# *Inverzní Laplaceova transformace*

*Modelování systémů a procesů (11MSP)*

*Bohumil Kovář, Jan Přikryl, Miroslav Vlček*

*6. přednáška 11MSP*

*čtvrtek 27. března 2014*

*verze: 2014-03-27 15:16*

## *Obsah*



Tento text je do jisté míry experimentálním pískovištěm na odladění převodu textu prezentace vytvořené v LaTeXové třídě `beamer` do textu vysázeného pomocí `tufte-handout`. Obsah je oproti prezentaci mírně rozšířen o poznámky. Bude se ještě v průběhu semestru měnit, kontrolujte si prosím čas sestavení v záhlaví tohoto souboru.

## *Zpětná Laplaceova transformace*

### *Definice*

Již jsme si řekli, že zpětná Laplaceova transformace má tvar integrálu podél křivky v komplexní rovině $p$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} F(p)\, e^{pt} \mathrm{d}p \equiv \mathcal{L}^{-1}\left\{F(p)\right\}.$$

Pro *racionální lomené funkce v proměnné $p$* budeme postupovat jinak.

*Rozklad na parciální zlomky*

| $f(t) \Rightarrow$ | $\Leftarrow \qquad F(p)$ |
|---|---|
| $e^{-\alpha t}$ | $\dfrac{1}{p+\alpha}$ |
| $e^{-\alpha t}\cos\omega t$<br>$= \dfrac{e^{-(\alpha-\imath\omega)t}+e^{-(\alpha+\imath\omega)t}}{2}$ | $\dfrac{p+\alpha}{(p+\alpha)^2+\omega^2}$<br>$= \dfrac{1}{2}\left(\frac{1}{p+\alpha-\imath\omega}+\frac{1}{p+\alpha+\imath\omega}\right)$ |
| $e^{-\alpha t}\sin\omega t$<br>$= \dfrac{e^{-(\alpha-\imath\omega)t}-e^{-(\alpha+\imath\omega)t}}{2\imath}$ | $\dfrac{\omega}{(p+\alpha)^2+\omega^2}$<br>$= \dfrac{1}{2\imath}\left(\frac{1}{p+\alpha-\imath\omega}-\dfrac{1}{p+\alpha+\imath\omega}\right)$ |

Odbočka ■ **možná lépe přesunout k Hevidsideovi a k diskusi o Laplaceově transformaci** ■: Výsledky Hevisideovy práce se tady oháníme hlavně z toho důvodu, že on byl (pokud je mi známo) první, kdo navrhl ucelený postup řešení jednoduchých diferenciálních rovnic pomocí **operátorového počtu**.

Operátorový počet, tedy alternativní metoda reprezentace operací derivace a integrování jakýmsi zvoleným operátorem, je v oblasti matematické analýzy znám už od 17. století. Heaviside pro své výpočty používal operátor $p$ ve významu

$$
\begin{aligned}
p &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\\
p^2 &= \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\\
p^{-1} &= \int \mathrm{d}\tau
\end{aligned}
$$

což 1:1 odpovídá tehdy ještě neznámé Laplaceově transformaci.

Výsledkem operátorového zápisu diferenciálních rovnic bylo (analogicky s našimi výsledky, jichž jsme dosáhli Laplaceovou transformací) vyjádření obrazu výstupu systému ve tvaru racionální lomené funkce,

$$
R(p) = \frac{Q(p)}{N(p)} = \frac{b_m p^m + b_{m-1}p^{m-1} + \cdots + b_1 p + b_0}{a_n p^n + a_{n-1}p^{n-1} + \cdots + a_1 p + a_0} \tag{1}
$$

pro nějaké konstanty $a_0, \ldots, a_n$ a $b_0, \ldots, b_m$, u níž předpokládáme, že $\lim_{p\to\infty} R(p) = 0$ – to je zaručeno vždy, když je $m < n$, tedy když stupeň polynomu v čitateli je nižší, než stupeň polynomu ve jmenovateli.

