$\mathcal{Z}$-transformace

Modelování systémů a procesů (11MSP)

Bohumil Kovář, Jan Přikryl, Miroslav Vlček

8. přednáška 11MSP

čtvrtek 10. dubna 2014

verze: 2014-04-10 15:03

Obsah

Tento text je do jisté míry experimentálním pískovištěm na odladění převodu textu prezentace vytvořené v LaTeXové třídě `beamer` do textu vysázeného pomocí `tufte-handout`. Obsah je oproti prezentaci mírně rozšířen o poznámky. Bude se ještě v průběhu semestru měnit, kontrolujte si prosím čas sestavení v záhlaví tohoto souboru.

Matematické nářadí

Motivace

Chceme analyzovat chování nějakého systému, případně navrhnout systém, který má přesně specifikované parametry.

Opíráme se o

- **fyzikální model**, založený na fyzikálních zákonech
- **black-box model**, založený na pozorování, identifikaci

Analýza chování reálného systému je složitý proces (model představuje jedna či více diferenciálních či diferenčních rovnic vyššího řádu) $\Rightarrow$ numerické řešení.

Jak analýzu *zjednodušit*?

Použití

Analýza či návrh systému v **časové oblasti** (vstupy a výstupy jsou funkcí času) jsou velmi pracné.

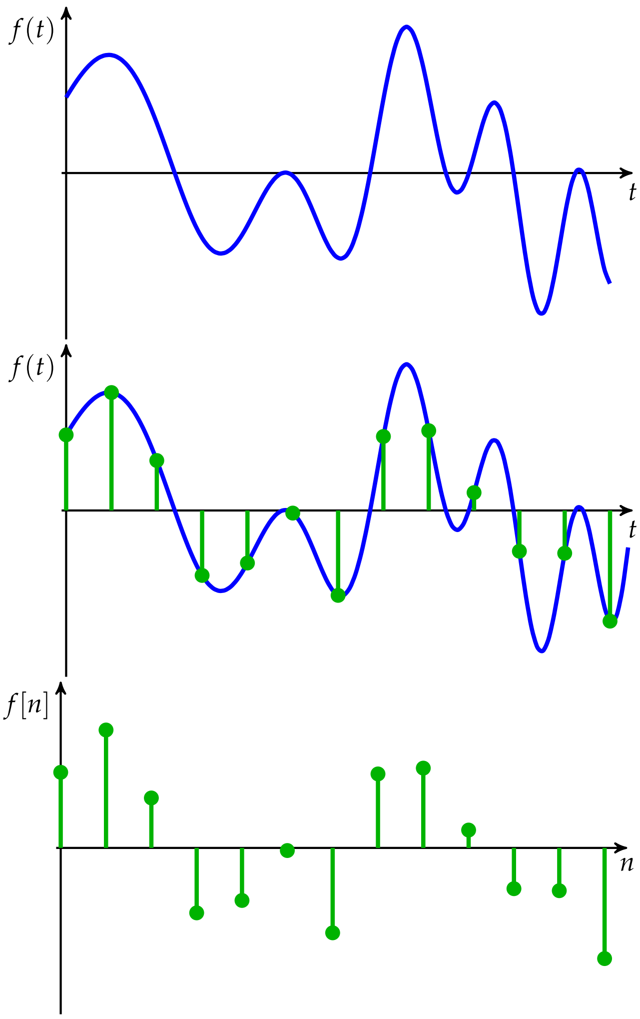
Převod do **frekvenční oblasti** (vstupy a výstupy jsou funkcí komplexní proměnné nazývané *úhlová frekvence*) nám

- poskytuje *fundamentálně odlišný nástroj* k pochopení funkce systému,
- často *drasticky sníží složitost* matematických výpočtů potřebných pro analýzu systému.

$\mathcal{Z}$*-transformace*

O původu diskrétní transformace

Diskrétní systém vznikne ze spojitého systému *vzorkováním* s periodou vzorkování T. Příklad je uveden na Obrázku 1.



Obrázek 1: Vzorkování spojité funkce s periodou $T = 1\text{s}$

Z hlediska teorie signálu jde o tak zvanou **analogovou sekvenci**, nikoliv o posloupnost či sekvenci digitální (ta nabývá diskrétních funkčních hodnot, jejichž počet je dán například počtem bitů A/D převodníku).

