

# Laplaceova transformace

## Modelování systémů a procesů (11MSP)

Bohumil Kovář, Jan Příkryl, Miroslav Vlček

Ústav aplikované matematiky  
ČVUT v Praze, Fakulta dopravní

5. přednáška 11MSP  
pondělí 23. března 2015

verze: 2015-03-23 11:03



# Obsah přednášky

- 1 Fourierova transformace  
Komplexní exponenciála
- 2 Matematické nářadí - Laplaceova transformace
- 3 Dopředná Laplaceova transformace
- 4 Příklady použití Laplaceovy transformace



# Fourierova transformace

## Komplexní exponenciála

Odezva LTI systému na komplexní exponenciálu je ta samá komplexní exponenciála, pouze se změnou amplitudou:

$$\text{spojitý systém: } e^{st} \longrightarrow H(s) \cdot e^{st}$$

$$\text{diskrétní systém: } z^n \longrightarrow H(z) \cdot z^n$$

kde  $H(s)$  respektive  $H(z)$  je komplexní škálovací faktor, jež obecně může záviset na komplexní proměnné  $s$  nebo  $z$ .

Signál, pro nějž je výstup systému roven vstupu až na násobení konstantou, nazýváme **vlastní funkce** systému a odpovídající škálovací faktor pak nazýváme **vlastní číslo** systému.



# Fourierova transformace

## Komplexní exponenciála

Uvažujme spojité LTI systém s impulsní odezvou  $h(t)$  a vstupním signálem  $u(t) = e^{st}$ , kde  $s \in \mathbb{C}$ :

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) u(t - \tau) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) e^{s(t-\tau)} d\tau.$$

Platí  $e^{s(t-\tau)} = e^{st} e^{-s\tau}$  a člen  $e^{st}$  nezávisí na integrandu, je tedy

$$y(t) = e^{st} \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) e^{-s\tau} d\tau.$$



# Fourierova transformace

## Komplexní exponenciála

$$y(t) = H(s) \cdot e^{st},$$

kde  $H(s)$  je komplexní konstanta závisující jednak na  $s$  a jednak na impulsní odezvě systému vztahem

$$H(s) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) e^{-s\tau} d\tau.$$



# Obsah přednášky

- ① Fourierova transformace
- ② Matematické nářadí - Laplaceova transformace**
- ③ Dopředná Laplaceova transformace
- ④ Příklady použití Laplaceovy transformace



# Laplaceova transformace

## Odkud se bere?

Pro imaginární  $s$  odpovídá  $H(s)$  Fourierově transformaci signálu impulsní odezvy  $h(t)$ .

Pokud budeme uvažovat namísto ryze imaginárních komplexních hodnot obecná komplexní čísla  $p$ , bude výsledkem generalizace Fourierovy transformace – tak zvaná **Laplaceova transformace**.

Bude potom

$$e^{pt} \longrightarrow H(p) \cdot e^{pt}, \quad p = a + bi$$

a  $H(p)$  odpovídá Laplaceově transformaci signálu impulsní odezvy  $h(t)$ .



# Obsah přednášky

- 1 Fourierova transformace
- 2 Matematické nářadí - Laplaceova transformace
- 3 Dopředná Laplaceova transformace**
  - Důvody použití
  - Definice
  - Vlastnosti
  - Tabulky Laplaceovy transformace
- 4 Příklady použití Laplaceovy transformace





# Laplaceova transformace

## Důvody pro použití

Laplaceova transformace významně zjednodušuje některé operace v oblasti analýzy spojitých LTI systémů, například

- **derivace**  $\Rightarrow$  **násobení** proměnnou  $p$
- **integrace**  $\Rightarrow$  **dělení** proměnnou  $p$
- **diferenciální rovnice**  $n$ -tého řádu s konstantními koeficienty  $\Rightarrow$  **algebraické rovnice**  $n$ -tého řádu
- **konvoluce**  $f(t) * g(t) \Rightarrow$  **součin**  $F(p) \cdot G(p)$



# Laplaceova transformace

## Definice

### Definice (Laplaceova transformace)

Laplaceova transformace funkce  $f(t)$ , která je **nanejvýš polynomiálního růstu**

$$f(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \dots + a_n t^n$$

je definována integrálem

$$F(p) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-pt} dt \equiv \mathcal{L}\{f(t)\}.$$

Funkci  $f(t)$  nazýváme **vzorem** a funkci  $F(p)$  Laplaceovým **obrazem**.