Ze základních kurzů algebry víme, že zlomek (1) lze vyjádřit jako součet **parciálních zlomků**, což jsou jednoduché zlomky s konstantou v čitateli a jedním kořenem $N(p)$ ve jmenovateli.

O racionální lomené funkci $\dfrac{Q(p)}{N(p)}$ říkáme, že má nulové body

$p_{0\nu}$, jestliže $Q(p_{0\nu}) = 0$ a že má póly $p_{\infty\mu}$, jestliže $N(p_{\infty\mu}) = 0$.

Pokud má funkce $\dfrac{Q(p)}{N(p)}$ jednoduché póly, potom

$$N(p) = \prod_{\mu=1}^{n}(p - p_{\infty\mu}) = (p - p_{\infty 1})(p - p_{\infty 2})\dots(p - p_{\infty n}).$$

*Příklad* 1 (Racionální lomená funkce). Jestliže

$$N(p) = p^3 + 3p^2 + 6p + 4 = (p+1)(p^2 + 2p + 4)$$

určete rozklad na kořenové činitele.

Je samozřejmě

$$N(p) = (p+1)(p^2+2p+4) = (p+1)(p+1+\imath\sqrt{3})(p+1-\imath\sqrt{3})$$

takže platí

$$N(p) = \prod_{\mu=1}^{3}(p - p_\mu) = (p - p_1)(p - p_2)(p - p_3).$$

Póly v tomto případě jsou

$$\begin{aligned} p_1 &= -1 \\ p_2 &= -1 - \imath\sqrt{3} \\ p_3 &= -1 + \imath\sqrt{3} \end{aligned}$$

a platí $N(p_1) \equiv N(-1) = 0$ atd.

Z tohoto příkladu plyne první krok, který musíme při zpětné Laplaceově transformaci provést: nalezení kořenů polynomu ve jmenovateli racionální funkce $N(p)$

### *Zakrývací pravidlo pro jednoduché póly*

Rozklad racionální lomené funkce na parciální zlomky má tvar

$$\begin{aligned} \frac{Q(p)}{N(p)} &= \sum_{\mu=1}^{n}\frac{k_\mu}{p - p_{\infty\mu}} \\ &= \frac{k_1}{p - p_{\infty 1}} + \frac{k_2}{p - p_{\infty 2}} + \dots + \frac{k_n}{p - p_{\infty n}} \\ &\equiv \frac{k_1}{p - p_1} + \frac{k_2}{p - p_2} + \dots + \frac{k_n}{p - p_n}, \end{aligned}$$

kde $k_\mu$ se nazývají **residua**.

Pro residua platí

$$
\begin{aligned}
k_\mu &= \lim_{p \to p_{\infty\mu}} (p - p_{\infty\mu}) \frac{Q(p)}{N(p)} \\
&= Q(p_{\infty\mu}) \lim_{p \to p_{\infty\mu}} (p - p_{\infty\mu}) \frac{1}{N(p)} \\
&= Q(p_{\infty\mu}) \lim_{p \to p_{\infty\mu}} \frac{1}{\dfrac{N(p)}{p - p_{\infty\mu}}} \\
&= Q(p_{\infty\mu}) \frac{1}{N'(p_{\infty\mu})}
\end{aligned}
$$

Pro jednoduchost budeme dále psát $p_{\infty\mu} \to p_\mu$. Protože platí

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{p-\alpha}\right\} = e^{\alpha t},$$

dostaneme

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{Q(p)}{N(p)}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\sum_{\mu=1}^{n} \frac{k_\mu}{p - p_\mu}\right\} = \sum_{\mu=1}^{n} k_\mu e^{p_\mu t}.$$

Tím jsme dokázali tzv. **Heavisideův vzorec** pro zpětnou transformaci racionální lomené funkce s jednoduchými póly

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{Q(p)}{N(p)}\right\} = \sum_{\mu} \frac{Q(p_\mu)}{N'(p_\mu)} e^{p_\mu t}$$

*Příklad* 2 (Jednoduché póly). Laplaceův obraz impulsní odezvy systému je

$$H(p) = \frac{6}{p^3 + 3p^2 + 6p + 4} = \frac{6}{(p+1)(p^2+2p+4)}.$$

Určete $h(t)$.