■ **Zde ještě zopakovat Diracovo $\delta()$ a Kroneckerovo $\delta[]$. A zopakovat $\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \cdot \delta(t - nT - \tau)\, \mathrm{d}\tau$** ■

Vztah mezi spojitou funkcí $f(t)$ a ideálně vzorkovanou funkcí $f^*(t)$ lze formálně zapsat jako

$$\begin{aligned} f^*(t) &= \sum_{n=0}^{\infty} f(t) * \delta(t - nT) = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \cdot \delta(t - nT - \tau)\, \mathrm{d}\tau \\ &= f(nT)\delta(t - nT) \equiv \{f_n\}_{n=0}^{\infty}, \end{aligned}$$

kde T je vzorkovací perioda signálu. Funkce f^* nabývá hodnot $f(nT)$ pro $t = nT$ a nulových hodnot pro ostatní hodnoty t.

Ze spojité funkce $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ se tak stane **posloupnost** reálných hodnot $f_n : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$.

U této posloupnosti je zvykem neuvádět vzorkovací periodu signálu. Značíme ji $f[n]$ a platí

$$f[n] = \{f(nT)\}_{n=0}^{\infty}.$$

Jestliže budeme hledat Laplaceovu transformaci funkce $f^*(t)$, dostaneme

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{f^*(t)\} &= \int_0^{\infty} f^*(t)\, e^{-pt} dt \\ &= \int_0^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} f(t)\, \delta(t - nT)\, e^{-pt} dt \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{\infty} \delta(t - nT)\, f(t)\, e^{-pt} dt \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} f(nT) e^{-pnT} \equiv \sum_{n=0}^{\infty} f[n] z^{-n}, \end{aligned}$$

kde jsme zavedli komplexní proměnnou $z = e^{pT}$ a $f[n]$ označuje n-tý vzorek příslušné spojité funkce.

Definice

Definice 1 (Jednostranná $\mathcal{Z}$-transformace)**.** Jednostranná $\mathcal{Z}$-transformace posloupnosti $f[n]$ je definována nekonečnou řadou

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f[n] z^{-n}, \tag{1}$$

kterou často označujeme $F(z) = \mathcal{Z}\{f[n]\}$.

Zpětná $\mathcal{Z}$-transformace má tvar integrálu podél uzavřené křivky $\mathcal{C}$, jež obsahuje všechny singulární body funkce $F(z)$. Pro všechna

$n = 0, 1, \ldots, \infty$ platí

$$f[n] = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{\mathcal{C}} F(z) z^{n-1} \mathrm{d}z \equiv \mathcal{Z}^{-1} \left\{ F(z) \right\}.$$

Vlastnosti

Věta 2 (Linearita)**.** *$\mathcal{Z}$-transformace je lineární:*

$$\mathcal{Z} \left\{ \sum_k a_k f_k[n] \right\} = \sum_k a_k \mathcal{Z} \left\{ f_k[n] \right\}$$
$$\mathcal{Z}^{-1} \left\{ \sum_m b_m F_m(z) \right\} = \sum_m b_m \mathcal{Z}^{-1} \left\{ F_m(z) \right\}$$

Důkaz. Pomocí definičního vztahu $\mathcal{Z}$-transformace (1) dostaneme

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \left(a_1 f_1[n] + a_2 f_2[n] \right) z^{-n} &= \sum_{n=0}^{\infty} a_1 f_1[n] z^{-n} + \sum_{n=0}^{\infty} a_2 f_2[n] z^{-n} \\ &= a_1 \sum_{n=0}^{\infty} f_1[n] z^{-n} + a_2 \sum_{n=0}^{\infty} f_2[n] z^{-n} \\ &= a_1 \mathcal{Z} \left\{ f_1[n] \right\} + a_2 \mathcal{Z} \left\{ f_2[n] \right\} = a_1 F_1(z) + a_2 F_2(z). \end{aligned}$$

□

Věta 3 (O změně měřítka)**.** *Pro $F(z) = \mathcal{Z}\left\{ f[n] \right\}$ je*

$$a^{-n} f[n] = \mathcal{Z}^{-1} \left\{ F(az) \right\}$$
$$F(a^{-1} z) = \mathcal{Z} \left\{ a^n f[n] \right\}$$

Důkaz. Z definičního vztahu $\mathcal{Z}$-transformace (1) a s využitím substituce $az = \zeta$ máme

$$\sum_{n=0}^{\infty} a^{-n} f[n] z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} f[n] a^{-n} z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} f[n] (az)^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} f[n] \zeta^{-n} = F(\zeta) = F(az)$$

□

Když tedy v rovině diskrétního času měníme měřítko k menším hodnotám (násobíme a^n), v rovině kmitočtů se nám měřítko roztahuje. Opět platí Heisenbergův princip neurčitosti časového a kmitočtového rozlišení.

