

Přenosová funkce spojitých systémů.

Stabilita spojitých systémů.

Modelování systémů a procesů (11MSP)

Bohumil Kovář, Jan Příklad, Miroslav Vlček

7. přednáška 11MSP

čtvrtek 3. dubna 2014

verze: 2014-05-15 15:39

Obsah

<i>Zpětná Laplaceova transformace</i>	2
<i>Obecné řešení diferenciální rovnice druhého řádu</i>	2
<i>Přenosová funkce</i>	2
<i>Zpětná Laplaceova transformace – příklady</i>	3
<i>Přenosová funkce a vnitřní popis</i>	5
<i>Odvození</i>	5
<i>Inverzní matice</i>	6
<i>Příklad</i>	7
<i>Vyšetřování stability spojitých systémů</i>	8
<i>Vnější popis</i>	8
<i>Stabilní systém</i>	9
<i>Nestabilní systém</i>	9
<i>Mez stability</i>	11
<i>Vnitřní popis</i>	12
<i>Vyšetření stability obecného systému druhého řádu</i>	13

Tento text je do jisté míry experimentálním písčovištěm na odladění převodu textu prezentace vytvořené v \LaTeX ové třídě beamer do textu vysázeného pomocí tuftte-handout. Obsah je oproti prezentaci mírně rozšířen o poznámky. Bude se ještě v průběhu semestru měnit, kontrolujte si prosím čas sestavení v záhlaví tohoto souboru.

Zpětná Laplaceova transformace – dokončení

Obecné řešení diferenciální rovnice druhého řádu

Diferenciální rovnici

$$\frac{d^2}{dt^2}y(t) + 2a \frac{d}{dt}y(t) + (a^2 + b^2)y(t) = u(t) \quad (1)$$

s počátečními podmínkami ve tvaru

$$y(0) = c_1 \quad \text{a} \quad y'(0) = c_2,$$

řešíme pomocí Laplaceovy transformace.

Protože platí

$$\begin{aligned} \mathcal{L} \left\{ \frac{d}{dt}y(t) \right\} &= pY(p) - y(0) \\ \mathcal{L} \left\{ \frac{d^2}{dt^2}y(t) \right\} &= p^2Y(p) - py(0) - \frac{d}{dt}y(0) \end{aligned}$$

nalezneme Laplaceovou transformací diferenciální rovnice její algebraický tvar

$$p^2Y(p) - py(0) - y'(0) + 2a(pY(p) - y(0)) + (a^2 + b^2)Y(p) = U(p). \quad (2)$$

Vyřešíme předchozí rovnici vzhledem k obrazu výstupní veličiny $Y(p)$ a dostáváme

$$(p^2 + 2ap + (a^2 + b^2))Y(p) = U(p) + py(0) + y'(0) + 2ay(0)$$

nebo

$$Y(p) = \frac{U(p) + c_2 + (p + 2a)c_1}{(p + a + ib)(p + a - ib)}$$

Přenosová funkce

Přenosová funkce $H(p)$ je definována jako podíl obrazu výstupu k obrazu vstupu

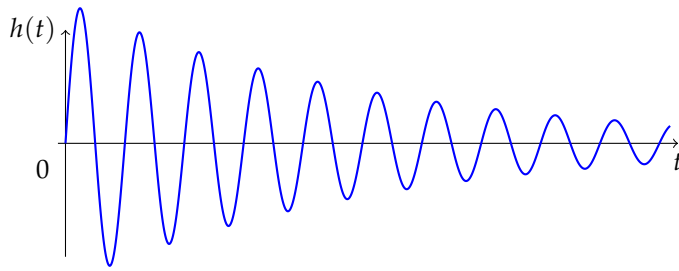
$$H(p) = \frac{Y(p)}{U(p)}$$

pro nulové počáteční podmínky a tedy

$$H(p) = \frac{Y(p)}{U(p)} = \frac{1}{(p + a + ib)(p + a - ib)}$$

Impulsní odezvu určíme jako zpětnou Laplaceovu transformaci přenosové funkce

$$\mathcal{L}^{-1} \{H(p)\} = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{(p + a)^2 + b^2} \right\} = \frac{1}{b} e^{-at} \sin bt$$

