

Úvodní informace

Matematické modelování

Modelování systémů a procesů (11MSP)

Bohumil Kovář, Jan Příkryl

Ústav aplikované matematiky
ČVUT v Praze, Fakulta dopravní

2. přednáška 11MSP
pondělí 23. února 2015

verze: 2015-02-23 12:45



Obsah přednášky

1 O předmětu

Základní organizační informace

Seznam literatury

Hodnocení předmětu

Domácí příprava

Vstupní znalosti

Výstupní znalosti



Základní informace

Přednášející:

- Dr. Ing. Jan Příkryl (prikryl@fd.cvut.cz)
přednášky po. 13:15-14:45 & 15:00-16:30

Cvičící:

- Ing. Bohumil Kovář, Ph.D. (kovar@utia.cas.cz)
- Dr. Ing. Jan Příkryl (prikryl@fd.cvut.cz)
- Mgr. Lucie Kárná, Ph.D. (karna@fd.cvut.cz)
- Ing. Jana Kuklová (kuklova@fd.cvut.cz)

Garant předmětu:

- prof. RNDr. Miroslav Vlček, DrSc. (vlcek@fd.cvut.cz)



Základní informace

Pokračování

Domovská stránka předmětu MSP:

<http://zolotarev.fd.cvut.cz/msp>

Cvičení: Pravidla jsou na stránkách předmětu.

Cvičení pro druhý zápis: Vzhledem ke kapacitě počítačových laboratoří není možné, aby studenti opakující předmět navštěvovali cvičení. Budou odevzdávat elektronicky zadávané domácí úlohy a v průběhu semestru pro ně vypíšeme dva termíny, na kterých si napíšou písemné testy.



Literatura I

- ① CARLSON, Gordon E. *Signal and Linear System Analysis: with Matlab*. 2. vyd. New York: John Wiley & Sons, 1998, 768 s. ISBN 04-711-2465-6.
- ② CHATURVEDI, Devendra K. *Modeling and simulation of systems using MATLAB and Simulink*. Boca Raton: CRC Press, 2009, 733 s. ISBN 978-143-9806-722.
- ③ ALLEN, Roy G. D. *Matematická ekonomie*. Praha: Academia, 1971, 782 s.
- ④ OPPENHEIM, Alan V., Alan S. WILLSKY a Syed Hamid NAWAB. *Signals and Systems*. 2. vyd. Upper Saddle River: Prentice Hall, 1997, 957 s. ISBN 01-381-4757-4.
- ⑤ KARBAN, Pavel. *Výpočty a simulace v programech Matlab a Simulink*. Brno: Computer Press, 2006. ISBN 80-251-1301-9.



Literatura II

⑥ Informace o prostředí MATLAB

<http://zolotarev.fd.cvut.cz/mni/>

<http://www.fd.cvut.cz/personal/nagyivan/PrpStat/Prp/MatIntro.pdf>

⑦ Matematika-opakování

<http://euler.fd.cvut.cz/predmety/ml1/>



Zápočet a zkouška

Celkový počet bodů, které studenti mohou během semestru získat, je 40. Ke zkoušce se z toho započítá maximálně 30.

Zápočet udělujeme od 25 bodů výše.

Body jsou rozděleny následovně:

- 10 bodů za 3 testy domácí přípravy,
- 4 body za tři automaticky hodnocené domácí úkoly,
- 12 bodů za dva praktické testy z Matlabu a Simulinku,
- 14 bodů za závěrečný test (dva početní příklady po pěti bodech a dvě doplňkové otázky za dva body).



Zápočet a zkouška

Pokračování

V průběhu semestru bude vyhlášeno několik **bonusových úloh**, jejichž úspěšní a nejrychlejší řešitelé budou odměněni až dvěma bonusovými body. Bonusové body se přičítají k celkovému bodovému zisku v semestru.

Bodování zaručuje, že v případě získání zápočtu (25 bodů a výše) můžete automaticky předmět absolvovat s klasifikací **dostatečně**, případně **uspokojivě**.

V případě, že máte zájem o lepší hodnocení, můžete zbylých 20 bodů získat u zkoušky.