# Laplaceova transformace

## Definice inverzní transformace

Zpětná Laplaceova transformace má tvar integrálu podél křivky v komplexní rovině  $p$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} F(p) e^{pt} dp \equiv \mathcal{L}^{-1} \{F(p)\}.$$

Praktické počítání zpětné Laplaceovy transformace vychází z residuové věty, která pro racionálně lomené funkce v proměnné  $p$  vede v operátorovém počtu na **Heavisideovu větu**.



(Oliver Heaviside,  
1850-1925)



# Laplaceova transformace

## Vlastnosti - linearita

### Věta (Linearita)

Laplaceova transformace je **lineární**:

$$\mathcal{L} \left\{ \sum_k a_k f_k(t) \right\} = \sum_k a_k \mathcal{L} \{ f_k(t) \} = \sum_k a_k F_k(p)$$

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \sum_m b_m F_m(p) \right\} = \sum_m b_m \mathcal{L}^{-1} \{ F_m(p) \} = \sum_m b_m f_m(t)$$



# Laplaceova transformace

## Vlastnosti – změna měřítka

Věta (O změně měřítka)

Pro  $F(p) = \mathcal{L}\{f(t)\}$  je

$$\mathcal{L}\{f(at)\} = \frac{1}{a} F\left(\frac{p}{a}\right)$$

Důkaz.

Substitucí  $at = \tau$

$$\mathcal{L}\{f(at)\} = \int_0^{\infty} f(at)e^{-pt} dt = \int_0^{\infty} f(\tau)e^{-\frac{p}{a}\tau} \frac{1}{a} d\tau = \frac{1}{a} F\left(\frac{p}{a}\right)$$

□

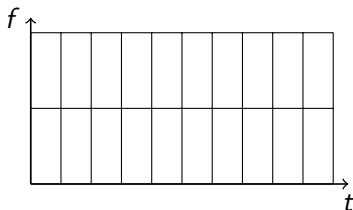
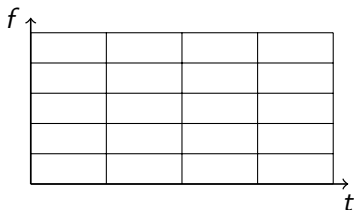


# Laplaceova transformace – vlastnosti

Věta o změně měřítka platí samozřejmě i obráceně:

$$\frac{1}{b} f\left(\frac{t}{b}\right) = \mathcal{L}^{-1}\{F(bp)\}$$

Všechny integrální transformace (Laplace, Fourier, Wavelets) podléhají Heisenbergově principu neurčitosti v časovém a kmitočtovém rozlišení.



# Laplaceova transformace

## Vlastnosti – posunutí

### Věta (O posunutí)

Je-li  $F(p) = \mathcal{L}\{f(t)\}$ , pak

$$\mathcal{L}\{\mathbf{1}(t - \tau)f(t - \tau)\} = e^{-p\tau} \mathcal{L}\{f(t)\} = e^{-p\tau} F(p).$$

### Důkaz.

Substitucí  $t - \tau = \vartheta$  obdržíme

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{f(t - \tau)\} &= \int_0^{\infty} f(t - \tau)e^{-pt} dt = \int_{-\tau}^{\infty} f(\vartheta)e^{-p(\tau + \vartheta)} d\vartheta \\ &= e^{-p\tau} \int_{-\tau}^{-0} f(\vartheta)e^{-p\vartheta} d\vartheta + e^{-p\tau} \int_0^{\infty} f(\vartheta)e^{-p\vartheta} d\vartheta \\ &= e^{-p\tau} \int_0^{\infty} f(\vartheta)e^{-p\vartheta} d\vartheta \equiv e^{-p\tau} F(p)\end{aligned}$$



# Laplaceova transformace

## Vlastnosti – transformace konvoluce

### Věta (O konvoluci)

$$\mathcal{L}\{f(t) * g(t)\} = \mathcal{L}\left\{\int_0^{\infty} f(t - \tau) \cdot g(\tau) d\tau\right\} = F(p) \cdot G(p)$$

Důkaz se snáze provádí v diskrétním čase.

