# Vnější a vnitřní popis systémů

## Modelování systémů a procesů (11MSP)

Bohumil Kovář, Jan Přikryl, Miroslav Vlček

Ústav aplikované matematiky
ČVUT v Praze, Fakulta dopravní

4. přednáška 11MSP
pondělí 16. března 2015

verze: 2015-03-15 14:38

# Obsah přednášky

1. Vnější a vnitřní popis systému
   - Systém druhého řádu
   - Obecný systém $n$-tého řádu
2. Příklad
3. Diskrétní systémy
4. Příklad stavového modelu z reálného světa

# Systém druhého řádu

Diferenciální rovnice druhého řádu s počátečními podmínkami ve tvaru

$$y''(t) + a_1\, y'(t) + a_0\, y(t) = u(t) \tag{1}$$

$$y(0) = c_1 \quad \text{a} \quad y'(0) = c_2, \tag{2}$$

udává vztah vstupu $u(t)$ a výstupu $y(t)$ spojitého lineárního stacionárního systému.

# Systém druhého řádu

Tento vnější popis převedeme na stavový popis volbou stavového vektoru

$$x_1(t) = y(t),$$
$$x_2(t) = y'(t).$$

# Systém druhého řádu

Dosadíme za $y'(t) = x_2(t)$ a $y''(t) = x_2'(t)$ do původní diferenciální rovnice a obdržíme

$$x_2'(t) + a_1\, x_2(t) + a_0\, x_1(t) = u(t).$$

Současně platí

$$x_1'(t) = y'(t) = x_2(t).$$

# Systém druhého řádu

Dostáváme tak

$$\begin{bmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

respektive

$$\begin{bmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \end{bmatrix} = \mathbf{A} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \mathbf{B} u(t)$$

kde

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

# Systém druhého řádu

Rovnici pro výstup vyjádříme z definice stavových veličin

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + 0\, u(t).$$

Matice $\mathbf{D}$ je nulová a jedná se o tak zvaný **ryzí systém**.
Pro výstupní matici dostáváme

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Počáteční podmínky se transformují do stavového popisu jako

$$y(0) = x_1(0) = c_1 \quad \text{a} \quad y'(0) = x_2(0) = c_2.$$

# Stavové rovnice z diferenciální rovnice $n$-tého řádu

Předpokládejme opět, že systém je popsán diferenciální rovnicí

$$y^{(n)}(t) + a_{n-1}y^{(n-1)}(t) + \cdots + a_1 y^{(1)}(t) + a_0 y(t) = u(t)$$

Ukážeme nyní, jak se koeficienty diferenciální rovnice objeví ve stavových maticích. Postup je zobecněním předcházejícího příkladu.

# Stavové rovnice z diferenciální rovnice $n$-tého řádu

Stavové veličiny volíme jako derivace hledaného řešení $y(t)$ takto

$$
\begin{aligned}
x_1(t) &= y(t),\\
x_2(t) &= y'(t),\\
x_3(t) &= y''(t),\\
x_4(t) &= y^{(3)}(t),\\
&\vdots\\
x_n(t) &= y^{(n-1)}(t),
\end{aligned}
$$

# Stavové rovnice z diferenciální rovnice $n$-tého řádu

Ze soustavy a diferenciální rovnice plyne postupně

$$\begin{aligned}
x_1'(t) &= x_2(t),\\
x_2'(t) &= x_3(t),\\
&\vdots\\
x_{n-1}'(t) &= x_n(t),\\
x_n'(t) &= u(t) - a_0 x_1(t) - a_1 x_2(t) - \ldots - a_{n-1} x_n(t).
\end{aligned}$$

# Stavové rovnice z diferenciální rovnice $n$-tého řádu

$$\begin{bmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \\ x_3'(t) \\ \vdots \\ x_n'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ & & \vdots & & & \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & -a_3 & \ldots & -a_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