**Řešení:** Nejprve rozložíme

$$
\begin{aligned}
H(p) &= \frac{6}{(p+1)(p^2+2p+4)} \\
&= \frac{k_1}{p+1} + \frac{k_2}{p+1+\imath\sqrt{3}} + \frac{k_3}{p+1-\imath\sqrt{3}}.
\end{aligned}
$$

Platí

$$
\begin{aligned}
k_1 &= \lim_{p \to -1} \frac{6}{p^2+2p+4} = \frac{6}{1-2+4} = \frac{6}{3} = 2, \\
k_2 &= \lim_{p \to -1-\imath\sqrt{3}} \frac{6}{(p+1)(p+1-\imath\sqrt{3})} \\
&= \frac{6}{(-1-\imath\sqrt{3}+1)(-1-\imath\sqrt{3}+1-\imath\sqrt{3})} \\
&= \frac{6}{(-\imath\sqrt{3})(-\imath 2\sqrt{3})} = -1,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
k_3 &= \lim_{p \to -1-\imath\sqrt{3}} \frac{6}{(p+1)(p+1+\imath\sqrt{3})} \\
&= \frac{6}{(-1+\imath\sqrt{3}+1)(-1+\imath\sqrt{3}+1+\imath\sqrt{3})} \\
&= \frac{6}{(\imath\sqrt{3})(\imath 2\sqrt{3})} = -1.
\end{aligned}
$$

*Násobné póly*

Jestliže $N(p) = (p-p_1)^{\beta_1}(p-p_2)^{\beta_2}\dots(p-p_n)^{\beta_n}$ má násobné kořeny s násobností $\beta_i$, musíme předchozí postup modifikovat, protože platí

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}\left\{e^{-\alpha t}\right\} &= \frac{1}{p+\alpha} \\
\mathcal{L}\left\{te^{-\alpha t}\right\} &= \frac{1!}{(p+\alpha)^2} \\
\mathcal{L}\left\{t^2e^{-\alpha t}\right\} &= \frac{2!}{(p+\alpha)^3} \\
&\vdots \\
\mathcal{L}\left\{t^ne^{-\alpha t}\right\} &= \frac{n!}{(p+\alpha)^{n+1}}
\end{aligned}
$$

Je zřejmé, že v inverzní transformaci hrají výsadní roli póly racionální lomené funkce. Proto se v dalším můžeme zabývat pouze takovými racionálně lomenými funkcemi, jejichž čitatel je jednotkový

$$H(p) = \frac{1}{N(p)}.$$

Jestliže tedy

$$N(p) = (p-p_1)^{\beta_1}(p-p_2)^{\beta_2}\dots(p-p_n)^{\beta_n}$$

má násobné kořeny, potom inverzní Laplaceova transformace má tvar

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{N(p)}\right\} &= e^{p_1 t}\left[k_1^{(1)} + k_1^{(2)}\frac{t}{1!} + \dots + k_1^{(\beta_1)}\frac{t^{\beta_1-1}}{(\beta_1-1)!}\right] \\
&+ e^{p_2 t}\left[k_2^{(1)} + k_2^{(2)}\frac{t}{1!} + \dots + k_2^{(\beta_2)}\frac{t^{\beta_2-1}}{(\beta_2-1)!}\right] \\
&\vdots + e^{p_n t}\left[k_n^{(1)} + k_n^{(2)}\frac{t}{1!} + \dots + k_n^{(\beta_n)}\frac{t^{\beta_n-1}}{(\beta_n-1)!}\right]
\end{aligned}
\tag{2}
$$

Koeficienty $k_\mu^{(\beta_m)}$ můžeme získat následujícím postupem.