### Důsledek

$$\mathcal{L}\left\{y(t) = \int_0^{\infty} h(\tau) \cdot u(t - \tau) d\tau\right\} \Leftrightarrow Y(p) = H(p) \cdot U(p)$$





# Laplaceova transformace

## Vlastnosti – obraz derivace

Věta (O obrazu derivace funkce)

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(p)$$

$$\mathcal{L}\left\{\frac{d}{dt}f(t)\right\} = pF(p) - f(0)$$

$$\mathcal{L}\left\{\frac{d^2}{dt^2}f(t)\right\} = p^2F(p) - pf(0) - \frac{d}{dt}f(0)$$

$$\vdots$$

$$\mathcal{L}\left\{\frac{d^n}{dt^n}f(t)\right\} = p^nF(p) - p^{n-1}f(0) - p^{n-2}\frac{d}{dt}f(0) \dots - f^{(n-1)}(0)$$



# Laplaceova transformace – vlastnosti

## Důkaz.

Integrovaním per partes,  $\int_a^b u'v = [uv]_a^b - \int_a^b uv'$ :

$$\begin{aligned} \mathcal{L} \left\{ \frac{d}{dt} f(t) \right\} &= \int_0^{\infty} \frac{d}{dt} f(t) e^{-pt} dt \\ &= \left[ f(t) e^{-pt} \right]_0^{\infty} - (-p) \int_0^{\infty} f(t) e^{-pt} dt \\ &= -f(0) + pF(p). \end{aligned}$$

Opakováním tohoto procesu získáme postupně

$$\mathcal{L} \left\{ \frac{d^2}{dt^2} f(t) \right\} = p^2 F(p) - pf(0+) - \frac{d}{dt} f(0+)$$



# Laplaceova transformace – vlastnosti

Věta (O obrazu integrálu funkce)

$$\mathcal{L} \left\{ \int_0^t f(\tau) d\tau \right\} = \frac{1}{p} F(p)$$

Důkaz.

Integrováním per partes,  $\int_a^b uv' = [uv]_a^b - \int_a^b u'v$ :

$$\begin{aligned} \mathcal{L} \left\{ \int_0^t f(\tau) d\tau \right\} &= \int_0^\infty \left( \int_0^t f(\tau) d\tau \right) e^{-pt} dt \\ &= \frac{1}{-p} \left[ \int_0^t f(\tau) d\tau e^{-pt} \right]_0^\infty - \frac{1}{-p} \int_0^\infty f(t) e^{-pt} dt \\ &= \frac{1}{p} F(p). \end{aligned}$$



## Tabulky Laplaceovy transformace (1/4)

$f(t) = \mathcal{L}^{-1} \{F(p)\}$	$F(p) = \mathcal{L} \{f(t)\}$
$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} F(p) e^{pt} dp$	$F(p) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-pt} dt$
$\delta(t)$	1
$\mathbf{1}(t)$	$\frac{1}{p}$



# Tabulky Laplaceovy transformace (2/4)

$f(t) = \mathcal{L}^{-1} \{F(p)\}$	$F(p) = \mathcal{L} \{f(t)\}$
$e^{-\alpha t}$	$\frac{1}{p + \alpha}$
$\sin \omega t$	$\frac{\omega}{p^2 + \omega^2}$
$\cos \omega t$	$\frac{p}{p^2 + \omega^2}$



# Tabulky Laplaceovy transformace (3/4)

$f(t) = \mathcal{L}^{-1} \{F(p)\}$	$F(p) = \mathcal{L} \{f(t)\}$
$e^{-\alpha t} \sin \omega t$	$\frac{\omega}{(p + \alpha)^2 + \omega^2}$
$e^{-\alpha t} \cos \omega t$	$\frac{p + \alpha}{(p + \alpha)^2 + \omega^2}$
$t^n$	$\frac{n!}{p^{n+1}}$



## Tabulky Laplaceovy transformace (4/4)

$f(t) = \mathcal{L}^{-1} \{F(p)\}$	$F(p) = \mathcal{L} \{f(t)\}$
$t^n e^{-\alpha t}$	$\frac{n!}{(p + \alpha)^{n+1}}$
$t \cos \omega t$	$\frac{p^2 - \omega^2}{(p^2 + \omega^2)^2}$
$t \sin \omega t$	$\frac{2\omega p}{(p^2 + \omega^2)^2}$



# Obsah přednášky

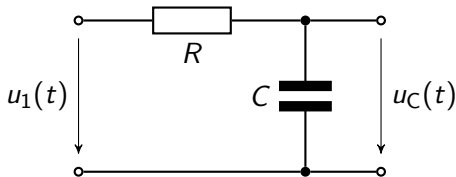
- 1 Fourierova transformace
- 2 Matematické nářadí - Laplaceova transformace
- 3 Dopředná Laplaceova transformace
- 4 Příklady použití Laplaceovy transformace
  - Integrační RC článek
  - Impulsní odezva LTI systému





# Laplaceova transformace – příklad 1

Hledejme odezvu integračního RC článku na vstupní signál.



