Inverzní Laplaceova transformace

Modelování systémů a procesů (11MSP)

Bohumil Kovář, Jan Přikryl, Miroslav Vlček

Ústav aplikované matematiky
ČVUT v Praze, Fakulta dopravní

6. přednáška 11MSP
čtvrtek 30. března 2015

verze: 2015-03-27 16:59

Obsah přednášky

Zpětná Laplaceova transformace
Definice

Již jsme si řekli, že zpětná Laplaceova transformace má tvar integrálu podél křivky v komplexní rovině p

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} F(p)\, e^{pt}\, \mathrm{d}p \equiv \mathcal{L}^{-1}\left\{F(p)\right\}.$$

Pro racionální lomené funkce v proměnné p budeme postupovat jinak.

Jak na to?

$f(t) \Rightarrow$	$\Leftarrow \quad F(p)$
$e^{-\alpha t}$	$\dfrac{1}{p+\alpha}$
$e^{-\alpha t}\cos\omega t$ $= \dfrac{e^{-(\alpha-\imath\omega)t}+e^{-(\alpha+\imath\omega)t}}{2}$	$\dfrac{p+\alpha}{(p+\alpha)^2+\omega^2}$ $= \dfrac{1}{2}\left(\frac{1}{p+\alpha-\imath\omega}+\frac{1}{p+\alpha+\imath\omega}\right)$
$e^{-\alpha t}\sin\omega t$ $= \dfrac{e^{-(\alpha-\imath\omega)t}-e^{-(\alpha+\imath\omega)t}}{2\imath}$	$\dfrac{\omega}{(p+\alpha)^2+\omega^2}$ $= \dfrac{1}{2\imath}\left(\frac{1}{p+\alpha-\imath\omega}-\dfrac{1}{p+\alpha+\imath\omega}\right)$

Racionální lomená funkce

Rozklad na parciální zlomky

Obraz výstupu systému ve tvaru racionální lomené funkce,

$$R(p) = \frac{Q(p)}{N(p)} = \frac{b_m p^m + b_{m-1} p^{m-1} + \cdots + b_1 p + b_0}{a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \cdots + a_1 p + a_0}$$

Zlomek lze vyjádřit jako součet **parciálních zlomků**, což jsou jednoduché zlomky s konstantou v čitateli a jedním kořenem $N(p)$ ve jmenovateli.

Racionální lomená funkce

Rozklad na parciální zlomky

O racionální lomené funkci $\dfrac{Q(p)}{N(p)}$ říkáme, že má nulové body $p_{0\nu}$, jestliže $Q(p_{0\nu}) = 0$ a že má póly $p_{\infty\mu}$, jestliže $N(p_{\infty\mu}) = 0$.

Pokud má funkce $\dfrac{Q(p)}{N(p)}$ jednoduché póly, potom

$$N(p) = \prod_{\mu=1}^{n} (p - p_{\infty\mu}) = (p - p_{\infty 1})(p - p_{\infty 2}) \dots (p - p_{\infty n}).$$

Racionální lomená funkce I

Příklad

Příklad (Racionální lomená funkce)

Jestliže

$$N(p) = p^3 + 3p^2 + 6p + 4 = (p+1)(p^2 + 2p + 4)$$

určete rozklad na kořenové činitele.
Je samozřejmě

$$N(p) = (p+1)(p^2 + 2p + 4) = (p+1)(p+1+\imath\sqrt{3})(p+1-\imath\sqrt{3})$$

takže platí

$$N(p) = \prod_{\mu=1}^{3}(p - p_\mu) = (p-p_1)(p-p_2)(p-p_3).$$

Racionální lomená funkce II

Příklad

Příklad (Racionální lomená funkce)

Póly v tomto případě jsou

$$
\begin{aligned}
p_1 &= -1 \\
p_2 &= -1 - \imath\sqrt{3} \\
p_3 &= -1 + \imath\sqrt{3}
\end{aligned}
$$

a platí $N(p_1) \equiv N(-1) = 0$ atd.