Věty o posunutí jsou velmi důležité pro transformaci diferenčních rovnic na algebraické rovnice v $\mathcal{Z}$-rovině, podobně, jako je tomu u spojitých systémů s větami o obrazu derivací v Laplaceově transformaci.

$$\mathcal{Z}\left\{f[n-m]\right\} = z^{-m}\mathcal{Z}\left\{f[n]\right\} = z^{-m}F(z)\ |_{\forall n-m<0:\, f[n-m]=0}$$
$$\mathcal{Z}\left\{f[n+m]\right\} = z^{m}\left[\mathcal{Z}\left\{f[n]\right\} - \sum_{\nu=0}^{m-1} f[\nu]z^{-\nu}\right]$$
$$= z^{m}\left[F(z) - \sum_{\nu=0}^{m-1} f[\nu]z^{-\nu}\right]$$

Důkaz. Napřed naznačíme důkaz s posunutím doprava o jeden vzorek,

$$\mathcal{Z}\left\{f[n-1]\right\} = \sum_{n=0}^{\infty} f[n-1]z^{-n} = \sum_{m=-1}^{\infty} f[m]z^{-(m+1)}|_{n-1=m} = z^{-1}\sum_{m=0}^{\infty} f[m]z^{-m} + f[-1]z^{0} = z^{-1}F(z)$$

díky tomu, že používáme jednostranou $\mathcal{Z}$-transformaci, musí být $f[-1] = 0$. Každé posunutí o jeden krok dopředu způsobí, že původní systém bude zpožděný o jeden krok, což se projekví násobením původního obrazu operátorem z^{-1}.

Nenulové počáteční podmínky jsou přípustné pouze u posunutí doleva

$$\sum_{n=0}^{\infty} f[n+1]z^{-n} = \sum_{m=1}^{\infty} f[m]z^{-(m-1)}|_{n+1=m} = \sum_{m=0}^{\infty} f[m]z^{-(m-1)} - f[0]z^{0} = z\sum_{m=0}^{\infty} f[m]z^{-m} - f[0]z^{0} = z\,F(z) - f[0]$$

kde se počáteční podmínka $f[0]$ objeví vzhledem k nutnosti převést sčítání v původní sumě od $m = 1$ na sčítání od $m = 0$, neboť definiční vzorec pro $\mathcal{Z}$-transformaci sčítá od nuly. □

Příklad 4 (Diferenční rovnice). Vyjádřete $Y(z)$ z diferenční rovnice

$$y[n+2] - 2y[n+1] + y[n] = 0, \qquad y[0] = -1, y[1] = 1.$$

Lösung 5. ***příklad na Z jednoduché diferenční rovnice***

Věta 6 (Transformace částečného součtu)**.** *Částečnou sumu posloupnosti $f[n]$ lze transformovat jako*

$$\mathcal{Z}\left\{\sum_{\nu=0}^{n} f[\nu]\right\} = \frac{z}{z-1}F(z)$$
$$\mathcal{Z}\left\{\sum_{\nu=0}^{n-1} f[\nu]\right\} = \frac{1}{z-1}F(z)$$

Důkaz. Nejjednodušeji to lze přes konvoluci **ta ale teprve přijde**

$$\mathcal{Z}\left\{\sum_{m=0}^{n} f[m]\right\} = \mathcal{Z}\left\{\sum_{m=0}^{\infty} f[m]\mathbf{1}[n-m]\right\} = \mathcal{Z}\left\{f[n]\right\}\mathcal{Z}\left\{\mathbf{1}[n]\right\}$$
$$= F(z)\frac{z}{z-1}$$