Diferenciální rovnici jsme si již odvodili v první přednášce:

$$RC \frac{d}{dt} u_C(t) + u_C(t) = u_1(t).$$



# Laplaceova transformace – příklad 1

Pro  $\alpha = \frac{1}{RC}$  a vstupní  $u_1(t) = U_0 \cdot \mathbf{1}(t)$  je

$$\frac{d}{dt}y(t) + \alpha y(t) = \alpha U_0 \cdot \mathbf{1}(t).$$

Protože je to diferenciální rovnice s konstantními koeficienty, můžeme použít Laplaceovu transformaci a její vlastnosti

$$\mathcal{L} \left\{ \frac{d}{dt}y(t) \right\} + \mathcal{L} \{ \alpha y(t) \} = \mathcal{L} \{ \alpha U_0 \cdot \mathbf{1}(t) \},$$

a obdržíme algebraickou rovnici pro neznámou  $Y(p)$

$$pY(p) - y(0) + \alpha Y(p) = \alpha U_0 \cdot \frac{1}{p}.$$



# Laplaceova transformace – příklad 1

Rovnici upravíme tak, že neznámá bude na levé straně a všechny známé konstanty na straně pravé

$$(p + \alpha)Y(p) = \frac{\alpha U_0}{p} + y(0).$$

a nalezneme řešení v rovině  $p$

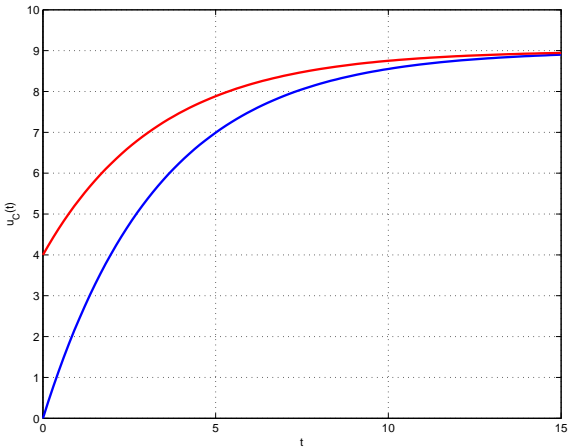
$$Y(p) = \frac{\alpha U_0}{p(p + \alpha)} + \frac{y(0)}{p + \alpha} = \frac{U_0}{p} - \frac{U_0}{p + \alpha} + \frac{y(0)}{p + \alpha}$$

S pomocí tabulek pak můžeme nalézt pro  $t > 0$  řešení

$$y(t) = U_0(1 - e^{-\alpha t}) + y(0)e^{-\alpha t}$$



# Laplaceova transformace – příklad 1



# Laplaceova transformace – příklad 2

Uvažujte LTI systém, který je pro  $t > 0$  popsán naměřenými hodnotami vstupu

$$u(t) = e^{-t} + e^{-3t}$$

a výstupu

$$y(t) = te^{-3t}.$$

Jak nalezneme **impulsní odezvu**?



# Laplaceova transformace – příklad 2

Protože platí

$$U(p) = \frac{1}{p+1} + \frac{1}{p+3} = 2 \frac{p+2}{(p+1)(p+3)}$$

$$Y(p) = \frac{1}{(p+3)^2}$$

a protože

$$Y(p) = H(p) \cdot U(p),$$

je

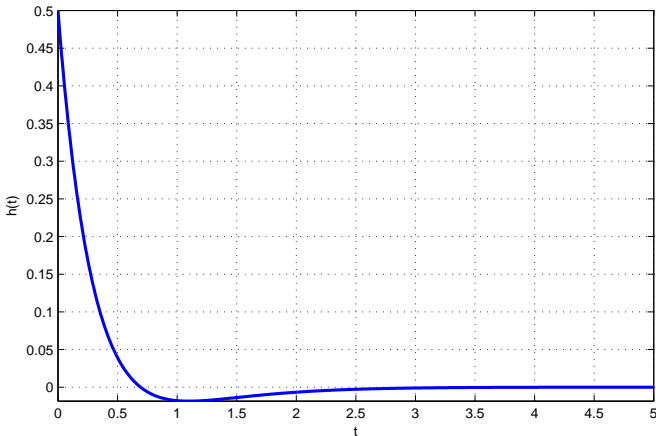
$$H(p) = \frac{Y(p)}{U(p)} = \frac{1}{2} \frac{p+1}{(p+2)(p+3)} = \frac{1}{2} \left[ \frac{2}{p+3} - \frac{1}{p+2} \right].$$



# Laplaceova transformace – příklad 2

S pomocí tabulek pak můžeme nalézt pro  $t > 0$  řešení

$$h(t) = e^{-3t} - \frac{1}{2}e^{-2t}.$$



# Přeji hezký jarní den

