Základní signály
Linearita, stacionarita, kauzalita

Modelování systémů a procesů (11MSP)

Bohumil Kovář, Jan Přikryl, Miroslav Vlček

Ústav aplikované matematiky
ČVUT v Praze, Fakulta dopravní

3. přednáška 11MSP
pondělí 2. března 2015

verze: 2015-02-23 12:50

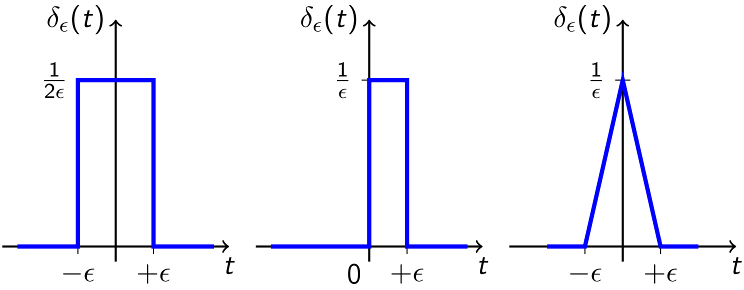
Obsah přednášky

Obsah přednášky

Diracův impuls

Přiblížení

Tato funkce je definována na časovém intervalu pro všechna t a její nenulovou hodnotu předpokládáme pouze v okolí bodu $t = 0$. Plocha těchto funkcí je rovna 1 pro každé $\varepsilon > 0$.



Funkci $\delta(t)$ definujeme jako $\delta(t) = \lim_{\epsilon\to 0} \delta_\epsilon(t)$.

Diracův impuls

Definice

Funkce $\delta(t)$ se nazývá **Diracův impuls**, Diracova δ-funkce nebo jednotkový impuls. Hodnota $\delta(t)$ pro $t \neq 0$ je $\delta(t) = 0$. Její hodnota v $t = 0$ není definována jako funkce, používá se integrální definice

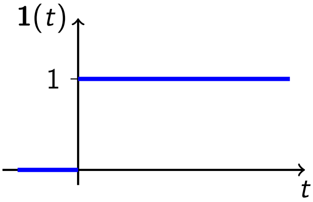
$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-\epsilon}^{\epsilon} \delta(t)\,\mathrm{d}t = \int_{0-}^{0+} \delta(t)\,\mathrm{d}t = 1$$

pro každé $\epsilon > 0$.

Jednotkový skok

Funkce jednotkového skoku bývá obvykle značena $\mathbf{1}(t)$ a je definována jako

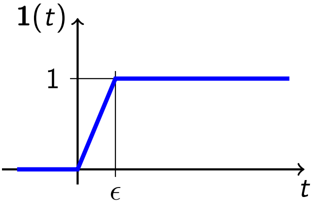
$$\mathbf{1}(t) = \begin{cases} 1 & \text{pro } t \geq 0 \\ 0 & \text{pro } t < 0. \end{cases}$$



Jednotkový skok
Vztah $\delta(t)$ a $\mathbf{1}(t)$

Platí

$$\delta(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathbf{1}(t).$$



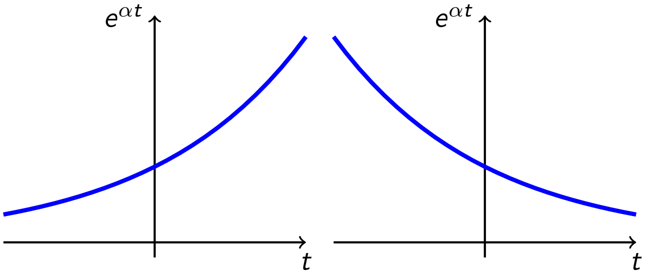
Exponenciála

Reálná

Uvažujme exponenciální funkci

$$f(t) = e^{\alpha t},$$

kde α je reálná konstanta, podle následujícího obrázku.



