Přenosová funkce diskrétních systémů
Stabilita diskrétních systémů

Modelování systémů a procesů (11MSP)

Bohumil Kovář, Jan Přikryl, Miroslav Vlček

10. přednáška 11MSP

čtvrtek 29. dubna 2014

verze: 2014-04-29 07:59

Obsah

Tento text je do jisté míry experimentálním pískovištěm na odladění převodu textu prezentace vytvořené v LaTeXové třídě `beamer` do textu vysázeného pomocí `tufte-handout`. Obsah je oproti prezentaci mírně rozšířen o poznámky. Bude se ještě v průběhu semestru měnit, kontrolujte si prosím čas sestavení v záhlaví tohoto souboru.

Přenos diskrétních systémů

Přenosová funkce

Diferenční rovnice lineárního časově invariantního systému, za předpokladu nulových počátečních podmínek, tj. $y[n-k] = 0$ a

$u[n-k] = 0$ pro $n-k<0$, má tvar

$$\begin{aligned} a_N\, y[n-N] + a_{N-1}\, y[n-N+1] + \cdots + a_0\, y[n] &= \\ = b_M\, u[n-M] + b_{M-1}\, u[n-M+1] + \cdots + b_0\, u[n] \end{aligned}$$

tedy

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y[n-k] = \sum_{m=0}^{M} b_m u[n-m].$$

Použijeme $\mathcal{Z}$-transformaci

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}\left\{\sum_{k=0}^{N} a_k\, y[n-k]\right\} &= \mathcal{Z}\left\{\sum_{m=0}^{M} b_m\, u[n-m]\right\} \\ \sum_{k=0}^{N} a_k\, \mathcal{Z}\left\{y(n-k)\right\} &= \sum_{m=0}^{M} b_m\, \mathcal{Z}\left\{u(n-m)\right\} \end{aligned}$$

a dostáváme algebraickou rovnici

$$\sum_{k=0}^{N} a_k\, z^{-k} \cdot Y(z) = \sum_{m=0}^{M} b_m\, z^{-m} \cdot U(z).$$

Nyní můžeme snadno vyjádřit $Y(z)$ ve tvaru

$$\begin{aligned} Y(z) &= \frac{\sum_{m=0}^{M} b_m z^{-m}}{\sum_{k=0}^{N} a_k z^{-k}} \cdot U(z) \\ Y(z) &= H(z) \cdot U(z). \end{aligned} \tag{1}$$

Připomeňme si, že mezi vstupem a výstupem v časové rovině platí vztah

$$y[n] = \sum_{m=0}^{n} h(n-m) \cdot u[n]$$

jehož $\mathcal{Z}\left\{-\right\}$transformace odpovídá rovnici (1)

Definice

Funkce $H(z) = \mathcal{Z}\left\{h[n]\right\}$ je **přenosová funkce** a má tvar racionální lomené funkce v proměnné z^{-1}

$$H(z) = \frac{\sum_{m=0}^{M} b_m z^{-m}}{\sum_{k=0}^{N} a_k z^{-k}} = \frac{Q(z)}{N(z)}$$

Funkce $S(z) = \mathcal{Z}\left\{s[n]\right\}$ je obrazem přechodové odezvy a z přenosové funkce ji určíme snadno jako

$$S(z) = H(z) \cdot \mathcal{Z}\left\{\mathbf{1}[n]\right\} = H(z)\,\frac{1}{1-z^{-1}} = H(z)\,\frac{z}{z-1}$$

Převod spojitého systému na diskrétní

Dopředné diference

Spojitý systém popsaný stavovými rovnicemi

$$\mathbf{x}'(t) = \mathbf{A}\,\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\,\mathbf{u}(t) \tag{2}$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\,\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\,\mathbf{u}(t) \tag{3}$$

můžeme převést na ekvivalentní diskrétní systém tak, že čas t nahradíme diskrétními časovými okamžiky $t = nT$, kde T je vzdálenost mezi následujícími časovými okamžiky, neboli **perioda vzorkování**.

Všechny veličiny měříme pouze v čase $t = nT$ a proto

$$\begin{aligned} x(t) &= x(nT) \to x[n], \\ y(t) &= y(nT) \to y[n], \\ u(t) &= u(nT) \to u[n]. \end{aligned}$$

Derivaci stavu $\mathbf{x}'(t)$ nahradíme v prvním přiblížení první diferencí

$$\mathbf{x}'(t) \approx \frac{\mathbf{x}\,(nT + T) - \mathbf{x}(nT)}{T} = \frac{1}{T}\left(\mathbf{x}[n+1] - \mathbf{x}[n]\right).$$

Dosazením do (2) a (3) za dostaneme rovnici vývoje stavu ve formě

$$\frac{1}{T}\left(\mathbf{x}[n+1] - \mathbf{x}[n]\right) = \mathbf{A}\,\mathbf{x}[n] + \mathbf{B}\,\mathbf{u}[n].$$

Tuto rovnici upravujeme dále.

