Inverzní $\mathcal{Z}$-transformace

Modelování systémů a procesů (11MSP)

Bohumil Kovář, Jan Přikryl, Miroslav Vlček

9. přednáška 11MSP

čtvrtek 17. dubna 2014

verze: 2014-04-16 22:33

Obsah

Tento text je do jisté míry experimentálním pískovištěm na odladění převodu textu prezentace vytvořené v LaTeXové třídě `beamer` do textu vysázeného pomocí `tufte-handout`. Obsah je oproti prezentaci mírně rozšířen o poznámky. Bude se ještě v průběhu semestru měnit, kontrolujte si prosím čas sestavení v záhlaví tohoto souboru.

Inverzní $\mathcal{Z}$-transformace

Obdobně jako u Laplaceovy transformace, i u $\mathcal{Z}$-transformace je na první pohled složitým úkolem nalézt patřičný vzor $x[n]$, máme-li zadán obecný $\mathcal{Z}$-obraz $X(z)$. Připomeňme si, že inverzní $\mathcal{Z}$-transfrmaci označujeme symbolem $\mathcal{Z}^{-1}$.

Inverzní $\mathcal{Z}$-transformace $X(z)$ nám určí posloupnost $x[n]$, a jakkoliv je tato posloupnost jednoznačně dána, neznamená to, že v případě převodu na spojitý signál $x(t)$ bude tento převod jednoznačný. Inverzní transformace $X(z)$ nám umožní určit hodnoty $x(t)$ pouze ve vybraných diskrétních časových okamžicích $t = 0, T, 2T, \cdots = nT$ a neříká nic o hodnotách mezi vzorky. Jak je vidět na obrázku **??**, jednomu $x[k]$ může odpovídat více průběhů $x(t)$.

Tam, kde nelze použít přímou zpětnou transformaci s použitím tabulek $\mathcal{Z}$-transformace, lze použít několik metod:

1. metodu přímého dělení,
2. výpočetní metodu,
3. metodu rozkladu na parciální zlomky, a případně
4. metodu výpočtu pomocí integrálu inverzní transformace.

■ **doplnit informace o výpočtu přímým dělením, výpočetní metodě (Matlab), výpočtu integrálu** ■

Metoda **přímého dělení** spočívá v rozkladu původní racionální lomené funkce na mocninnou řadu pomocí polynomiálního dělení.

Metody výpočtu

Zpětná $\mathcal{Z}$-transformace má tvar integrálu

$$y[n] = \frac{1}{2\pi i} \oint_C Y(z) z^{n-1} dz \equiv \mathcal{Z}^{-1}\{Y(z)\}$$

podél uzavřené křivky C, která obsahuje všechny singulární body racionální lomené funkce

$$Y(z) = \frac{Q(z)}{N(z)}.$$

Nuly a póly v $\mathcal{Z}$-rovině

V inženýrských aplikacích nabývají obrazy transformovaných veličin většinou formy racionální lomené funkce, tedy

$$X(z) = \frac{b_m z^m + b_{m-1} z^{m-1} + \cdots + b_1 z + b_0}{a_n z^n + b_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0}$$

kde $m \leq n$.

O racionální lomené funkci

$$\frac{Q(z)}{N(z)}$$

říkáme, že má nulové body $z_{0\nu}$, jestliže

$$Q(z_{0\nu}) = 0,$$

a že má póly $z_{\infty\mu}$, jestliže

$$N(z_{\infty\mu}) = 0.$$

Pokud má funkce $\frac{Q(z)}{N(z)}$ jednoduché póly, potom

$$N(z) = \prod_{\mu=1}^{N} (1 - z_{\infty\mu} z^{-1}) = (1 - z_{\infty 1} z^{-1})(1 - z_{\infty 2} z^{-1}) \ldots (1 - z_{\infty N} z^{-1})$$

a platí

$$\begin{aligned}\frac{Q(z)}{N(z)} &= \sum_{\mu=1}^{N} \frac{k_\mu}{1 - z_{\infty\mu} z^{-1}} \\ &= \frac{k_1}{1 - z_{\infty 1} z^{-1}} + \frac{k_2}{1 - z_{\infty 2} z^{-1}} + \cdots + \frac{k_N}{1 - z_{\infty N} z^{-1}}\end{aligned}$$

kde

$$
\begin{aligned}
k_\mu &= \lim_{z \to z_{\infty\mu}} (1 - z_{\infty\mu} z^{-1}) \frac{Q(z)}{N(z)} \\
&= Q(z_{\infty\mu}) \lim_{z \to z_{\infty\mu}} (1 - z_{\infty\mu} z^{-1}) \frac{1}{N(z)} \\
&= Q(z_{\infty\mu}) \lim_{z \to z_{\infty\mu}} \frac{1}{\frac{N(z)}{1 - z_{\infty\mu} z^{-1}}} \\
&= Q(z_{\infty\mu}) \frac{1}{N_\mu(z_{\infty\mu})}
\end{aligned}
$$