Exponenciála

Komplexní

Exponenciální funkce

$$f(t) = A\,e^{\alpha t},$$

kde $\alpha \in \mathbb{C}$ je zajímavá hlavně v případě, kdy $\alpha = i\omega$,

$$f(t) = A\,e^{i\omega t} = A\,(\cos\omega t + i\,\sin\omega t)\,.$$

Periodická funkce

O spojitém signálu $f(t)$ říkáme, že je periodický s periodou T, jestliže

$$\forall t : f(t+T) = f(t)$$

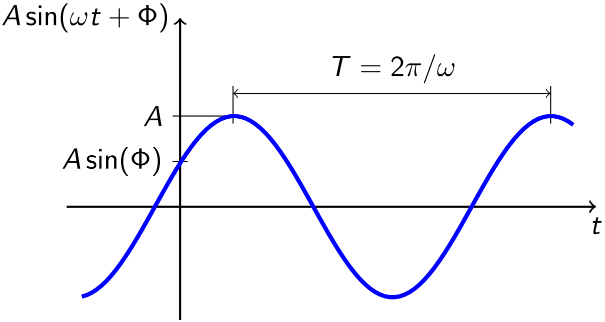
a tedy také pro libovolné $k \in \mathbb{Z}$

$$f(t) = f(t+T) = f(t+2T) = \cdots = f(t+k \cdot T)$$

Nejmenší možné T nazýváme **fundamentální perioda**, značíme T_0.

Sinusová funkce

$$f(t) = A\sin(\omega t + \Phi),$$



Konstanty A, ω a Φ se nazývají **amplituda**, **úhlová frekvence** a **fázový posun**. Sinusovka je periodická se základní periodou $T = 2\pi/\omega$.

Obsah přednášky

Vznik diskrétních signálů

Jak diskrétní signály vznikají?

- **přirozeně** (průměrné denní teploty, denní kurzy, počty studentů)
- **vzorkováním spojitých signálů** (naměření teploty každou hodinu, měřením průtoku každých 15 minut)

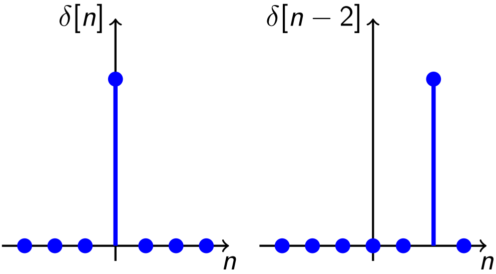
Diskrétní signály, jimiž se budeme v předmětu zabývat, jsou diskrétní v čase, ale spojité ve funkční hodnotě.

Digitální signál je totiž často **kvantovaný**, nabývá tedy v každém n pouze diskrétní množiny funkčních hodnot, například $\{0, 1, 2, \ldots, 65535\}$.

Diskrétní jednotkový impuls

Diskrétní jednotkový impuls $\delta[n]$ je definován vztahem

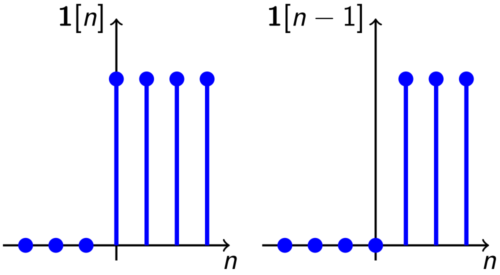
$$\delta[n] = \begin{cases} 1 & \text{pro } n = 0 \\ 0 & \text{pro } n \neq 0\,. \end{cases}$$



Diskrétní jednotkový skok

Diskrétní jednotkový skok $\mathbf{1}[n]$ je definován vztahem

$$\mathbf{1}[n] = \begin{cases} 1 & \text{pro } n \geq 0 \\ 0 & \text{pro } n < 0 \end{cases}$$

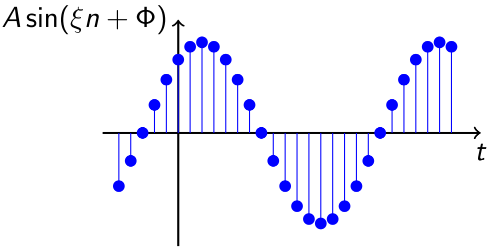


Diskrétní sinusová posloupnost

Mějme sinusový signál $f(t) = A\sin(\omega t + \Phi)$ s periodou $T = 2\pi/\omega$. Pokud tento signál vzorkujeme s periodou $T_s > 0$, získáme diskrétní sinusový signál

$$f[n] = f(nT) = A\sin(\omega n T_s + \Phi) = A\sin(\xi n + \Phi),$$

kde $n = 0,\ \pm 1,\ \pm 2, \ldots$ a $\xi = \omega T_s$.