□

Pro $m = 1, 2, \dots, \infty$ a diference m-tého řádu

$$\begin{aligned}
\Delta^0 f[n] &= f[n],\\
\Delta^1 f[n] &= f[n+1] - f[n],\\
\Delta^2 f[n] &= \Delta^1\left[\Delta^1 f[n]\right] = f[n+2] - 2f[n+1] + f[n]\\
\Delta^m f[n] &= \Delta^1\left[\Delta^{m-1} f[n]\right]
\end{aligned}$$

platí tato věta o transformaci diferencí:

$$\begin{aligned}
\mathcal{Z}\left\{\Delta^1 f[n]\right\} &= (z-1)F(z) - f[0]z\\
\mathcal{Z}\left\{\Delta^2 f[n]\right\} &= (z-1)^2 F(z) - f[0]\,z(z-1) + \Delta^1 f[0]z
\end{aligned}$$

Podobně, jako ve spojitém případě, i pro $\mathcal{Z}$-transformaci platí tato věta o transformaci konvoluční sumy:

Věta 7 (O konvoluci)**.** *Je-li $F(z) = \mathcal{Z}\{f[n]\}$ a $G(z) = \mathcal{Z}\{g[n]\}$, pak pro diskrétní kovoluci obou posloupností platí*

$$\mathcal{Z}\{f[n] * g[n]\} = \mathcal{Z}\left\{\sum_{m=0}^{\infty} f[n-m]\cdot g[m]\right\} = F(z)\cdot G(z)$$

Důkaz. Vzorec pro konvoluci lze dokázat z definice $f[n-m]$ a $F(z)$ následovně:

$$y[n] = \sum_{m=0}^{n} h[n-m]\cdot u[m] = \sum_{m=0}^{n} h[m]\cdot u[n-m]$$

a odtud

$$Y(z) = \sum_{n=0}^{\infty} y[n]z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{m=0}^{\infty} h[n-m]\cdot u[m]\right)z^{-n}$$

po prohození sumace přes m a n

$$\begin{aligned}
Y(z) &= \sum_{m=0}^{\infty} u[m]\left(\sum_{n=0}^{\infty} h[n-m]z^{-n}\right) = \sum_{m=0}^{\infty} u[m]\left(H(z)\cdot z^{-m}\right)\\
&= H(z)\sum_{m=0}^{\infty} u[m]z^{-m} = H(z)\cdot U(z)
\end{aligned}$$

□

Pro ilustraci diskrétní konvoluce lze použít příklad násobení dvou polynomů: Pokud násobím dva polynomy $p(x)$ a $q(x)$, a $p[n]$ resp. $q[n]$ jsou posloupnosti koeficientů těchto polynomů, pak pro koeficienty polynomu $r(x) = p(x)q(x)$ platí, že $r[n] = p[n] * q[n]$.

Věta 8 (O derivaci obrazu)**.** *Jednoduchá derivace obrazu $F(z)$ se na vzoru $f[n]$ projeví jako násobení proměnnou n:*

$$\mathcal{Z}\{nf[n]\} = -z\frac{dF(z)}{dz}$$

Důkaz. Máme

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}F(z) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\sum_{n=0}^{\infty} f[n]z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} f[n]\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}z^{-n} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} f[n] - nz^{-(n+1)} = -\sum_{n=0}^{\infty} n\, f[n]z^{-n}z^{-1} \\ &= -\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty} n\, f[n]z^{-n} = -\frac{1}{z}\mathcal{Z}\left\{nf[n]\right\}.\end{aligned}$$

Je tedy

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}F(z) = -\frac{1}{z}\mathcal{Z}\left\{nf[n]\right\}$$

respektive

$$-z\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}F(z) = \mathcal{Z}\left\{nf[n]\right\}.$$

□

Tabulka obrazů

Toto je pouze základní tabulka obrazů $\mathcal{Z}$-transformace, detailnější tabulka je vystavena na webových stránkách předmětu.

$f[n] = \mathcal{Z}^{-1}\left\{F(z)\right\}$	$F(z) = \mathcal{Z}\left\{f[n]\right\}$
$\delta[n]$	1
$\mathbf{1}[n]$	$\dfrac{1}{1-z^{-1}}$
a^n	$\dfrac{1}{1-a\cdot z^{-1}}$
n	$\dfrac{z^{-1}}{(1-z^{-1})^2}$
$n\cdot a^{n-1}$	$\dfrac{z^{-1}}{(1-az^{-1})^2}$

Tabulka 1: Tabulka základních vzorů a obrazů $\mathcal{Z}$-transformace

Ukažme si nyní na příkladech, jak vznikly $\mathcal{Z}$-páry vzor-obraz, uvedené v tabulce 1.