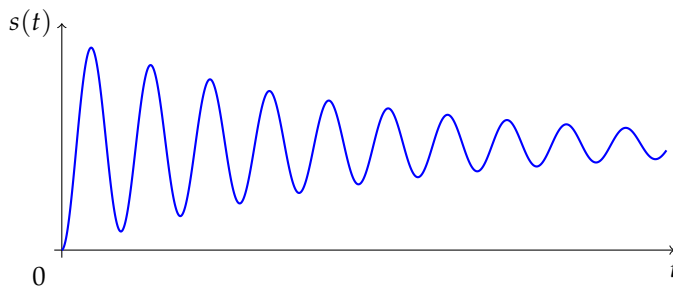


Obrázek 1: Impulsní odezva

Přechodovou odezvu $s(t)$ určíme zpětnou Laplaceovou transformací $s(t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ H(p) \frac{1}{p} \right\}$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1} \left(\frac{1}{p((p+a)^2 + b^2)} \right) &= \mathcal{L}^{-1} \left(\frac{1}{a^2 + b^2} \left[\frac{1}{p} - \frac{p+2a}{(p+a)^2 + b^2} \right] \right) = \\ &= \mathcal{L}^{-1} \left(\frac{1}{a^2 + b^2} \left[\frac{1}{p} - \frac{p+a}{(p+a)^2 + b^2} - \frac{a}{(p+a)^2 + b^2} \right] \right) \\ &= \frac{1}{a^2 + b^2} \left[1 - e^{-at} \cos bt - \frac{a}{b} e^{-at} \sin bt \right]. \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{a^2 + b^2} \left[\frac{1}{p} - \frac{p+2a}{(p+a)^2 + b^2} \right] \right\} &= \\ &= \frac{1}{a^2 + b^2} \left[1 - e^{-at} \cos bt - \frac{a}{b} e^{-at} \sin bt \right] \end{aligned}$$



Obrázek 2: Přechodová odezva

Zpětná Laplaceova transformace – příklady

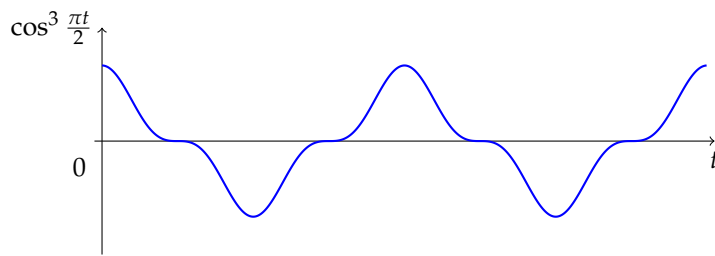
Příklad 1 (Jak rozložit $\cos^3 at$?). Ukažte, že

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{p(p^2 + 7a^2)}{(p^2 + a^2)(p^2 + 9a^2)} \right\} = \cos^3 at$$

Řešení:

Použijeme-li vztah

$$\cos 3at = 4 \cos^3 at - 3 \cos at,$$



Obrázek 3: Průběh funkce $\cos^3 at$ pro $a = \pi/2$

máme podle tabulek

$$\mathcal{L} \{4 \cos^3 at\} = \mathcal{L} \{\cos 3at + 3 \cos at\} = \frac{p}{p^2 + 9a^2} + \frac{3p}{p^2 + a^2},$$

který snadno upravíme do tvaru

$$\frac{p}{p^2 + 9a^2} + \frac{3p}{p^2 + a^2} = p \frac{3p^2 + 27a^2 + p^2 + a^2}{(p^2 + a^2)(p^2 + 9a^2)} = 4p \frac{p^2 + 7a^2}{(p^2 + a^2)(p^2 + 9a^2)}.$$

□

Příklad 2 (Přenos obecného systému druhého řádu). Nalezněte přenosovou funkci a impulsní odezvu systému, popsaného diferenciální rovnicí druhého řádu

$$\frac{d^2}{dt^2}y(t) + 2a \frac{d}{dt}y(t) + (a^2 + b^2)y(t) = u(t)$$

s počátečními podmínkami ve tvaru

$$y(0) = c_1 \quad a \quad \frac{d}{dt}y(0) = c_2.$$

Řešení:

Řešíme pomocí Laplaceovy transformace, nejprve převedeme na algebraický tvar

$$Y(p) = \frac{U(p) + c_2 + (p + 2a)c_1}{p^2 + 2ap + (a^2 + b^2)} = \frac{U(p)}{p^2 + 2ap + (a^2 + b^2)} + \frac{c_2 + (p + 2a)c_1}{p^2 + 2ap + (a^2 + b^2)}.$$

Přenosová funkce je definovaná jako

$$H(p) = \frac{Y(p)}{U(p)},$$

a tedy

$$H(p) = \frac{U(p)}{p^2 + 2ap + (a^2 + b^2)} + \frac{c_2 + (p + 2a)c_1}{p^2 + 2ap + (a^2 + b^2)}.$$

V dalším textu počítejme pouze s ustálenou složkou (odezvou na vstupní signál) a přechodovou složkou (odezvou na počáteční podmínky) zanedbejme – předpokládejme tedy nulové počáteční podmínky $c_1 = 0, c_2 = 0$. V takovém případě je přenosová funkce

$$H(p) = \frac{1}{(p^2 + 2ap + a^2) + b^2}. \quad (4)$$

Impulsní odezvu $h(t)$ spočteme jako inverzní Laplaceovu transformaci přenosové funkce $H(p)$,