Periodický signál

Diskrétní signál $f[n]$ je periodický, jestliže existuje kladné celé číslo N takové, že platí

$$f[n] = f[n+N] = f[n+2N] = \cdots = f[n+k \cdot N]$$

pro všechna $n \in \mathbb{Z}$ (z intervalu $(-\infty,\ \infty)$) a pro libovolné $k \in \mathbb{Z}$. N se nazývá **perioda diskrétního signálu**.

Nejmenší možné N nazýváme **fundamentální perioda** a značíme N_0.

Periodický signál

Diskrétní sinusová posloupnost nemusí být periodická!

Diskrétní sinusový signál nemusí být nutně periodický, záleží na volbě vzorkovací periody T_s. Pro periodický diskrétní sinusový signál s periodou N musí platit

$$N = m \cdot \frac{2\pi}{T_s},$$

kde $m \in \mathbb{N}$. Máme i $N \in \mathbb{N}$, proto $2\pi/T_s$ musí být racionální číslo.

Příklad (Neperiodický sinusový signál)

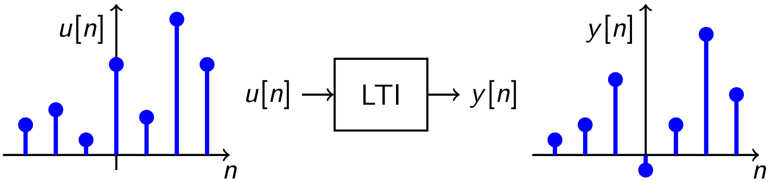
Signál

$$y[n] = \sin n$$

není pro $T_s = 0.1\,\mathrm{s}$ periodický, protože $2\pi/T_s$ není racionální číslo.

Obsah přednášky

Diskrétní systém



Diskrétní systém

Impulsní odezva

Definice (Impulsní odezva)

Odezvu systému na jednotkový impuls $\delta[n]$ budeme nazývat **impulsní odezva** a značit $h[n]$,

$$h[n] = \mathcal{S}\{\delta[n]\}$$
$$h[n, m] = \mathcal{S}\{\delta[n - m]\}\,.$$

Diskrétní systém

Přechodová odezva

Definice (Přechodová odezva)

Odezvu systému na jednotkový skok $\mathbf{1}[n]$ budeme nazývat **přechodová odezva** a značit $s[n]$,

$$s[n] = \mathcal{S}\{\mathbf{1}[n]\} = \mathcal{S}\left\{\sum_{m=0}^{n} \delta[n-m]\right\}.$$

Lineární systém

Definice (Linearita)

V matematice označujeme funkci $f(x)$ jako lineární v případě, že je

1. aditivní $f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2)$ a
2. homogenní, $f(\alpha x) = \alpha f(x)$.

Obdobně to platí i pro lineární systémy.

Definice (Lineární systém)

Systém je lineární, pokud pro dva různé vstupní signály $u_1[n]$ a $u_2[n]$ platí

$$\mathcal{S}\{u_1[n] + u_2[n]\} = \mathcal{S}\{u_1[n]\} + \mathcal{S}\{u_2[n]\},$$
$$\mathcal{S}\{\alpha u[n]\} = \alpha \mathcal{S}\{u[n]\}.$$

Princip superpozice

Definice (Princip superpozice)

Pro dva různé vstupní signály $u_1[n]$ a $u_2[n]$ platí

$$
\begin{aligned}
y_1[n] &= \mathcal{S}\{u_1[n]\} \\
y_2[n] &= \mathcal{S}\{u_2[n]\}
\end{aligned}
$$

a pro $u[n] = \alpha u_1[n] + \beta u_2[n]$ také

$$\alpha y_1[n] + \beta y_2[n] = y[n] = \mathcal{S}\{u[n]\} = \mathcal{S}\{\alpha u_1[n] + \beta u_2[n]\}$$

Obecně platí

$$u[n] = \sum_i a_i u_i[n] \quad \rightarrow \quad y[n] = \sum_i a_i y_i[n] = \sum_i a_i \mathcal{S}\{u_i[n]\}$$

Příklad

Příklad (Lineární systém)