Dosazením do původních spojitých stavových rovnic dostaneme po úpravě jejich diskrétní tvar

$$\begin{aligned} \mathbf{x}[n+1] &= (\mathbf{I} + T\,\mathbf{A})\;\mathbf{x}[n] + T\mathbf{B}\,\mathbf{u}[n] \\ \mathbf{y}[n] &= \mathbf{C}\,\mathbf{x}[n] + \mathbf{D}\,\mathbf{u}[n] \end{aligned}$$

resp.

$$\begin{aligned} \mathbf{x}[n+1] &= \mathbf{M}\,\mathbf{x}[n] + \mathbf{N}\,\mathbf{u}[n] \\ \mathbf{y}[n] &= \mathbf{C}\,\mathbf{x}[n] + \mathbf{D}\,\mathbf{u}[n] \end{aligned}$$

Stabilita diskrétních systémů

Diferenční rovnice 2. řádu s konstantními koeficienty

$$y[n+2] + a\,y[n+1] + b\,y[n] = u[n]$$

má za *nulových počátečních podmínek* přenosovou funkci

$$H(z) = \frac{z^2 + z}{z^2 + a\,z + b} = \frac{z^2 + z}{(z - z_1)(z - z_2)}.$$

Poloha pólů přenosové funkce $H(z)$ rozhoduje o stabilitě systému.

Kritérium stability

BIBO stabilita – bounded input bounded output

Odezva na omezený vstupní signál musí být vždy omezená – systém je BIBO stabilní.

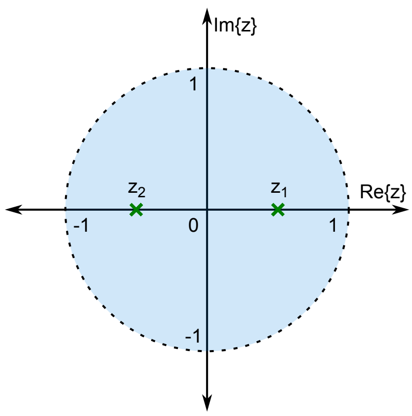
Odezva systému je kombinací

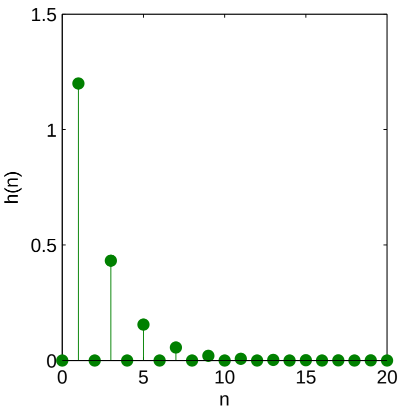
- odezvy na vstupní signál
- odezvy na počáteční podmínky

- **Stabilní systém** Všechny póly přenosové funkce $H(z)$ leží uvnitř jednotkové kružnice.
- **Nestabilní systém** Alespoň jeden pól přenosové funkce $H(z)$ leží vně jednotkové kružnice nebo alespoň jeden násobný pól leží na jednotkové kružnici.
- **Mez stability** Alespoň jeden jednoduchý pól leží na jednotkové kružnici a žádný pól neleží vně kružnice. Případné násobné póly leží uvnitř.

Stabilní systém

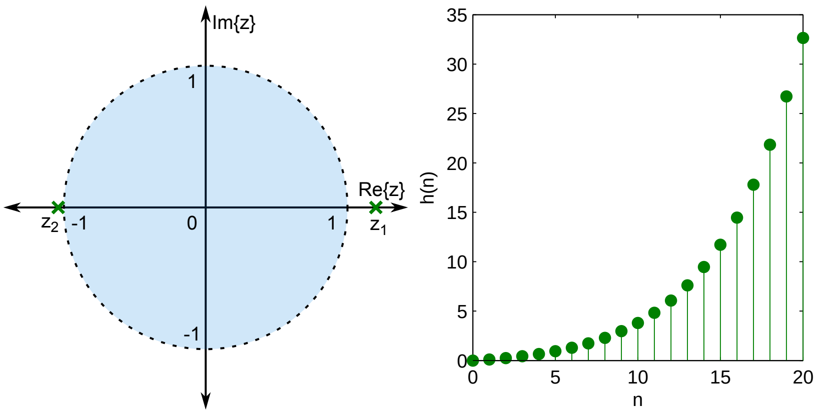
$$h[n] = (0{,}6)^n - (-0{,}6)^n$$
$$H(z) = \frac{z^2}{z^2 - \frac{1}{4}} = \frac{z^2}{(z - \frac{3}{5})(z + \frac{3}{5})}$$