$$h(t) = \mathcal{L}^{-1} \{H(p)\} = \frac{1}{b} \cdot e^{-at} \sin bt.$$

□

Přenosová funkce a vnitřní popis

Odvození

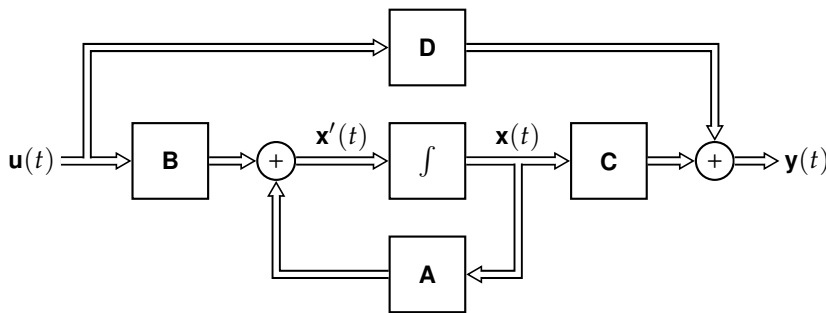
Přenosová funkce vnitřního popisu je určena opět jako

$$H(p) = \frac{Y(p)}{U(p)}$$

ovšem $Y(p)$ nyní závisí na stavových proměnných. Ukažme si nyní, jak lze relativně jednoduše odvodit vztahy pro Laplaceův obraz výstupu a pro přenos spojitého LTI systému popsaného stavovým popisem.

Mějme spojitý lineární časově invariantní systém, popsaný soustavou rovnic

$$\begin{aligned} \mathbf{x}'(t) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t), \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t). \end{aligned}$$



převědeme pomocí Laplaceovy na algebraické rovnice rovnice tvaru

$$\begin{aligned} pX(p) - x(0) &= \mathbf{A}X(p) + \mathbf{B}U(p) \\ Y(p) &= \mathbf{C}X(p) + \mathbf{D}U(p) \end{aligned}$$

Rovnici upravíme do tvaru

$$(p\mathbf{I} - \mathbf{A})X(p) = x(0) + \mathbf{B}U(p)$$

a vypočítáme

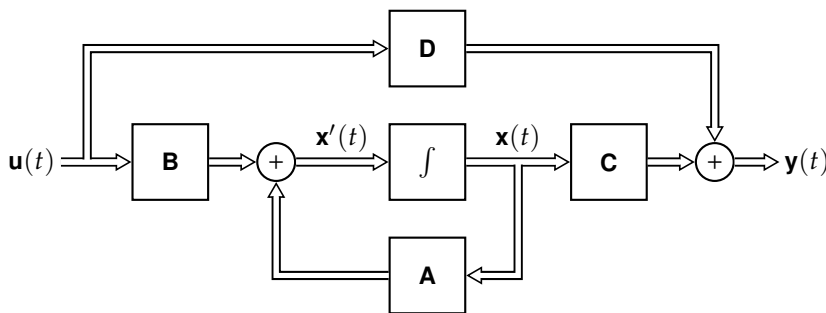
$$X(p) = (p\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} x(0) + (p\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{B}U(p).$$

Přenosová funkce je definována pro nulovou počáteční podmínku $x(0) = 0$. Po dosazení dostáváme

$$\begin{aligned} Y(p) &= \mathbf{C}(p\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{B} U(p) + \mathbf{D} U(p) \\ &= [\mathbf{C}(p\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{B} + \mathbf{D}] U(p) \end{aligned}$$

a přenosová funkce je

$$H(p) = \mathbf{C}(p\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{B} + \mathbf{D}$$



Obrázek 4: Spojitý stavový model

Pokud se jedná o ryzí systém, který nemá žádnou přímou vazbu ze vstupu na výstup a tedy $\mathbf{D} = \emptyset$, potom

$$H(p) = \mathbf{C}(p\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{B} = \mathbf{C} \frac{\text{adj}(p\mathbf{I} - \mathbf{A})}{\det(p\mathbf{I} - \mathbf{A})} \mathbf{B}$$

Inverzní matice

Pro matici 2×2

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

je inverzní matice

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix}$$

přičemž násobením snadno ověříme, že

$$\mathbf{A} \mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Algebraickým doplňkem k prvku $a_{\ell m}$ v matici $n \times n$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

je subdeterminant $\Delta_{\ell m}$, který vznikne vyškrtnutím ℓ -tého řádku a m -tého sloupce. Prvky inverzní matice jsou potom

$$\mathbf{A}_{m \ell}^{-1} = \frac{(-1)^{\ell+m} \Delta_{\ell m}}{\Delta},$$

kde $\det(\mathbf{A}) = \Delta$.

Příklad

Příklad 3 (Odpružení kola). Na obrázku 5 je model zavěšení kola vozidla a jeho odpružení s koeficienty tuhosti k_t , k_s a k_d .