Uvažujme systém

$$y[n] + a\, y[n-1] = u[n].$$

Je-li na vstupu lineární kombinace dvou různých signálů

$$u[n] = b_1\, u_1[n] + b_2\, u_2[n]$$

je na výstupu

$$y[n] = b_1 \left(y_1[n] + a\, y_1[n-1]\right) + b_2 \left(y_2[n] + a\, y_2[n-1]\right)$$

kde

$$\begin{aligned} y_1[n] + a\, y_1[n-1] &= u_1[n] \\ y_2[n] + a\, y_2[n-1] &= u_2[n] \end{aligned}$$

Příklad

Příklad (Nelineární systém)

Numerický výpočet druhé odmocniny lze zapsat rekurentním vztahem

$$y[n+1] = \frac{1}{2}\left(y[n] + \frac{u[n]}{y[n]}\right).$$

Odmocnina z čísla 10 je s přesností na 10 desetinných míst rovna $\sqrt{10} = 3{,}16227766017$. Pro $u[n] = u[0] = 10$ dostáváme postupně

n	$y[n]$	$y^2[n]$
1	3	9
2	3,165	10,017225
3	3,162278	10,00000214928
4	3,162277660	9,999999999568
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Lineární systém

Odezva na obecný vstupní signál

Pro obecný vstupní signál $u[n]$ je pak odezva lineárního systému

$$y[n] = \mathcal{S}\{u[n]\} = \mathcal{S}\left\{ \sum_{m=-\infty}^{\infty} u[m]\, \delta[n-m] \right\}$$

$$= \sum_{m=-\infty}^{\infty} u[m]\, \mathcal{S}\{\delta[n-m]\} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} u[m]\, h[n,m]$$

Vidíme, že chování systému je zcela určeno jeho odezvami na různě posunuté jednotkové pulsy $h[n,m]$.

Lineární systém

Přechodová odezva

Přechodová odezva diskrétního lineárního systému $s[n]$ je dána prostým součtem impulsních odezev pro $0 \leq m \leq n$

$$s[n] = \mathcal{S}\{\mathbf{1}[n]\} = \mathcal{S}\left\{\sum_{m=0}^{n} \delta[n-m]\right\}$$

$$= \sum_{m=0}^{n} \mathcal{S}\{\delta[n-m]\} = \sum_{m=0}^{n} h[n,m].$$

Lze za nějakých podmínek zjednodušit $h[n,m]$?

Časově invariantní systém

Systém se nazývá **časově invariantní**, jestliže jsou všechny události závislé pouze na časovém intervalu (rozdílu časových událostí) $n - m$ a nikoliv na každém časovém okamžiku n a m samostatně.

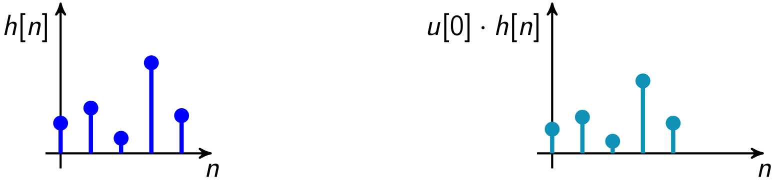
$$\begin{array}{lll} \text{dnes} & \ldots & y[n] = \mathcal{S}\left[u[n]\right] \\ \text{včera} & \ldots & y[n-1] = \mathcal{S}\left[u[n-1]\right] \\ & & \vdots \end{array}$$

Potom také rovnice pro impulsní odezvu přejde z maticového tvaru na prostý vektorový zápis

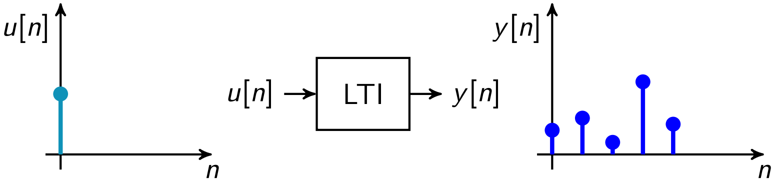
$$h[n,m] \to h[n-m] = \mathcal{S}\{\delta[n-m]\}\,.$$