Pro jednoduchost budeme dále psát $z_{\infty\mu} \to z_\mu$. Protože pro $|az^{-1}| < 1$ platí

$$
\mathcal{Z}^{-1}\left\{\frac{1}{1 - az^{-1}}\right\} = \mathcal{Z}^{-1}\left\{\sum_{n=0}^{\infty} a^n z^{-n}\right\} = a^n
$$

dostaneme

$$
\mathcal{Z}^{-1}\left\{\frac{Q(z)}{N(z)}\right\} = \mathcal{Z}^{-1}\left\{\sum_{\mu=1}^{N} \frac{k_\mu}{1 - z_\mu z^{-1}}\right\} = \sum_{\mu=1}^{N} k_\mu z_\mu^n.
$$

Příklady použití

Uveďme si nyní pár příkladů použití $\mathcal{Z}$-trasformace pro řešení příkladů.

Příklad 1 (Nabídka-poptávka). Rovnice nabídky – nabídka dnes závisí na včerejší ceně a to tak, že nabídka stoupá s rostoucí cenou. Pro $\mathcal{C} > 0$ platí

$$
n[k] = \mathcal{C}c[k-1] + \mathcal{A}x[k].
$$

Rovnice poptávky – poptávka dnes závisí na dnešní ceně a to tak, že poptávka klesá s rostoucí cenou. Pro $\mathcal{D} > 0$ platí

$$
p[k] = -\mathcal{D}c[k] + \mathcal{B}x[k].
$$

Rovnost nabídky a poptávky

$$
n[k] = p[k]
$$

pak vede na diferenční rovnici prvního řádu

$$
c[k] + \frac{\mathcal{C}}{\mathcal{D}} c[k-1] = \frac{\mathcal{B} - \mathcal{A}}{\mathcal{D}} x[k].
$$

Tuto diferenční rovnici jsme iterativně řešili již na první přednášce. Ukažme si nyní, jak lze k řešení dospět pomocí $\mathcal{Z}$-transformace.

Řešení:

Pro jednoduchost označíme

$$
\frac{\mathcal{C}}{\mathcal{D}} = \gamma, \qquad \frac{\mathcal{B} - \mathcal{A}}{\mathcal{D}} = \alpha.
$$

Diferenční rovnice má v označení $c[k] \equiv y[k]$ tvar

$$y[k] + \gamma y[k-1] = \alpha x[k]$$

Za přepokladu $x[k] = \mathbf{1}[k]$ a $y[k] = 0$ pro $k < 0$ dostaneme použitím $\mathcal{Z}$-transformace algebraickou rovnici

$$Y(z) + \gamma z^{-1} Y(z) = \frac{\alpha}{1 - z^{-1}}$$

s řešením v $\mathcal{Z}$-rovině ve tvaru

$$Y(z) = \frac{\alpha}{(1 - z^{-1})(1 + \gamma z^{-1})}.$$

Rozložíme na parciální zlomky

$$Y(z) = \frac{\alpha}{(1 - z^{-1})(1 + \gamma z^{-1})} = \frac{k_1}{1 - z^{-1}} + \frac{k_2}{1 + \gamma z^{-1}},$$

kde

$$k_1 = \lim_{z \to 1} (1 - z^{-1}) Y(z) = \frac{\alpha}{1 + \gamma},$$
$$k_2 = \lim_{z \to -\gamma} (1 + \gamma z^{-1}) Y(z) = \frac{\alpha \gamma}{1 + \gamma}.$$

Zpětná transformace funkce

$$Y(z) = \frac{\alpha}{1 + \gamma} \left(\frac{1}{(1 - z^{-1})} + \frac{\gamma}{1 + \gamma z^{-1}} \right)$$

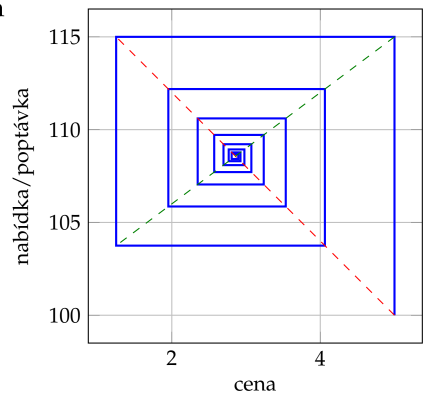
pak vede na řešení ve tvaru diferenční rovnice

$$y[k] = \frac{\alpha}{1 + \gamma} \left(1 - (-\gamma)^{k+1} \right) \mathbf{1}[k],$$