*Příklad* 3 (Zpětná Laplaceova transformace násobných pólů). Nechť například

$$N(p) = (p-2)^2(p+5)(p+7).$$

Rozklad na parciální zlomky hledáme ve tvaru

$$\frac{1}{(p-2)^2(p+5)(p+7)} = \frac{k_1^{(2)}}{(p-2)^2} + \frac{k_1^{(1)}}{p-2} + \frac{k_2}{p+5} + \frac{k_3}{p+7}$$

Vynásobíme rovnici členem $(p-2)^2$

$$\begin{aligned}&\frac{(p-2)^2}{(p-2)^2(p+5)(p+7)}\\&\qquad = k_1^{(2)} + k_1^{(1)}(p-2) + \frac{k_2(p-2)^2}{p+5} + \frac{k_3(p-2)^2}{p+7}\end{aligned} \tag{3}$$

a nalezneme limitu pro $p \to 2$,

$$\frac{1}{(2+5)(2+7)} = k_1^{(2)} \tag{4}$$

Odečteme-li výraz $\frac{1}{63(p-2)^2}$ od obou stran původní rovnice, dostáváme

$$\frac{1}{(p-2)^2(p+5)(p+7)} - \frac{1}{63(p-2)^2} = \frac{k_1^{(1)}}{p-2} + \frac{k_2}{p+5} + \frac{k_3}{p+7}$$

respektive rovnici

$$\frac{1}{63}\left[\frac{-(p+14)}{(p-2)(p+5)(p+7)}\right] = \frac{k_1^{(1)}}{p-2} + \frac{k_2}{p+5} + \frac{k_3}{p+7},$$

pro kterou se výpočet $k_\mu$ redukuje na případ s jednoduchými póly a platí

$$\begin{aligned}k_1^{(1)} &= -\frac{2^4}{7^2 \times 9^2},\\ k_2 &= \frac{1}{2 \times 7^2},\\ k_3 &= -\frac{1}{2 \times 9^2}.\end{aligned}$$

### *Zakrývací pravidlo pro násobné póly*

V případě, že se v případě výskytu násobných pólů pokusíme pro rozklad na pariciální zlomky použít zakrývací pravidlo, zjistíme, že nám tento postup moc nepomůže. Pokud totiž má jmenovatel rozkládaného polynomiálního zlomku kořen $p_\infty$ s násobností $k$, bude rozklad na parciální zlomky obsahovat členy

$$\frac{A_{k-1}}{(p-p_\infty)^k} + \frac{A_{k-2}}{(p-p_\infty)^{k-1}} + \cdots + \frac{A_1}{(p-p_\infty)^2} + \frac{A_0}{p-p_\infty}$$

a z nich lze přímým použitím zakrývacího pravidla určit pouze hodnotu $A_{k-1}$, ale hodnoty $A_{k-2}$ až $A_0$ nikoliv.

Heavisideovo zakrývací pravidlo lze ale pro násobné kořeny použít, musíme jej ale aplikovat opakovaně: Celý postup v tomto případě vychází z principu, že každý násobný kořen lze z jmenovatele postupně vytýkat ven až do té doby, dokud nezbude zlomek, jenž dokážeme rozložit přímou aplikací zakrývacího pravidla. Výsledný rozklad poté opět násobíme a násobky s rozdílnými póly rozkládáme opět přímou aplikací zakrývacího pravidla.

Ukažme si tento princip na jednoduchém příkladu.