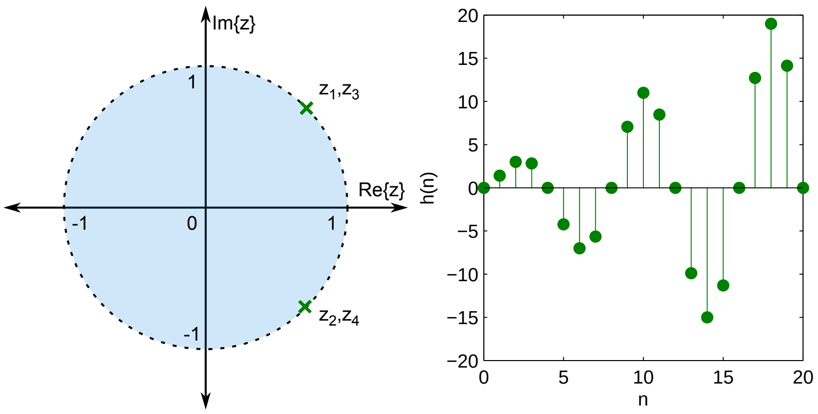


Nestabilní systém

$$h[n] = \left(\tfrac{6}{5}\right)^n - \left(-\tfrac{12}{11}\right)^n$$
$$H(z) = \frac{1}{z^2 + \frac{6}{55} + \frac{72}{55}} = \frac{1}{(z - \frac{6}{5})(z + \frac{12}{11})}$$

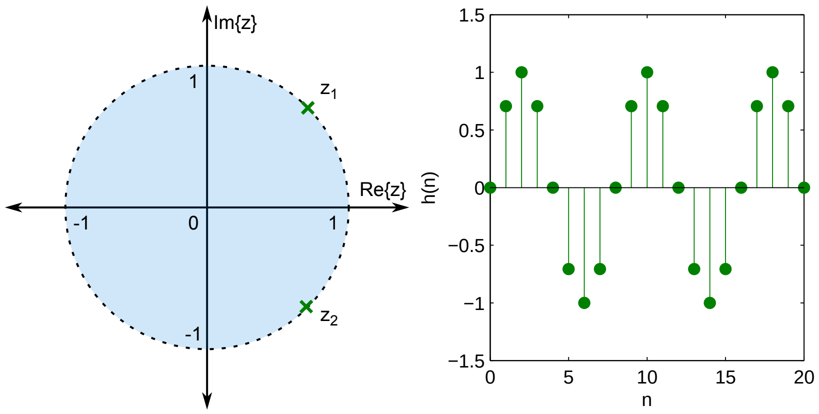


$$h[n] = (n+1)\cdot \sin \tfrac{\pi}{4} n = \frac{1}{2} i (n+1) \left[e^{-i\frac{\pi}{4}n} - e^{i\frac{\pi}{4}n} \right] \text{[3pt]}\ H(z) = \frac{\sqrt{2}z^3 - z^2}{\left(z^2 - \sqrt{2}\,z + 1\right)^2} = \frac{-\frac{1}{2}i \cdot z}{z - e^{\frac{\pi}{4}i}} + \frac{-\frac{1}{2}i \cdot z}{\left(z - e^{\frac{\pi}{4}i}\right)^2} + \frac{\frac{1}{2}i \cdot z}{z - e^{-\frac{\pi}{4}i}} + \frac{\frac{1}{2}i \cdot z}{\left(z - e^{-\frac{\pi}{4}i}\right)^2}$$