Z tohoto příkladu plyne první krok, který musíme při zpětné Laplaceově transformaci provést: nalezení kořenů polynomu ve jmenovateli racionální funkce $N(p)$

Zpětná Laplaceova transformace

Rozklad racionální lomené funkce na parciální zlomky má tvar

$$\begin{aligned}\frac{Q(p)}{N(p)} &= \sum_{\mu=1}^{n} \frac{k_\mu}{p - p_{\infty\mu}}\\ &= \frac{k_1}{p - p_{\infty 1}} + \frac{k_2}{p - p_{\infty 2}} + \cdots + \frac{k_n}{p - p_{\infty n}}\\ &\equiv \frac{k_1}{p - p_1} + \frac{k_2}{p - p_2} + \cdots + \frac{k_n}{p - p_n},\end{aligned}$$

kde k_μ se nazývají **residua**.

Zpětná Laplaceova transformace

Pro residua platí

$$\begin{aligned} k_\mu &= \lim_{p \to p_{\infty\mu}} (p - p_{\infty\mu}) \frac{Q(p)}{N(p)} \\ &= Q(p_{\infty\mu}) \lim_{p \to p_{\infty\mu}} (p - p_{\infty\mu}) \frac{1}{N(p)} \\ &= Q(p_{\infty\mu}) \lim_{p \to p_{\infty\mu}} \frac{1}{\dfrac{N(p)}{p - p_{\infty\mu}}} \\ &= Q(p_{\infty\mu}) \frac{1}{N'(p_{\infty\mu})} \end{aligned}$$

Zpětná Laplaceova transformace

Pro jednoduchost budeme dále psát $p_{\infty\mu} \to p_\mu$. Protože platí

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{p-\alpha}\right\} = e^{\alpha t},$$

dostaneme

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{Q(p)}{N(p)}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\sum_{\mu=1}^{n}\frac{k_\mu}{p-p_\mu}\right\} = \sum_{\mu=1}^{n} k_\mu e^{p_\mu t}.$$

Zpětná Laplaceova transformace

Tím jsme dokázali tzv. **Heavisideův vzorec** pro zpětnou transformaci racionální lomené funkce s jednoduchými póly

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{Q(p)}{N(p)}\right\} = \sum_{\mu} \frac{Q(p_\mu)}{N'(p_\mu)} e^{p_\mu t}$$

Zpětná Laplaceova transformace I
Příklad

Příklad (Jednoduché póly)

Laplaceův obraz impulsní odezvy systému je

$$H(p) = \frac{6}{p^3 + 3p^2 + 6p + 4} = \frac{6}{(p+1)(p^2 + 2p + 4)}.$$

Určete $h(t)$.

Řešení:

Nejprve rozložíme

$$\begin{aligned} H(p) &= \frac{6}{(p+1)(p^2+2p+4)} \\ &= \frac{k_1}{p+1} + \frac{k_2}{p+1+\imath\sqrt{3}} + \frac{k_3}{p+1-\imath\sqrt{3}}. \end{aligned}$$

Zpětná Laplaceova transformace II
Příklad

Příklad (Jednoduché póly)

Platí

$$k_1 = \lim_{p \to -1} \frac{6}{p^2 + 2p + 4} = \frac{6}{1 - 2 + 4} = \frac{6}{3} = 2,$$

$$\begin{aligned} k_2 &= \lim_{p \to -1 - \imath\sqrt{3}} \frac{6}{(p+1)(p+1-\imath\sqrt{3})} \\ &= \frac{6}{(-1-\imath\sqrt{3}+1)(-1-\imath\sqrt{3}+1-\imath\sqrt{3})} \\ &= \frac{6}{(-\imath\sqrt{3})(-\imath 2\sqrt{3})} = -1, \end{aligned}$$