Domácí příprava

Témata domácích příprav a na ně navázaných testů:

1.	Typy systémů
2.	Laplaceova transformace, zpětná Laplaceova transformace a řešení diferenciálních rovnic
3.	\mathcal{Z} -transformace, zpětná \mathcal{Z} -transformace a řešení diferenčních rovnic

Domácí přípravy jsou zároveň vaší přípravou na závěrečný test.



Znalosti vstupní

Toto jsou znalosti, u nichž předpokládáme, že je ovládáte. Jejich neznalost se **neomlouvá**.

- 1 Znalost základních pojmů a operací s vektory a maticemi
- 2 Znalost práce s komplexními čísly a základů funkcí komplexní proměnné
- 3 Znalost vlastností trigonometrických, hyperbolických, exponenciálních funkcí
- 4 Znalost výpočtu součtů nekonečné řady, derivace a integrálů funkce jedné proměnné
- 5 Znalost práce se zlomky, algebraickými výrazy a běžné středoškolské matematiky
- 6 Základní znalosti prostředí SCILAB/MATLAB (v rozsahu předmětů 11PT a 11STS)



Znalosti výstupní

- 1 Znalost použití Laplaceovy transformace pro řešení diferenciálních rovnic popisujících spojité lineární časově invariantní systémy
- 2 Znalost použití \mathcal{Z} -transformace pro řešení diferenčních rovnic popisujících diskrétní lineární časově invariantní systémy
- 3 Znalost nalezení stavového popisu ze slovního zadání dynamického systému
- 4 Znalost použití pojmu stabilita řešení a metody ověření stability dynamického systému
- 5 Znalost prostředí MATLAB/SIMULINK pro modelování dynamických systémů a řešení soustav nelineárních diferenciálních a diferenčních rovnic



Obsah přednášky

② Matematické modelování systémů

Jaké cíle může modelování dosáhnout?

Klasifikace modelů

Fáze modelování

Model systému

Vnější popis systémů

Vnitřní popis systémů

③ Iterace diferenční rovnice

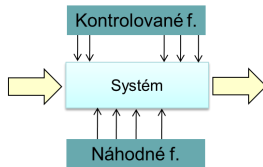
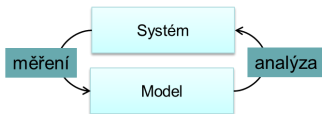


Tvorba modelu

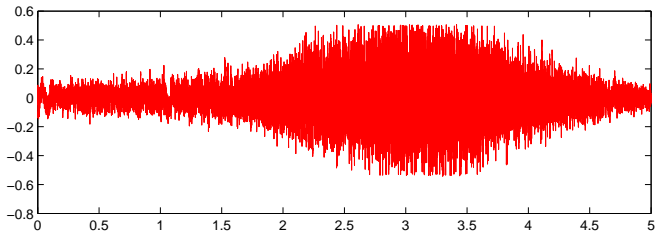
Při analýze navrženého modelu chceme učinit co možná nejsilnější rozhodnutí na základě malého množství dat. Správnost našeho návrhu je nutné statisticky vyhodnotit.

Problémy:

- 1 Významné diference ve sledovaných parametrech mohou být způsobeny špatným návrhem modelu, případně měřením dat
- 2 Je těžké rozlišit, zda diference v datech jsou skutečné nebo způsobené „náhodným vlivem“.



Svět dopravy se neobejde bez měření . . .



a teď jeho zvuk zvuk auta



Proč modelování systémů?

Otázky:

- Jak ověříme správnost výpočtu rychlosti šíření ptačí chřipky?
- Jak ověříme pevnost nového mostu?
- Jak ověříme bezpečnost softwaru?

Pokud nemůžeme předem prokázat určité vlastnosti na samotného systému, prokážeme hledané vlastnosti na jeho modelu!