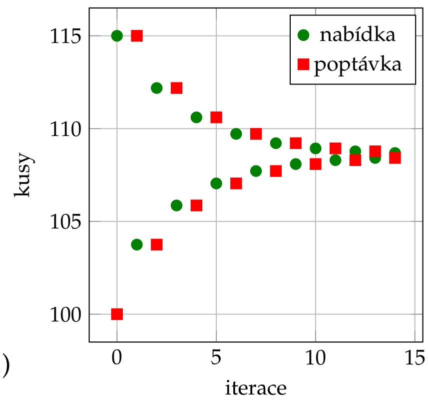
které v případě stabilního trhu $\gamma = \frac{C}{D} < 1$ určuje limitní velikost ceny

$$\lim_{k \to \infty} c[k] = \frac{\alpha}{1 + \gamma} = \frac{B - A}{C + D}. \tag{1}$$

Řešení je pro hodnoty $A = 100$, $B = 120$, $C = 3$ a $D = 4$ znázorněno na obrázku 1: pro každou hodnotu ceny je vidět rozdíl mezi nabídkou a poptávkou a tento rozdíl se postupně zmenšuje, dokud systém nedosáhne rovnovážného stavu, daného limitní cenou dle rovnice (1). Na obrázku 2 je znázorněn postupný vývoj hodnot nabídky a poptávky v čase.



Obrázek 1: Výsledek simulace rovnice nabídky a poptávky vede na pavoučkový diagram, ukazující závislost nabídka-cena a poptávka-cena



Obrázek 2: Vývoj nabídky a poptávky po jednotlivých iteracích

□

Příklad 2. Diferenční rovnice 2.řádu

Hledejme řešení diferenční rovnice druhého řádu, která popisuje LTI diskrétní systém,

$$y[n+2] + 2a\, y[n+1] + (a^2 + b^2) y[n] = c_0 u[n] \tag{2}$$

splňující počáteční podmínky ve tvaru

$$y[0] = y_0 = 1, \quad y[1] = y_1 = -1.$$

Řešení:
Rovnici (2) řešíme pomocí $\mathcal{Z}$-transformace. Protože platí

$$\mathcal{Z}\left\{y[n+m]\right\} = z^m \left[Y(z) - \sum_{\nu=0}^{m-1} y[\nu] z^{-\nu}\right]$$

tak

$$\begin{aligned}\mathcal{Z}\left\{y[n]\right\} &= Y(z),\\ \mathcal{Z}\left\{y[n+1]\right\} &= z^1\left[Y(z) - y[0]\right],\\ \mathcal{Z}\left\{y[n+2]\right\} &= z^2\left[Y(z) - y[0] - z^{-1}y[1]\right].\end{aligned}$$

Transformací nalezneme algebraický tvar diferenční rovnice (2) a po dosazení počátečních podmínek obdržíme

$$Y(z)\left(z^2 + 2a\,z^1 + (a^2+b^2)\right) - z^1 y_0 - z^2 y_0 - z^1 y_1 = c_0 X(z).$$

a vyjádříme

$$Y(z) = \frac{c_0 X(z) + z^1 + z^2 - z^1}{z^2 + 2a\,z^1 + (a^2+b^2)} \times \frac{z^{-2}}{z^{-2}}.$$

respektive

$$Y(z) = \frac{1 + c_0 X(z) z^{-2}}{1 + 2a\,z^{-1} + (a^2+b^2) z^{-2}}.$$

Přenosová funkce $H(z)$ je definována jako podíl obrazu výstupu k obrazu vstupu

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)}$$

pro nulové počáteční podmínky a tedy

$$\begin{aligned}H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} &= \frac{c_0 z^{-2}}{1 + 2a\,z^{-1} + (a^2+b^2) z^{-2}}\\ &= \frac{c_0 z^{-2}}{(1 - z_1 z^{-1})(1 - z_2 z^{-1})},\end{aligned}$$

kde z_1 a z_2 jsou póly přenosové funkce

$$z_{1,2} = -a \pm \imath b.$$

Impulsní odezvu určíme jako inverzní $\mathcal{Z}$-transformaci přenosové funkce. Potože platí

$$\begin{aligned}\lim_{z\to z_1} H(z)(1 - z_1 z^{-1}) &= \frac{c_0 z_1^{-1}}{z_1 - z_2},\\ \lim_{z\to z_2} H(z)(1 - z_2 z^{-1}) &= -\frac{c_0 z_2^{-1}}{z_1 - z_2},\end{aligned}$$

obdržíme impulsní odezvu ve tvaru

$$h[n] = \mathcal{Z}^{-1}\left\{H(z)\right\} = c_0 \frac{z_1^{n-1} - z_2^{n-1}}{z_1 - z_2}$$

□