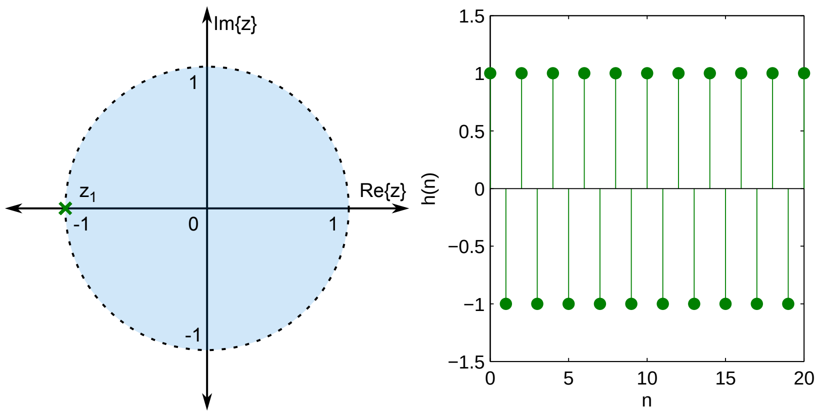


Mez stability

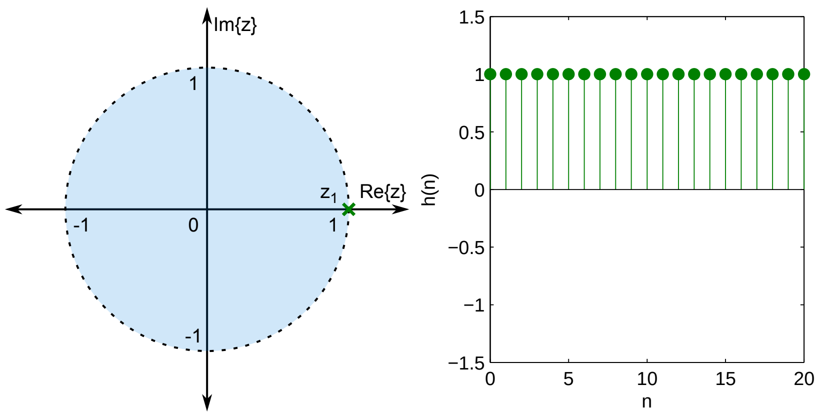
$$h[n] = \sin \tfrac{\pi}{4} n = \frac{1}{2} i \left[e^{-i\frac{\pi}{4}n} - e^{i\frac{\pi}{4}n} \right] \text{[3pt]}\ H(z) = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2} z}{z^2 - \sqrt{2}\,z + 1} = \frac{-\frac{1}{2}i \cdot z}{z - e^{\frac{\pi}{4}i}} + \frac{\frac{1}{2}i \cdot z}{z - e^{-\frac{\pi}{4}i}}$$



$$h[n] = (-1)^n$$
$$H(z) = \frac{1}{1+z^{-1}} = \frac{z}{z+1}$$



$$h[n] = (1)^n$$
$$H(z) = \frac{1}{1-z^{-1}} = \frac{z}{z-1}$$



Stavový popis diskrétních systémů

Přenosová funkce

Nalezněte přenosovou funkci $H(z)$ diskrétního LTI systému popsaného stavovými rovnicemi

$$\begin{aligned} \mathbf{x}[n+1] &= \mathbf{M}\,\mathbf{x}[n] + \mathbf{N}\,\mathbf{u}[n] \\ \mathbf{y}[n] &= \mathbf{C}\,\mathbf{x}[n] \end{aligned}$$

- Uvažujte pouze jeden vstup a výstup.
- Při odvození použijte $\mathcal{Z}$-transformaci!
- Která matice ve stavovém popisu je rozhodující pro stabilitu řešení?

Příklad

S pomocí vztahů pro $\mathcal{Z}$-transformaci transformujeme rovnice

$$\begin{aligned} \mathbf{x}[n+1] &= \mathbf{M}\,\mathbf{x}[n] + \mathbf{N}\,u[n] \\ y[n] &= \mathbf{C}\,\mathbf{x}[n] \end{aligned}$$

na

$$\begin{aligned} z(\mathbf{X}(z) - \mathbf{x}[0]) &= \mathbf{M}\,\mathbf{X}(z) + \mathbf{N}\,U(z) \\ Y(z) &= \mathbf{C}\,\mathbf{X}(z) \end{aligned}$$

Protože přenosová funkce je definována pro $x[0] = 0$, obdržíme z první rovnice

$$\mathbf{X}(z) = (z\mathbf{1} - \mathbf{M})^{-1}\mathbf{N}\,U(z)$$

a dosazením do druhé rovnice je

$$Y(z) = \mathbf{C}\,(z\mathbf{1} - \mathbf{M})^{-1}\mathbf{N}\,U(z)$$

Přenosová funkce $H(z)$ je tedy

$$H(z) = \mathbf{C}\,(z\mathbf{1} - \mathbf{M})^{-1}\mathbf{N} = \mathbf{C}\,\frac{\operatorname{adj}(z\mathbf{1} - \mathbf{M})}{\det(z\mathbf{1} - \mathbf{M})}\,\mathbf{N}$$