*Příklad* 4 (Heavisideův vzorec pro násobné póly). Heavisideovou metodou rozložíme na parciální zlomky racionální lomenou funkci

$$R(p) = \frac{1}{(p+1)^2(p+2)}.$$

Postupujeme takto:

| | |
|---|---|
| $R(p) = \frac{1}{(p+1)^2(p+2)}$ | Původní racionální lomená funkce s násobnými póly. |
| $= \frac{1}{(p+1)} \cdot \frac{1}{(p+1)(p+2)}$ | Násobné kořeny vytkneme. |
| $= \frac{1}{(p+1)} \left( \frac{1}{p+1} + \frac{-1}{p+2} \right)$ | Na pravý zlomek použijeme zakrývací pravidlo. |
| $= \frac{1}{(p+1)^2} - \frac{1}{(p+1)(p+2)}$ | Roznásobíme závorku. |
| $= \frac{1}{(p+1)^2} - \frac{1}{p+1} + \frac{1}{p+2}$ | A na pravý zlomek použijeme zakrývací pravidlo ještě jednou. |

□

Pro pól s násobností 2 lze z výše uvedeného odvodit následující postup:

| | |
|---|---|
| $R(p) = \frac{1}{(p+1)^2(p+2)}$ | Původní racionální lomená funkce s násobnými póly. |
| $= \frac{A}{(p+1)^2} + \frac{B}{p+1} + \frac{C}{p+2}$ | Viz rovnice (2) |
| $= \frac{1}{(p+1)^2} + \frac{B}{p+1} + \frac{1}{p+2}$ | Hodnoty $A$ a $C$ určíme zakrývacím pravidlem. |
| $= \frac{1}{(p+1)^2} - \frac{1}{p+1} + \frac{1}{p+2}$ | Celou rovnici (tedy levou i pravou stranu) vynásobíme $(p + 1)$ a spočteme limitu pro $p \to \infty$. Vyjde $0 = B + 1$. |

## *Příklad použití zpětné Laplaceovy transformace*

### *Diferenciální rovnice*

*Příklad* 5 (Spojitý systém druhého řádu). Uvažujme lineární spojitý systém, popsaný diferenciální rovnicí

$$y''(t) + 3y'(t) + 2y(t) = 5u(t),$$

kde $u(t) = \mathbf{1}(t)$ je jednotkový skok a počáteční stav systému je dán stavem výstupu a rychlosti v čase $t = 0$: $y(0) = -1$ a $y'(0) = 2$.

Máme nalézt řešení $y(t)$.

Po Laplaceově transformaci diferenciální rovnice dostaneme algebraickou rovnici

$$p^2Y(p) - py(0) - y'(0) + 3pY(p) - 3y(0) + 2Y(p) = 5\,\frac{1}{p}.$$

S použitím počátečních podmínek nalezneme řešení algebraické rovnice ve tvaru

$$\begin{aligned} Y(p)\left[p^2+3p+2\right]-p(-1)-2-3(-1) &= 5\,\frac{1}{p} \\ Y(p)\left[p^2+3p+2\right]+p+1 &= 5\,\frac{1}{p} \\ Y(p)\left[p^2+3p+2\right] &= 5\,\frac{1}{p}-p-1 \end{aligned}$$

a odtud

$$Y(p)=\frac{5-p-p^2}{p(p+1)(p+2)}.$$

Rozložíme racionální lomenou funkci na parciální zlomky

$$Y(p)=\frac{5}{2p}-\frac{5}{p+1}+\frac{3}{2}\frac{1}{(p+2)}.$$

Hledané řešení je pro $t \geq 0$

$$y(t)=\frac{5}{2}-5e^{-t}+\frac{3}{2}e^{-2t}. \tag{5}$$

První člen odpovídá ustálenému stavu, další dva členy popisují přechodový děj.

Vztah, popisovaný rovnicí (5), platí pouze pro $t \geq 0$ (proto z něj mysticky vypadl jednotkový skok, odpovídající zpětně transformovanému $1/p$). Často se proto setkáváme s jednoznačnějším zápisem

$$y(t)=\left[\frac{5}{2}-5e^{-t}+\frac{3}{2}e^{-2t}\right]\mathbf{1}(t).$$