Jestliže platí pohybové rovnice

$$\begin{aligned} Mx_3''(t) + k_t [x_3(t) - u(t)] \\ k_s [x_1(t) - x_3(t)] - k_d [x_1'(t) - x_3'(t)] &= 0 \\ mx_1''(t) + k_s [x_1(t) - x_3(t)] + k_d [x_1'(t) - x_3'(t)] &= 0 \end{aligned}$$

nalezněte stavový popis s použitím vektoru stavových proměnných $\mathbf{x} = [x_1(t), x_2(t), x_3(t), x_4(t)]^T$.

Nalezněte přenosovou funkci $H(p) = Y(p)/U(p)$, která charakterizuje chování vozidla v závislosti na povrchu vozovky.

Zvolíme

$$\begin{aligned} x_1(t) &= y(t), & x_1'(t) &= x_2(t) \\ x_3(t) & & x_3'(t) &= x_4(t) \end{aligned}$$

a dostáváme soustavu rovnic

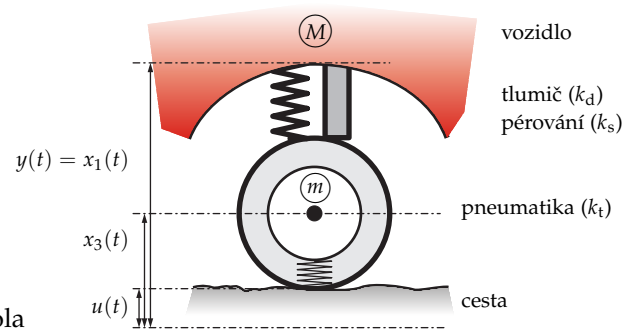
$$\begin{aligned} x_1'(t) &= x_2(t), \\ x_2'(t) &= -\frac{k_s}{m} [x_1(t) - x_3(t)] - \frac{k_d}{m} [x_1'(t) - x_3'(t)] \\ x_3'(t) &= x_4(t) \\ x_4'(t) &= -\frac{k_t}{M} [x_3(t) - u(t)] + \frac{k_s}{M} [x_1(t) - x_3(t)] + \frac{k_d}{M} [x_1'(t) - x_3'(t)] \end{aligned}$$

Rovnice převedeme na stavový popis

$$\begin{bmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \\ x_3'(t) \\ x_4'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{k_s}{m} & -\frac{k_d}{m} & \frac{k_s}{m} & \frac{k_d}{m} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{k_s}{M} & \frac{k_d}{M} & -\frac{k_s + k_t}{M} & -\frac{k_d}{M} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{k_t}{M} \end{bmatrix} u(t)$$

a

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \end{bmatrix}.$$



Obrázek 5: Odpružené zavěšení kola. Vibrace z vozovky, dané $u(t)$ pohlcuje jednak pneumatika, jednak odpružený závěs kola s tlumičem

Máme matice stavového popisu ve tvaru

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{k_s}{m} & -\frac{k_d}{m} & \frac{k_s}{m} & \frac{k_d}{m} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{k_s}{M} & \frac{k_d}{M} & -\frac{k_s + k_t}{M} & -\frac{k_d}{M} \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{k_t}{M} \end{bmatrix}$$

a

$$\mathbf{C} = [1 \ 0 \ 0 \ 0] \quad (5)$$

a platí $H(p) = \mathbf{C}(p\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}$, t.j.

$$H(p) = \frac{1}{\Delta} [1 \ 0 \ 0 \ 0] \begin{bmatrix} * & * & * & -\Delta_{41} \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{k_t}{M} \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{(k_d p + k_s) k_t}{(M p^2 + k_t)(m p^2 + k_d p + k_s) + m (k_d p + k_s) p^2}$$

kde * označuje prvky inverzní matice, které nemusíme pro přenosovou funkci počítat a Δ je determinant $\Delta = \det(p\mathbf{I} - \mathbf{A})$.

Vyšetřování stability spojitých systémů

Docela hezky je to popsáno v ¹, respektive v textech DynLABu ².
Důležité je si uvědomit (a hezky to vyplývá z rozkladu impulsních odezev na parciální zlomky, vedoucí na součet exponencií), že *pro jednotlivé třídy stability spojitých systémů je určující poloha reálné části pólů přenosové funkce.*

BIBO stabilita – bounded input bounded output

Odezva na omezený vstupní signál musí být vždy omezená – systém je BIBO stabilní.

Odezva systému je kombinací

- odezvy na vstupní signál
- odezvy na počáteční podmínky

Vnější popis

V případě přenosové funkce dané rovnicí (1) z odstavce jsou póly přenosové funkce komplexní čísla ve tvaru

$$p_1 = -a + bi,$$

$$p_2 = -a - bi.$$

Pro stabilitu systému jsou rozhodující hodnoty $\Re(p_1)$ a $\Re(p_2)$. Jedná se o póly komplexně sdružené (jiné ani u LTI systémů být nemohou), platí proto $\Re(p_1) = \Re(p_2) = -a$ a pro stabilitu systému je proto rozhodující pouze hodnota parametru a .

