\omega t$	$\frac{p}{p^2+\omega^2}$

Pro $x(t) = t$ lze Laplaceův obraz určit také relativně jednoduše, pokud si uvědomíme, že argument integrálu lze vyjádřit jako

$$te^{-pt} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}p}e^{-pt}.$$

Můžeme proto psát

$$\mathcal{L}\{t\} = \int_0^\infty te^{-pt}\mathrm{d}t = \int_0^\infty -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}p}e^{-pt}\mathrm{d}t = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}p}\int_0^\infty e^{-pt}\mathrm{d}t = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}p}\frac{1}{p} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}p}p^{-1} = p^{-2} = \frac{1}{p^2}.$$

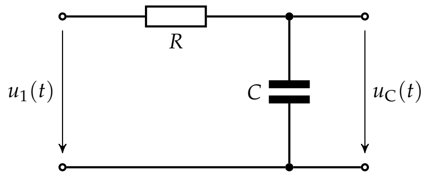
$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(p)\}$	$F(p) = \mathcal{L}\{f(t)\}$
$e^{-\alpha t}\sin\omega t$	$\frac{\omega}{(p+\alpha)^2+\omega^2}$
$e^{-\alpha t}\cos\omega t$	$\frac{p+\alpha}{(p+\alpha)^2+\omega^2}$
t^n	$\frac{n!}{p^{n+1}}$

■ **tabulky jako booktabs?** ■

$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{F(p)\right\}$	$F(p) = \mathcal{L}\left\{f(t)\right\}$
$t^n e^{-\alpha t}$	$\dfrac{n!}{(p+\alpha)^{n+1}}$
$t \cos \omega t$	$\dfrac{p^2 - \omega^2}{(p^2+\omega^2)^2}$
$t \sin \omega t$	$\dfrac{2\omega p}{(p^2+\omega^2)^2}$

Příklady použití Laplaceovy transformace

Příklad 9 (Integrační RC článek). Hledejme odezvu integračního RC článku znázorněného na obrázku 3 na vstupní signál.



Obrázek 3: RC článek, viz první přednáška

Diferenciální rovnici jsme si již odvodili v první přednášce:

$$RC\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}u_C(t) + u_C(t) = u_1(t).$$

Pro $\alpha = \dfrac{1}{RC}$ a vstupní $u_1(t) = U_0 \cdot \mathbf{1}(t)$ je

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}y(t) + \alpha y(t) = \alpha U_0 \cdot \mathbf{1}(t).$$

Protože je to diferenciální rovnice s konstantními koeficienty, můžeme použít Laplaceovu transformaci a její vlastnosti

$$\mathcal{L}\left\{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}y(t) + \alpha y(t) = \alpha U_0 \cdot \mathbf{1}(t)\right\},$$

což upravíme postupně na

$$\mathcal{L}\left\{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}y(t)\right\} + \mathcal{L}\left\{\alpha y(t)\right\} = \mathcal{L}\left\{\alpha U_0 \cdot \mathbf{1}(t)\right\},$$

a dále na

$$\mathcal{L}\left\{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}y(t)\right\} + \alpha\,\mathcal{L}\left\{y(t)\right\} = \alpha U_0\,\mathcal{L}\left\{\mathbf{1}(t)\right\},$$

a obdržíme algebraickou rovnici pro neznámou $Y(p)$

$$pY(p) - y(0) + \alpha Y(p) = \alpha U_0 \cdot \frac{1}{p}.$$

Rovnici upravíme tak, že neznámá bude na levé straně a všechny známé konstanty na straně pravé

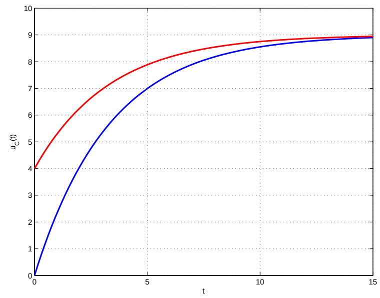
$$(p+\alpha)Y(p) = \frac{\alpha U_0}{p} + y(0).$$

a nalezneme řešení v rovině p

$$Y(p) = \frac{\alpha U_0}{p(p+\alpha)} + \frac{y(0)}{p+\alpha} = \frac{U_0}{p} - \frac{U_0}{p+\alpha} + \frac{y(0)}{p+\alpha}$$

S pomocí tabulek pak můžeme nalézt pro $t > 0$ řešení

$$y(t) = U_0\left(1 - e^{-\alpha t}\right) + y(0)e^{-\alpha t}$$



Obrázek 4: Průběh napětí na výstupu RC článku v závislosti na hodnotě počátečního stavu, tedy zbytkového napětí $y(0) = 0\,\mathrm{V}$ (modře) a $y(0) = 4\,\mathrm{V}$ (červeně)

Příklad 10 (Impulsní odezva LTI systému). Uvažujte LTI systém, který je pro $t > 0$ popsán naměřenými hodnotami vstupu

$$u(t) = e^{-t} + e^{-3t}$$

a výstupu

$$y(t) = te^{-3t}.$$

Jak nalezneme *impulsní odezvu*?

Protože platí

$$U(p) = \frac{1}{p+1} + \frac{1}{p+3} = 2\frac{p+2}{(p+1)(p+3)}$$
$$Y(p) = \frac{1}{(p+3)^2}$$

a protože

$$Y(p) = H(p) \cdot U(p),$$

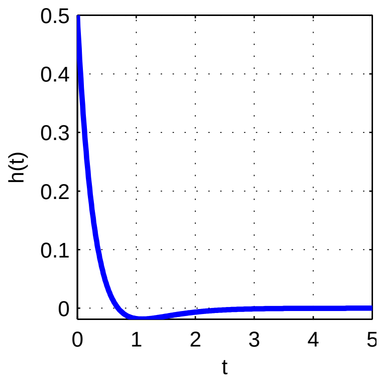
je

$$H(p) = \frac{Y(p)}{U(p)} = \frac{1}{2}\frac{p+1}{(p+2)(p+3)} = \frac{1}{2}\left[\frac{2}{p+3} - \frac{1}{p+2}\right].$$

S pomocí tabulek pak můžeme nalézt pro $t > 0$ řešení

$$h(t) = e^{-3t} - \frac{1}{2}e^{-2t}.$$

jehož graf je znázorněn na obrázku 5.



Obrázek 5: Impulsní odezva systému z příkladu 10