## Stavové rovnice z diferenciální rovnice n-tého řádu

V souladu s obecným značením pro stavový popis LTI systémů označíme

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ & & \vdots & & & \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & -a_3 & \dots & -a_{n-1} \end{bmatrix}$$

a

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}.$$

# Stavové rovnice z diferenciální rovnice n-tého řádu

Dále platí

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix},$$

takže

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

a

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}.$$

# Stavové rovnice z diferenciální rovnice n-tého řádu

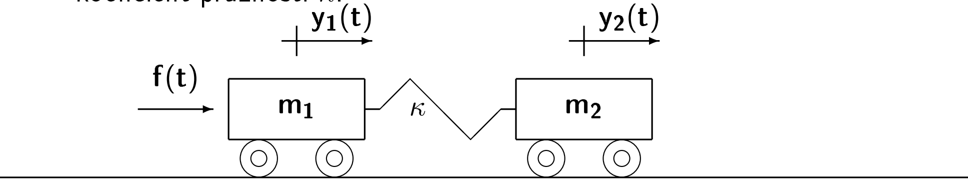
Počáteční podmínky mají tvar

$$
\begin{aligned}
y(0) &= x_1(0) = & c_1\,, \\
y'(0) &= x_2(0) = & c_2\,, \\
y''(0) &= x_3(0) = & c_3\,, \\
&\vdots \\
y^{(n-1)}(0) &= x_n(0) = & c_n\,.
\end{aligned}
$$

# Obsah přednášky

# Příklad

Dva vozíky s hmotností $m_1$ a $m_2$ jsou spojeny pružinou, která má koeficient pružnosti $\kappa$.




Podle obrázku působí na první vozík hnací síla $f(t)$.

Polohy vozíků jsou $y_1(t)$ a $y_2(t)$, takže při zanedbání tření mají pohybové rovnice tvar

$$
\begin{aligned}
m_1\, y_1''(t) &= f(t) + \kappa\,(y_2(t) - y_1(t)) \\
m_2\, y_2''(t) &= -\kappa\,(y_2(t) - y_1(t))
\end{aligned}
$$

Máme sestavit stavové rovnice pro systém dvou vozíků.

Položíme

$$x_1(t) = y_1(t), \qquad x_2(t) = y_2(t),$$
$$x_3(t) = y_1'(t), \qquad x_4(t) = y_2'(t)$$

a dostáváme soustavu rovnic

$$\begin{aligned}
x_1'(t) &\equiv y_1'(t) = x_3(t),\\
x_2'(t) &\equiv y_2'(t) = x_4(t),\\
x_3'(t) &\equiv y_1''(t) = \frac{\kappa}{m_1}(x_2(t) - x_1(t)) + \frac{1}{m_1} f(t),\\
x_4'(t) &\equiv y_2''(t) = -\frac{\kappa}{m_2}(x_2(t) - x_1(t)).
\end{aligned}$$

kterou již snadno převedeme na stavový popis

$$\begin{bmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \\ x_3'(t) \\ x_4'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{\kappa}{m_1} & \frac{\kappa}{m_1} & 0 & 0 \\ \frac{\kappa}{m_2} & -\frac{\kappa}{m_2} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{m_1} \\ 0 \end{bmatrix} f(t)$$

a

$$y = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \end{bmatrix}.$$

Máme matice stavového popisu ve tvaru

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{\kappa}{m_1} & \frac{\kappa}{m_1} & 0 & 0 \\ \frac{\kappa}{m_2} & -\frac{\kappa}{m_2} & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{m_1} \\ 0 \end{bmatrix}$$

a

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

# Obsah přednášky

# Systém druhého řádu

Diferenční rovnice druhého řádu s počátečními podmínkami ve tvaru

$$y[n+2] + \alpha_1\, y[n+1] + \alpha_0\, y[n] = u[n] \tag{3}$$

$$y(0) = \gamma_1 \quad \text{a} \quad y(1) = \gamma_2, \tag{4}$$

udává vztah vstupu $u[n]$ a výstupu $y[n]$ diskrétního LTI systému

# Systém druhého řádu

Tento vnější popis převedeme na stavový popis volbou stavového vektoru

$$\begin{aligned} x_1[n] &= y[n]\,, \\ x_2[n] &= y[n+1]\,. \end{aligned}$$

# Systém druhého řádu

Dosadíme za $y[n+1] = x_2[n]$ a $y[n+2] = x_2[n+1]$ do původní diferenční rovnice a je