Stabilní systém

Stabilní systém splňuje následující kritérium na polohu pólů přenosové funkce:

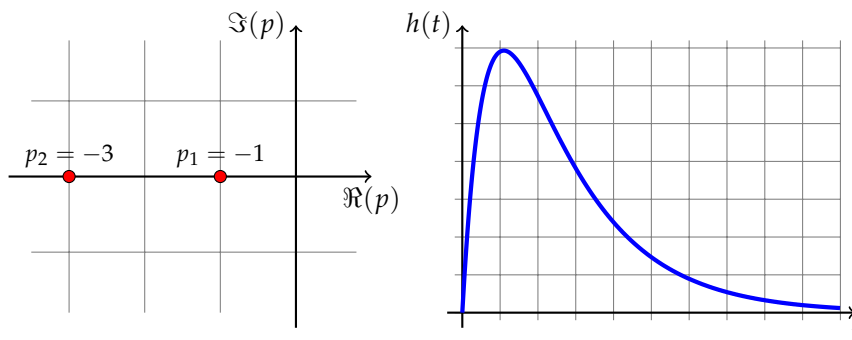
Věta 4 (Stabilní spojitý LTI systém). *Reálná část všech pólů přenosové funkce $H(p)$ stabilního systému leží v levé části p -roviny.*

Příklad 5 (Přenos spojitého LTI 2. řádu – jednoduché póly). Spojitý systém 2. řádu má přenosovou funkci

$$H(p) = \frac{1}{p^2 + 4p + 3} = \frac{1}{(p+1)(p+3)}.$$

Póly přenosové funkce $p_1 = -1$ a $p_2 = -3$ leží v levé části p -roviny a jedná se proto o stabilní systém. Připomeňme, že

$$h(t) = \mathcal{L}^{-1}\{H(p)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{k_1}{p+1} + \frac{k_2}{p+3}\right\} = \frac{1}{2}e^{-t} - \frac{1}{2}e^{-3t}.$$



Obrázek 6: Příklad 5 – poloha pólů přenosové funkce stabilního spojitého LTI systému a jeho impulsní odezva

Příklad 6 (Přenos spojitého LTI 2. řádu – komplexně sdružené póly). Spojitý systém 2. řádu má přenosovou funkci

$$H(p) = \frac{1}{p^2 + 4p + 20}. \quad (6)$$

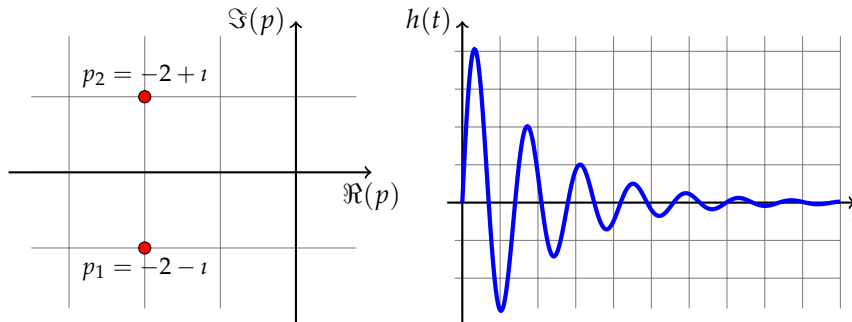
Tato přenosová funkce má dva komplexně sdružené póly s reálnou částí v levé části p -roviny. Jedná se tedy o stabilní systém. Připomeňme, že

$$h(t) = \mathcal{L}^{-1}\{H(p)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{p^2 + 4p + 20}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{4} \frac{4}{(p+2)^2 + 16}\right\} = \frac{1}{4}e^{-2t} \sin(4t).$$

Nestabilní systém

Nestabilní systém splňuje jedno z následujících kritérií:

Věta 7 (Nestabilní spojitý LTI systém). *Reálná část alespoň jednoho pólu přenosové funkce $H(p)$ nestabilního spojitého LTI systému leží v pravé části p -roviny, případně má takový systém násobný pól $H(p)$ na imaginární ose.*



Obrázek 7: Příklad 6 – poloha pólů přenosové funkce stabilního spojitého LTI systému s komplexně sdruženými póly a jeho impulsní odezva

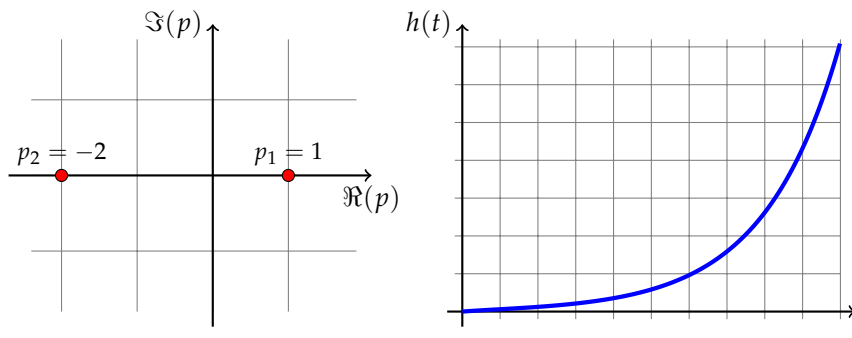
■ **přidat obrázek na násobný pól** ■ Druhá část věty plyne z toho, že násobné póly v nule jsou vždy obrazem násobení t, t^2, \dots , impulsní odezva pro $t \rightarrow \infty$ roste nade všechny meze a systém je nutně nestabilní.