Časově invariantní systém

Superpozice odezvy $y[n]$ z $h[n-k]$

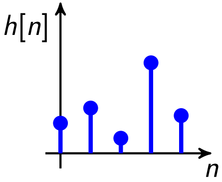


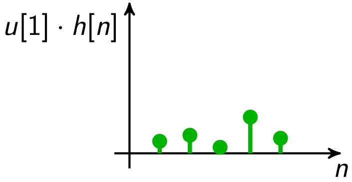
$$y[n] = u[0] \cdot h[n]$$



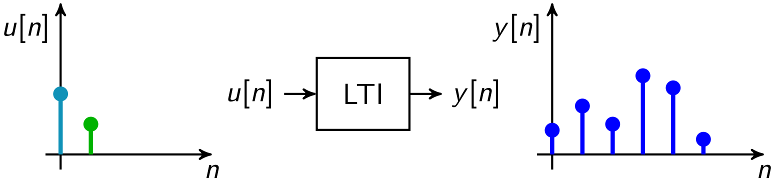
Časově invariantní systém

Superpozice odezvy $y[n]$ z $h[n-k]$



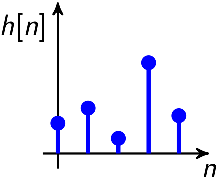


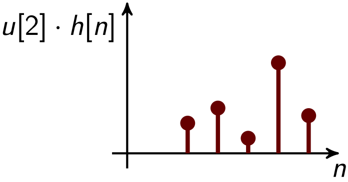
$$y[n] = u[0] \cdot h[n] + u[1] \cdot h[n-1]$$



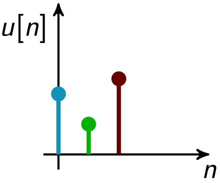
Časově invariantní systém

Superpozice odezvy $y[n]$ z $h[n-k]$

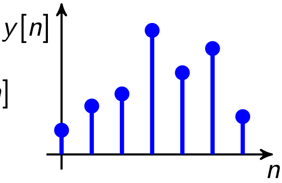




$$y[n] = u[0] \cdot h[n] + u[1] \cdot h[n-1] + u[2] \cdot h[n-2]$$



$$u[n] \longrightarrow \boxed{\text{LTI}} \longrightarrow y[n]$$



Konvoluce

V důsledku časové invariance dostáváme z rovnice **konvoluční sumu**

$$y[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} h[n-m] \cdot u[m] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k] \cdot u[n-k],$$

kterou pro úsporu místa značíme

$$y[n] = h[n] * u[n].$$

Pozor: nejde o násobení!

$$h[n] \neq \frac{y[n]}{u[n]}$$

Příklad

Příklad (Časově invariantní systém)

Uvažujme mikroekonomický systém variace ceny popsaný diferenční rovnici

$$y[n] + a\,y[n-1] = u[n].$$

Protože její koeficienty nezávisí na čase, tj. a je konstantní a není funkcí n, zachovává tato rovnice tvar při záměně $n \to n - m$. Impulsní odezva je potom

$$h[n] = (-a)^n \mathbf{1}[n].$$

Příklad

Příklad (Časově proměnný systém)

Uvažujme nyní obměněnou diferenční rovnici

$$y[n] + n \cdot y[n-1] = u[n].$$

Koeficient u $y[n-1]$ závisí na čase a tato rovnice nezachovává tvar při záměně $n \to n - m$. Impulsní odezvu lze psát ve tvaru

$$h[n] = (-1)^n \, n! \, \mathbf{1}[n].$$

Kauzální systém

Systém je **kauzální**, pokud jeho výstup závisí pouze na současných a minulých hodnotách vstupů.

Výstupní signál $y[n]$ kauzálního systému tedy závisí pouze na $\{u[n], u[n-1], u[n-2], \ldots\}$. V konvoluční sumě proto

$$
\begin{aligned}
y[n] &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]\, u[n-k] \\
&= \underbrace{\sum_{k=-\infty}^{-1} h[k]\, u[n-k]}_{0} + \sum_{k=0}^{\infty} h[k]\, u[n-k]
\end{aligned}
$$

musíme položit všechny členy impulsní odezvy $h[n] = 0$ pro $n < 0$.