$$x_2[n+1] = -\alpha_1\, x_2[n] - \alpha_0\, x_1[n] + u[n]\,.$$

Současně platí

$$x_1[n+1] = y[n+1] = x_2[n]\,.$$

# Systém druhého řádu

Dostáváme tak

$$\begin{bmatrix} x_1[n+1] \\ x_2[n+1] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\alpha_0 & -\alpha_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1[n] \\ x_2[n] \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u[n]$$

nebo

$$\begin{bmatrix} x_1[n+1] \\ x_2[n+1] \end{bmatrix} = \mathbf{M} \begin{bmatrix} x_1[n] \\ x_2[n] \end{bmatrix} + \mathbf{N}\, u[n],$$

resp.

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\alpha_0 & -\alpha_1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{N} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

# Systém druhého řádu

Rovnici pro výstup vyjádříme z definice stavových veličin

$$y[n] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1[n] \\ x_2[n] \end{bmatrix} + 0\, u[n]\,.$$

Matice **D** je tedy nulová a pro výstupní matici dostáváme

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}\,.$$

Lineární systém, který má matici **D** nulovou, se nazývá ryzí systém. Je vhodné podotknout, že počáteční podmínky se transformují do stavového popisu takto

$$y(0) = \gamma_1 = x_1(0) \quad \text{a} \quad y(1) = \gamma_2 = x_2(0).$$

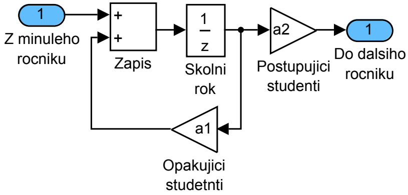
# Obsah přednášky

# Model fakulta

Vznik nové fakulty a hledání odpovědí na různé otázky související s počty studentů jsou ukázkou diskrétního stavového systému, ve kterém složka stavového vektoru $x_i$ reprezentuje počet studentů v $i$-tém ročníku. Předpokládejme dále, že do prvního ročníku budeme přijímat pravidelně každý rok $u[n]$ studentů.

- Jestliže z každého ročníku postoupí bez potíží $a_1 x_i$ studentů, opakuje $a_2 x_i$ studentů a fakultu opustí $a_3 x_i$ studentů, kde $a_1 + a_2 + a_3 = 1$, nalezněte počty absolventů, pokud úspěšnost u státních závěrečných zkoušek je a, pro které platí $a \equiv a_1^{(5)}$.
- Nalezněte celkový počet studentů, kteří studují v jednom akademickém roce na fakultě.

# Model fakulta



# Model fakulta

Stavový popis této vzorové situace je

$$\begin{bmatrix} x_1[n+1] \\ x_2[n+1] \\ x_3[n+1] \\ x_4[n+1] \\ x_5[n+1] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_2^{(1)} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_1^{(1)} & a_2^{(2)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_1^{(2)} & a_2^{(3)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_1^{(3)} & a_2^{(4)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_1^{(4)} & a_2^{(5)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1[n] \\ x_2[n] \\ x_3[n] \\ x_4[n] \\ x_5[n] \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u[n]$$

$$y[n] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1[n] \\ x_2[n] \\ x_3[n] \\ x_4[n] \\ x_5[n] \end{bmatrix}.$$

# Model fakulta

Nebo se můžeme ptát, jaký je celkový počet studentů na fakultě v určitém roce. Potom pro výstup obdržíme

$$y[n] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1[n] \\ x_2[n] \\ x_3[n] \\ x_4[n] \\ x_5[n] \end{bmatrix}.$$