Příklad 8 (Nestabilní spojité LTI 2. řádu – reálné póly). Spojitý LTI systém 2. řádu má přenosovou funkci

$$H(p) = \frac{1}{p^2 + p - 2} = \frac{1}{(p+2)(p-1)}.$$

Jeden z pólů přenosové funkce, $p_2 = 1$, leží v pravé části p -roviny a jedná se proto o nestabilní systém. Připomeňme, že

$$h(t) = \mathcal{L}^{-1}\{H(p)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{k_1}{p+2} + \frac{k_2}{p-1}\right\} = -\frac{1}{3}e^{-2t} + \frac{1}{3}e^t.$$



Obrázek 8: Příklad 8 – poloha pólů přenosové funkce netabilního spojitého LTI systému a jeho impulsní odezva

Příklad 9 (Nestabilní spojité LTI 2. řádu – násobný pól). Spojitý LTI systém 2. řádu má přenosovou funkci

$$H(p) = \frac{1}{p^3 + p^2} = \frac{1}{p^2(p+1)}.$$

Dvojnásobný pól přenosové funkce $p_1 = p_2 = 0$ leží na imaginární ose p -roviny a jedná se proto o nestabilní systém. Připomeňme, že

$$\begin{aligned} H(p) &= \frac{1}{p^2(p+1)} = \frac{1}{p} \cdot \frac{1}{p(p+1)} = \frac{1}{p} \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p+1} \right) = \frac{1}{p^2} - \frac{1}{p(p+1)} = \\ &= \frac{1}{p^2} - \frac{1}{p} + \frac{1}{p+1}. \end{aligned}$$

a tedy pro $t \geq 0$

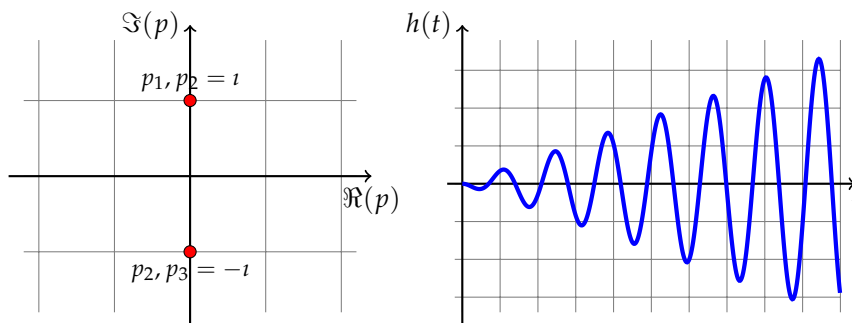
$$h(t) = \mathcal{L}^{-1}\{H(p)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{p^2} - \frac{1}{p} + \frac{1}{p+1}\right\} = t - \mathbf{1}(t) + e^{-t}.$$

Příklad 10 (Nestabilní spojité LTI 2. řádu – násobný pól). Spojitý LTI systém 2. řádu má přenosovou funkci

$$H(p) = \frac{1}{(p^2 + 1)^2}.$$

Dvojnásobný pól přenosové funkce $p_\infty = \pm i$ leží na imaginární ose p -roviny a jedná se proto o nestabilní systém. Připomeňme, že

$$h(t) = \mathcal{L}^{-1}\{H(p)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(p^2 + 1)^2}\right\} = t \sin(t).$$



Obrázek 9: Příklad 10 – poloha pólů přenosové funkce nestabilního spojitého LTI systému s dvojnásobným komplexně sdruženým ryze imaginárním pólem a jeho impulsní odezva

Mez stability

Systém na mezi stability splňuje následující kritérium:

Věta 11 (Spojitý LTI systém na mezi stability). *Reálná část pólů přenosové funkce $H(p)$ spojitého LTI systému na mezi stability je rovna nule a póly nejsou násobné.*

Připomínáme, že násobné póly v nule jsou vždy obrazem násobení t, t^2, \dots a systém je pak nestabilní.