Modely reálného světa

Antoni Gaudí



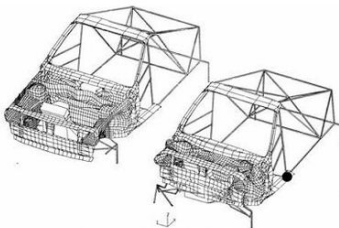
Modely reálného světa

Antoni Gaudí

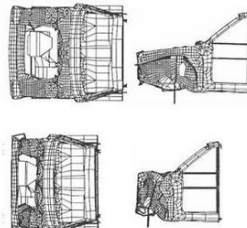


Modely reálného světa

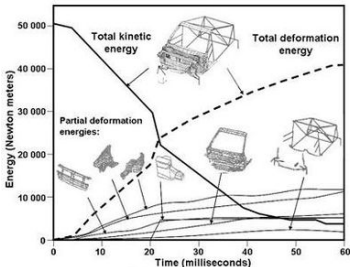
VW Polo crash test



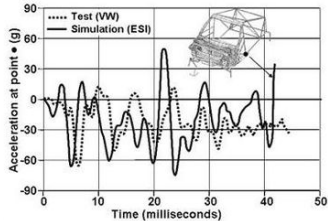
(a) crash simulation



(b) top and side views of simulation



(c) energy balance



(d) acceleration at point in cabin



Vnější popis systémů

Vnější popis vychází z popisu systému vektorem **vstupu u** a vektorem **výstupu y** .

System tak chápeme jako černou skříňku, o jejíchž vlastnostech se dozvíme pouze tehdy, jestliže budeme zkoumat jeho reakci na vnější události (signály, data).

Vnější model popisujeme diferenciální rovnicí pro systémy se spojitým časem a diferenční rovnicí pro systémy s diskretním časem. Uvedená rovnice je obecně vyššího řádu, než 1.



Vnitřní popis systémů

Vnitřní, tzv. **stavový popis** systému používá k popisu dynamiky systému vektor **vnitřních stavů** x .

Vektor vstupů u a vektor výstupních veličin y jsou druhotné veličiny vnitřního popisu.

Stavové modely popisujeme

- soustavou diferenciálních rovnic prvního řádu pro systémy se spojitým časem a
- soustavou diferenčních rovnic prvního řádu pro systémy s diskrétním časem.



Role matematiky

Modelování není samospasitelné:

- výstupy modelu je vždy třeba ověřovat,
- možné chyby jsou jak v modelu, tak i v jeho výpočtu.

Verifikace: Počítáme správný model.

Validace: Model počítá správně.



Role matematiky

Párová prvočísla a Intel FDIV bug

Příběh párových prvočísel (např. 17 a 19,...), největší dosud známý prvočíselný pár je

$$3756801695685 \times 2^{666669} \pm 1$$

(200700 dekadických cifer)

Příběh, ve kterém pošetilý matematik nachytal firmu INTEL při předstírání, že chyba Pentia neexistuje (1995):

Thomas Nicely, Lynchburg College, Virginia

harmonická řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \rightarrow \infty$

prvočíselná harmonická řada $\sum_{\forall p}^{\infty} \frac{1}{p} \rightarrow \infty$

divergují



Role matematiky

avšak harmonická řada s párovými prvočíslly

$$\sum_{\forall p_2}^{\infty} \frac{1}{p_2} = \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \cdots + \frac{1}{29} + \frac{1}{31} + \cdots$$

$$\approx 1,902160583104$$

konverguje!

Zde nastupuje experimentální matematika:

Thomas Nicely (1996) obdržel a svém novém PC hodnotu

$$\sum_{\forall p_2}^{\infty} \frac{1}{p_2} \approx 1,9021605778$$

a objevil chybu v FPU Pentia.

Rozšířil svoje podezření pomocí internetu a odezva byla jednoznačná: aritmetická jednotka Pentia je chybná!



Role matematiky

Tim Coe, Vitesse Semiconductor, Southern California

$$c = \frac{4195835}{3145727} = \frac{5 \cdot 7 \cdot (2^3 \cdot 3^4 \cdot 5 \cdot 37 + 1)}{3 \cdot 2^{20} - 1} \approx 1,33382044$$

Pentium procesor však dával hodnotu

$$c = \frac{4195835}{3145727} = \frac{5 \times 7 \times 119881}{13 \times 241979} \approx 1.33373906$$