Kauzální systém

Konvoluční suma pro lineární, časově invariantní a kauzální systém má tvar

$$y[n] = \sum_{k=0}^{\infty} h[k] \cdot u[n-k] = \sum_{k=-\infty}^{0} u[k] \cdot h[n-k].$$

Jestliže navíc budeme požadovat, aby vstupní a výstupní signály měly dobře definovaný počátek, tj. aby $\forall n < 0 : u[n] = 0, y[n] = 0$ (oba signály mohou mít nenulové členy pouze pro $n \geq 0$), potom platí

$$y[n] = \sum_{k=0}^{n} h[k] \cdot u[n-k] = \sum_{k=0}^{n} h[n-k] \cdot u[k].$$

Spojité systémy

Impulsní a přechodová odezva

Definice (Impulsní odezva)

Odezvu systému na Diracův impuls $\delta(t)$ budeme nazývat **impulsní odezva** a značit $h(t)$,

$$h(t) = \mathcal{S}\{\delta(t)\}$$
$$h(t,\tau) = \mathcal{S}\{\delta(t-\tau)\}\,.$$

Definice (Přechodová odezva)

Odezvu systému na jednotkový skok $\mathbf{1}(t)$ budeme nazývat **přechodová odezva** a značit $s(t)$,

$$s(t) = \mathcal{S}\{\mathbf{1}(t)\} = \mathcal{S}\left\{\int_0^t \delta(t-\tau)\,\mathrm{d}t\right\}.$$

Spojité systémy
Konvoluce

V případě spojitého casu postupujeme podobně a odvodíme pro lineární časově invariantní systém konvoluční integrál

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)u(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau = \int_{-\infty}^{\infty} h(t-\tau)\cdot u(\tau)\,\mathrm{d}\tau.$$

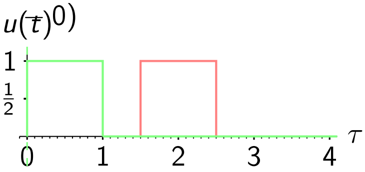
Operaci často zapisujeme ve zjednodušené formě jako

$$y(t) = h(t) * u(t).$$

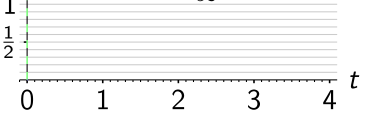
Opět připomínáme, že se v tomto zápisu nejedná o násobení!

Spojité systémy

Příklad konvoluce



$$u(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} u(\tau)\, h(t-\tau)\ \mathrm{d}\tau$$



$$\boxed{u(\tau)h(0-\tau)}$$

Spojitý systém

Pro $u(t) = \delta(t)$ platí pro lineární a časové invariantní systém samozřejmě

$$y(t) = \mathcal{S}\{u(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) \cdot \delta(t - \tau) \, \mathrm{d}\tau = h(t).$$

Spojité systémy
Kauzální systém

Výstupní signál $y(t)$ spojitého kauzálního systému závisí pouze na hodnotách vstupů pro předešlé časové okamžiky. Z důvodu, které klademe na kauzální chování systému, přejde konvoluční integrál na tvar

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)\, u(t-\tau)\, \mathrm{d}\tau$$
$$= \underbrace{\int_{-\infty}^{0} h(\tau)\, u(t-\tau)\, \mathrm{d}\tau}_{0} + \int_{0}^{\infty} h(\tau)\, u(t-\tau)\, \mathrm{d}\tau$$

a hodnoty impulsní odezvy pro $t < 0$ uvažujeme opět $h(t) = 0$.

Spojité systémy

Konvoluce pro kauzální LTI systém

Konvoluční integrál pro lineární, časově invariantní a kauzální systém má tvar

$$y(t) = \int_{0}^{\infty} h(\tau) \cdot u(t-\tau)\, \mathrm{d}\tau = \int_{-\infty}^{0} u(\tau) \cdot h(t-\tau)\, \mathrm{d}\tau.$$

Jestliže navíc budeme požadovat, aby vstupní a výstupní signály měly dobře definovaný počátek, tj. aby $\forall t < 0 : u(t) = 0, y(t) = 0$ (oba signály mohou být nenulové členy pouze pro $t \geq 0$), potom platí

$$y(t) = \int_{0}^{t} h(\tau) \cdot u(t-\tau)\, \mathrm{d}\tau = \int_{0}^{t} u(\tau) \cdot h(t-\tau)\, \mathrm{d}\tau.$$

Charakteristiky systémů

Autonomní systém

Definice (Autonomní systém)

Za autonomní systém považujeme takový, který **nemá vstup**. Diskrétní autonomní systém je popisuje tedy například diferenční rovnice vnějšího popisu

$$y[n+1] + a\,y[n] = 0.$$

Výstup autonomního systému je odezvou na počáteční podmínky.

V případě, že systém má vstup $u[n]$, tedy

$$y[n] + a\,y[n-1] = u[n],$$

systém pokládáme za neautonomní.