Příklad 9 (Odvození $\mathcal{Z}\left\{\delta[n]\right\}$). Pro Kroneckerovo $\delta[n]$ platí

$$\delta[n] = \begin{cases}1 & n = 0,\\ 0 & n \neq 0\end{cases}$$

a proto

$$\mathcal{Z}\left\{\delta[n]\right\} = \sum_{n=0}^{\infty}\delta[n]z^{-n} = 1\cdot z^{-0} = 1.$$

Pro další vztahy si musíme připomenout, jak se počítá součet nekonečné geometrické řady. Ukažme si princip na jednoduchém příkladě:

Příklad 10 (Částečný součet geometrické řady). Chceme odvodit vzorek pro částečný součet prvních N členů geometrické řady s kvocientem q. Postupujeme tak, že od sebe odečteme částečný součet S_N a jeho q-násobek, qS_N:

$$S_N = 1 + q + q^2 + q^3 + \cdots + q^{N-1} + q^N$$
$$qS_N = q + q^2 + q^3 + q^4 + \cdots + q^N + q^{N+1} S_N - qS_N \quad = 1 - q^{N+1}$$

a z toho

$$S_N = \frac{1 - q^{N+1}}{1 - q} = \frac{q^{N+1} - 1}{q - 1}.$$

Analogicky pro součet nekonečné řady je

$$S_\infty = \lim_{N\to\infty} S_N = \lim_{N\to\infty} \frac{1 - q^{N+1}}{1 - q} = \frac{1}{1 - q},$$

Příklad 11 (Odvození $\mathcal{Z}\left\{\mathbf{1}[n]\right\}$ a $\mathcal{Z}\left\{a^n\right\}$). Obraz jednotkového skoku $\mathbf{1}[n]$ určíme nyní z definice jako

$$\mathcal{Z}\left\{\mathbf{1}[n]\right\} = \sum_{n=0}^{\infty} z^{-n} = \frac{1}{1 - z^{-1}} = \frac{z}{z - 1}.$$

a pro obraz diskrétní exponenciely máme analogicky

$$\mathcal{Z}\left\{a^n\right\} = \sum_{n=0}^{\infty} a^n z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{a}\right)^{-n} = \frac{1}{1 - az^{-1}} = \frac{z}{z - a}.$$

Příklad 12 (Odvození $\mathcal{Z}\left\{n\right\}$). Pro posloupnost $\{n\}_0^\infty$ dostaneme s využitím věty o derivaci

$$\mathcal{Z}\left\{n\right\} = \mathcal{Z}\left\{n\mathbf{1}[n]\right\} = -z\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\frac{1}{1 - z^{-1}}. \tag{2}$$

Vzpomeneme si, že pokud $f(z) = g(z)/h(z)$, tak

$$f'(z) = \frac{g'(z)h(z) - g(z)h'(z)}{h(z)^2}$$

a že tedy

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\frac{1}{1 - z^{-1}} = \frac{0 \cdot (1 - z^{-1}) - 1 \cdot (0 + z^{-2})}{(1 - z^{-1})^2} = \frac{-z^{-2}}{(1 - z^{-1})^2}.$$

Po dosazení zpět do (2) dostaneme

$$\mathcal{Z}\left\{n\right\} = \mathcal{Z}\left\{n\mathbf{1}[n]\right\} = -z\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\frac{1}{1 - z^{-1}} = \frac{z^{-1}}{(1 - z^{-1})^2}.$$

Příklad 13 (Odvození $\mathcal{Z}\left\{na^{n-1}\right\}$). Pro posloupnost $\{na^{n-1}\}_0^\infty$ dostaneme opět s využitím věty o derivaci

$$\begin{aligned}
\mathcal{Z}\left\{na^{n-1}\right\} &= \frac{1}{a}\mathcal{Z}\left\{na^n\right\} = -\frac{z}{a}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\frac{1}{1 - az^{-1}} \\
&= -za^{-1}\frac{0 \cdot (1 - az^{-1}) - 1 \cdot (0 + az^{-2})}{(1 - az^{-1})^2} = -za^{-1}\frac{-az^{-2}}{(1 - az^{-1})^2} \\
&= \frac{z^{-1}}{(1 - az^{-1})^2}.
\end{aligned}$$