Chyba při reprezentaci čísel typu

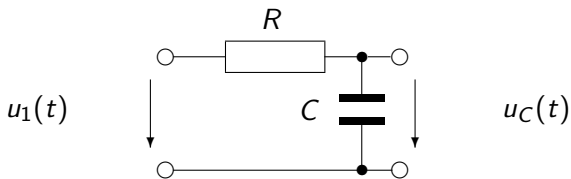
$$M_n = 2^n - 1$$

tzv. Mersenneova čísla



Příklady systémů

Integrační RC článek (1/3)



Napětí $u_1(t)$ na RC článku je součet napětí na rezistoru $u_R(t)$ a na kapacitoru $u_C(t)$:

$$u_1(t) = u_R(t) + u_C(t).$$



Příklady systémů

Integrační RC článek (2/3)

Proud procházející obvodem $i(t)$ a časový průběh napětí na rezistoru $u_R(t)$ je možno vyjádřit jako

$$i(t) = C \frac{d}{dt} u_C(t)$$

a proto

$$u_R(t) = R \cdot i(t) = RC \frac{d}{dt} u_C(t).$$



Příklady systémů

Integrační RC článek (3/3)

Dosazením $u_R(t)$ získáme diferenciální rovnici prvního řádu pro časový průběh napětí na kapacitoru $u_C(t)$:

$$RC \frac{d}{dt} u_C(t) + u_C(t) = u_1(t).$$

Řešení uvedené rovnice má pro všechna $t \geq 0$

$$\alpha = \frac{1}{RC}$$

$$u_1(t) = U_0$$

a pro počáteční hodnotu

$$u_C(0) = 0$$

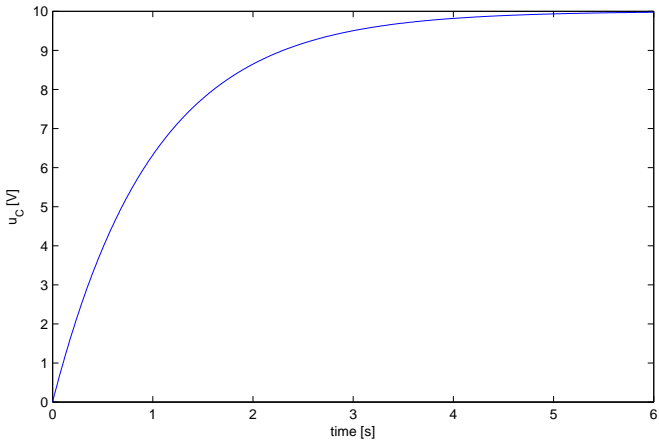
tvar

$$u_C(t) = U_0(1 - e^{-\alpha t}).$$



Příklady systémů

Výstup integračního RC článku



Příklady systémů

Příklad variace ceny (1/2)

Rovnice nabídky

Nabídka **dnes** závisí na **včerejší** ceně a to tak, že nabídka stoupá s rostoucí cenou. Pro $C > 0$ platí

$$n[k] = Cc[k - 1] + Au[k].$$

Rovnice poptávky

Poptávka **dnes** závisí na **dnešní** ceně a to tak, že poptávka klesá s rostoucí cenou. Pro $D > 0$ platí

$$p[k] = -Dc[k] + Bu[k].$$



Příklady systémů

Příklad variace ceny (2/2)

Rovnost nabídky a poptávky

$$n[k] = p[k]$$

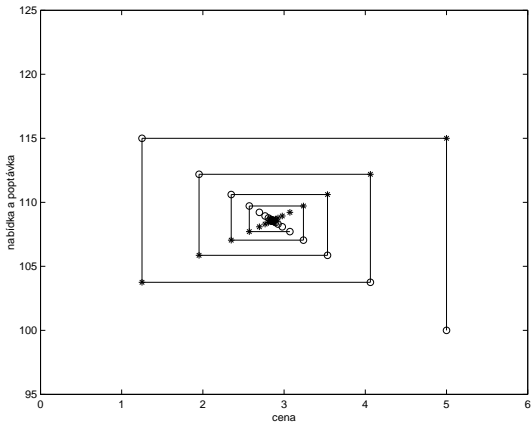
pak vede na diferenční rovnici prvního řádu