Příklad 12 (Spojitý LTI 1. řádu na mezi stability – jednoduchý pól). Spojitý LTI systém 1. řádu má přenosovou funkci

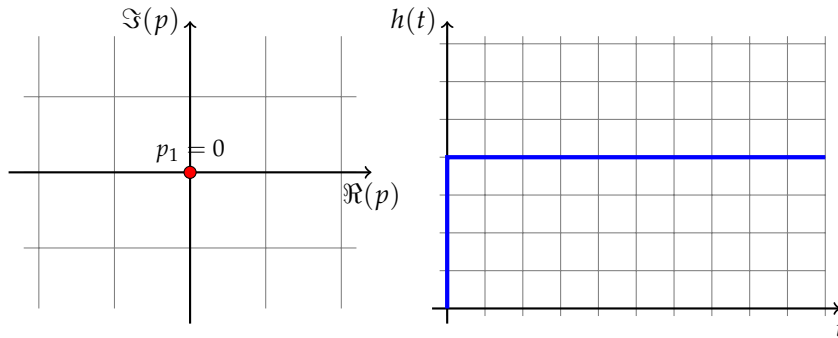
$$H(p) = \frac{1}{p}.$$

Příklad 13 (Spojitý LTI 2. řádu na mezi stability – komplexně sdružený pól). Spojitý LTI systém 2. řádu má přenosovou funkci

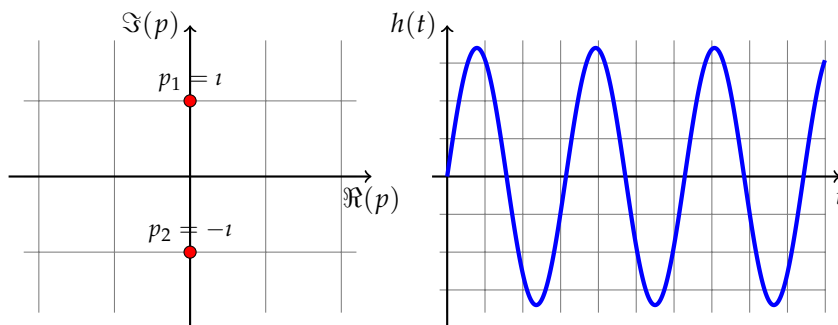
$$H(p) = \frac{1}{p^2 + 4}.$$

Připomeňme, že

$$h(t) = \mathcal{L}^{-1}\{H(p)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{2} \frac{2}{p^2 + 2^2}\right\} = \frac{1}{2} \sin(2t).$$



Obrázek 10: Příklad 12 – poloha pólu přenosové funkce spojitého systému 1. řádu na mezi stability a jeho impulsní odezva



Obrázek 11: Příklad ?? – poloha pólu přenosové funkce spojitého systému 2. řádu na mezi stability a jeho impulsní odezva

Stabilní systém

- $\lim_{t \rightarrow \infty} h(t) = 0$
- Všechny póly přenosové funkce $H(p)$ leží v levé polorovině komplexní roviny, $\Re(p_\infty) < 0$.

Nestabilní systém

- $\lim_{t \rightarrow \infty} h(t) = \infty$
- Alespoň jeden pól přenosové funkce $H(p)$ leží v pravé polorovině komplexní roviny, $\Re(p_\infty) > 0$ nebo alespoň jeden násobný pól leží na imaginární ose.

Mez stability

- $\lim_{t \rightarrow \infty} h(t) = c$ nebo neexistuje
- Alespoň jeden jednoduchý pól leží na imaginární ose a žádný pól neleží v pravé polorovině komplexní roviny. Případné násobné póly leží v levé polorovině.

Vnitřní popis

Stabilitu určujeme opět na základě polohy pólů přenosové funkce $H(p)$ v p -rovině. V případě vnitřního popisu je přenosová funkce definována vztahem

$$H(p) = \mathbf{C}(p\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D}.$$

Věta 14 (Stabilita vnitřního popisu). *Pro stabilitu systému je rozhodující matice \mathbf{A} , respektive determinant výrazu $p\mathbf{I} - \mathbf{A}$ (pokud si nejste jisti, proč tomu tak je, podívejte se na postup výpočtu inverzní matice), tedy*

$$\det(p\mathbf{I} - \mathbf{A}).$$

odpovídající jmenovateli přenosové funkce.

Další postup je identický s vyšetřováním stability vnějšího popisu.

Příklad 15 (Přenosová funkce vnitřního popisu spojitého LTI systému). Vnějšímu popisu spojitého LTI systému z Příkladu 6 odpovídá diferenciální rovnice 2. řádu

$$\frac{d^2}{dt^2}y(t) + 4 \frac{d}{dt}y(t) + 20y(t) = u(t).$$

Přenosová funkce (připomínáme nulové počáteční podmínky) je dána rovnicí (??), tedy

$$H(p) = \frac{1}{p^2 + 4p + 20}.$$

Pokud při převodu do vnitřního popisu zavedeme stavy

$$\begin{aligned} x_1(t) &= y(t), \\ x_2(t) &= \frac{d}{dt}y(t), \end{aligned}$$

bude matice vývoje stavu \mathbf{A} , výraz $(p\mathbf{I} - \mathbf{A})$ a jeho determinant rovny

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -20 & -4 \end{bmatrix}, \\ p\mathbf{I} - \mathbf{A} &= \begin{bmatrix} p & -1 \\ 20 & p + 4 \end{bmatrix}, \\ \det(p\mathbf{I} - \mathbf{A}) &= p^2 + 4p + 20. \end{aligned} \tag{7}$$

Polynom (7) je charakteristický polynom systému a jeho kořeny jsou póly přenosové funkce. Porovnáním s přenosovou funkcí vnějšího popisu, danou rovnicí (6), vidíme, že se obě přenosové funkce opravdu shodují.

Další rozhodování o stabilitě vnitřního popisu systému je shodné s kritérii stability vnějšího popisu.

Vyšetření stability obecného systému druhého řádu

Mějme LTI systém popsany rovnicí

$$\frac{d}{dt}y(t) + my'(t) + n \cdot y(t) = u(t) \tag{8}$$

kde $u(t) = \mathbf{1}(t)$ a s nulovými počátečními podmínkami, $y'(0) = y(0) = 0$. Zkusme zjistit, pro jaká m a n bude systém stabilní, nestabilní a na mezi stability.

Přenosová funkce systému popsaného rovnicí (8) bude

$$H(p) = \frac{1}{p^2 + mp + n}. \quad (9)$$

Zajímá nás poloha pólů přenosové funkce. Polohu můžeme vyšetřit buď použitím rozkladu

$$p^2 + mp + n = (p - p_{\infty 1})(p - p_{\infty 2}), \quad (10)$$

kde platí

$$\begin{aligned} p_{\infty 1} p_{\infty 2} &= n \\ p_{\infty 1} + p_{\infty 2} &= -m \end{aligned}$$

a nebo použitím klasického vzorce pro řešení kvadratické rovnice,

$$p_{\infty 1,2} = \frac{-m \pm \sqrt{m^2 - 4n}}{2}. \quad (11)$$

Projděme si postup s využitím tohoto vzorce, postup řešení podle zápisu (10) je podobný, podle mého názoru však kostrbatější.

Pro vyhodnocení stability systému (8) nás zajímá, jestli reálné části pólů přenosové funkce (9) jsou všechny záporné (pak je systém stabilní) nebo má-li alespoň jeden pól reálnou část kladnou (pak půjde o systém nestabilní). Řešení se nám rozpadá na tři rozdílné případy podle toho, jaké hodnoty bude nabývat výraz diskriminantu ve vzorci (11):

$m^2 < 4n$: V tomto případě dá odmocnina imaginární složku dvou komplexně sdružených kořenů a pro reálnou část platí

$$\Re(p_{\infty 1,2}) = -\frac{m}{2}.$$

Protože $4n > m^2$, je nutně $n > 0$. Zvolíme-li $m \in (0, 2\sqrt{n})$, dostáváme stabilní systém, pro $m \in (-2\sqrt{n}, 0)$ dostáváme systém nestabilní. Pro $m = 0$ půjde o systém na mezi stability, jehož přenosová funkce má dva komplexně sdružené imaginární póly.

$m^2 = 4n$: Výraz pod odmocninou je roven nule, platí

$$p_{\infty 1,2} = -\frac{m}{2}$$

a pokud $n \neq 0$, pro $m = -2\sqrt{n}$ dostáváme stabilní systém a pro $m = 2\sqrt{n}$ systém nestabilní. Pro $n = 0$ je $m = 0$ a přenosová funkce má dvojnásobný pól v nule – systém je v tomto případě nestabilní, jeho impulsní odezva je $h(t) = t$.

$m^2 > 4n$: Zde je situace komplikovanější, póly leží oba na reálné ose. Aby systém byl stabilní, musí platit

$$p_{\infty 1,2} < 0$$

a tedy

$$-m \pm \sqrt{m^2 - 4n} < 0$$

(jenom pro pořádek: celý výraz na pravé straně (11) jsme vynásobili dvěma, což na nerovnosti nic nezmění). Vzhledem k tomu, že

$$-m + \sqrt{m^2 - 4n} > -m - \sqrt{m^2 - 4n},$$

stačí, když pro stabilní systém splníme podmínku

$$-m + \sqrt{m^2 - 4n} < 0, \quad (12)$$

a podmínka

$$-m - \sqrt{m^2 - 4n} < 0,$$

bude splněna automaticky.

Podmínka (12) bude splněna pouze v případě, kdy $m > 0$ a výraz pod odmocninou bude menší, než m^2 , což je splněno pro $n \in (0, \frac{1}{4}m^2)$.

Závěr: Systém popsaný rovnicí (8) bude stabilní, pokud $m > 0 \wedge n > 0$. Na mezi stability se bude systém nalézat, pokud $m = 0 \wedge n > 0$. Pro ostatní volby m a n půjde o systém nestabilní.

Reference

SCHMID, Christian. *Course on Dynamics of multidisciplinary and controlled Systems* [online]. 2005 [cit. 2013-04-24]. Dostupné z: <http://www.atp.ruhr-uni-bochum.de/rt1/syscontrol/main.html>

DynLAB – Course on Modeling and Control of Multidisciplinary Systems [online]. 2008 [cit. 2013-04-24]. Dostupné z: <http://virtual.cvut.cz/dynlabcourse/>