$$c[k] + \frac{C}{D}c[k-1] = \frac{B-A}{D}u[k].$$

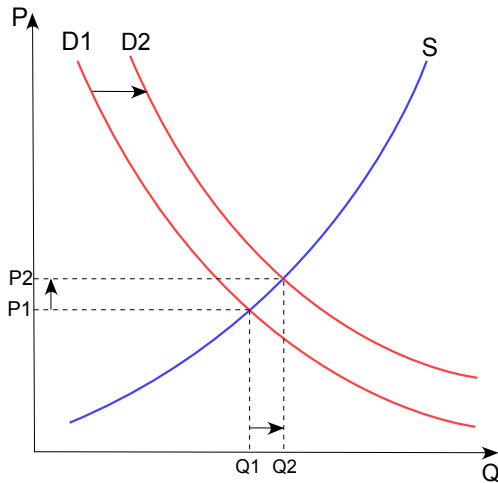


Příklady systémů

Příklad variace ceny



Rozdíl mezi lineárním a linearizovaným



Obsah přednášky

② Matematické modelování systémů

③ Iterace diferenční rovnice

Iterace rovnice ceny



Iterace rovnice ceny

Diferenční rovnici, kterou jsme odvodili

$$c[k] + \frac{C}{D}c[k-1] = \frac{B-A}{D}x[k]$$

přepíšeme do kanonického tvaru

$$y[k] + \gamma y[k-1] = \beta u[k]$$

a postupnými iteracemi nalezneme pro $u[k] = \mathbf{1}[k]$ a počáteční podmínku $y[-1] = 0$



Iterace rovnice ceny

Pro $k = 0$:

$$y[0] + \gamma y[-1] = \beta u[0]$$

$$y[0] = \beta - \gamma y[-1] = \beta$$

Pro $k = 1$:

$$y[1] + \gamma y[0] = \beta u[1]$$

$$y[1] = \beta - \gamma y[0] = \beta - \beta\gamma$$



Iterace rovnice ceny

Pro $k = 2$:

$$y[2] + \gamma y[1] = \beta u[2]$$

$$y[2] = \beta - \gamma y[1] = \beta - \beta\gamma + \beta\gamma^2$$

Pro obecné n :

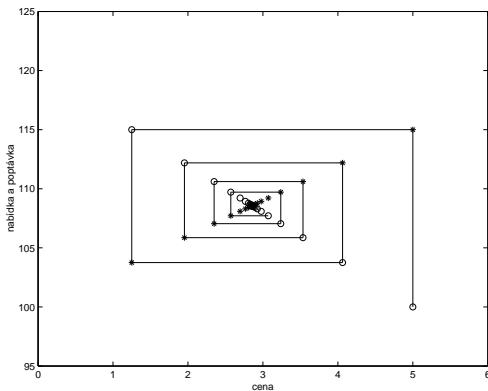
$$y[n] + \gamma y[n-1] = \beta u[n]$$

$$y[n] = \beta - \gamma y[n-1] = \beta (1 - \gamma + \gamma^2 + \dots + (-\gamma)^n)$$

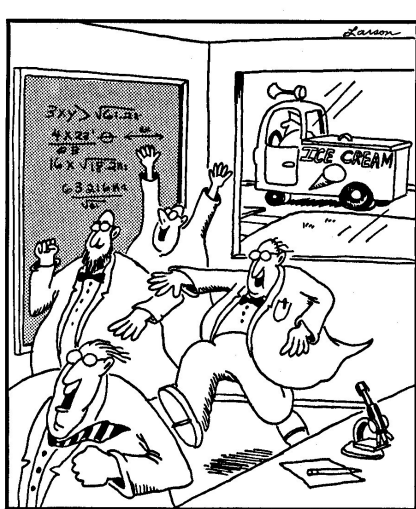


Iterace rovnice ceny

$$y[n] = \beta \sum_{m=0}^n (-\gamma)^m = \beta \frac{1 - (-\gamma)^{n+1}}{1 + \gamma} = \frac{\beta}{1 + \gamma} + \frac{\beta\gamma}{1 + \gamma} (-\gamma)^n$$



Na závěr



Děkuji za pozornost. Až budete utíkat, prosím opatrně.