Zpětná Laplaceova transformace III

Příklad

Příklad (Jednoduché póly)

$$
\begin{aligned}
k_3 &= \lim_{p \to -1-\imath\sqrt{3}} \frac{6}{(p+1)(p+1+\imath\sqrt{3})} \\
&= \frac{6}{(-1+\imath\sqrt{3}+1)(-1+\imath\sqrt{3}+1+\imath\sqrt{3})} \\
&= \frac{6}{(\imath\sqrt{3})(\imath 2\sqrt{3})} = -1.
\end{aligned}
$$

Zpětná Laplaceova transformace

Co s násobnými póly?

Jestliže $N(p) = (p - p_1)^{\beta_1}(p - p_2)^{\beta_2} \ldots (p - p_n)^{\beta_n}$ má násobné kořeny s násobností β_i, musíme předchozí postup modifikovat, protože platí

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}\left\{e^{-\alpha t}\right\} &= \frac{1}{p+\alpha} \\
\mathcal{L}\left\{te^{-\alpha t}\right\} &= \frac{1!}{(p+\alpha)^2} \\
\mathcal{L}\left\{t^2e^{-\alpha t}\right\} &= \frac{2!}{(p+\alpha)^3} \\
&\vdots \\
\mathcal{L}\left\{t^ne^{-\alpha t}\right\} &= \frac{n!}{(p+\alpha)^{n+1}}
\end{aligned}
$$

Zpětná Laplaceova transformace

Co s násobnými póly?

Je zřejmé, že v inverzní transformaci hrají výsadní roli póly racionální lomené funkce. Proto se v dalším můžeme zabývat pouze takovými racionálně lomenými funkcemi, jejichž čitatel je jednotkový

$$H(p) = \frac{1}{N(p)}.$$

Jestliže tedy

$$N(p) = (p - p_1)^{\beta_1}(p - p_2)^{\beta_2} \dots (p - p_n)^{\beta_n}$$

má násobné kořeny, potom inverzní Laplaceova transformace má tvar

Zpětná Laplaceova transformace

Co s násobnými póly?

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{N(p)}\right\} = {} & e^{p_1 t}\left[k_1^{(1)} + k_1^{(2)}\frac{t}{1!} + \cdots + k_1^{(\beta_1)}\frac{t^{\beta_1-1}}{(\beta_1-1)!}\right] \\
& + e^{p_2 t}\left[k_2^{(1)} + k_2^{(2)}\frac{t}{1!} + \cdots + k_2^{(\beta_2)}\frac{t^{\beta_2-1}}{(\beta_2-1)!}\right] \\
\vdots \quad & + e^{p_n t}\left[k_n^{(1)} + k_n^{(2)}\frac{t}{1!} + \cdots + k_n^{(\beta_n)}\frac{t^{\beta_n-1}}{(\beta_n-1)!}\right]
\end{aligned}
$$

Zpětná Laplaceova transformace I

Co s násobnými póly?

Koeficienty $k_\mu^{(\beta_m)}$ můžeme získat následujícím postupem.

Příklad (Zpětná Laplaceova transformace násobných pólů)

Nechť například

$$N(p) = (p-2)^2(p+5)(p+7).$$

Rozklad na parciální zlomky hledáme ve tvaru

$$\frac{1}{(p-2)^2(p+5)(p+7)} = \frac{k_1^{(2)}}{(p-2)^2} + \frac{k_1^{(1)}}{p-2} + \frac{k_2}{p+5} + \frac{k_3}{p+7}$$

Zpětná Laplaceova transformace II

Co s násobnými póly?

Příklad (Zpětná Laplaceova transformace násobných pólů)

Vynásobíme rovnici členem $(p-2)^2$

$$\frac{(p-2)^2}{(p-2)^2(p+5)(p+7)}$$
$$= k_1^{(2)} + k_1^{(1)}(p-2) + \frac{k_2(p-2)^2}{p+5} + \frac{k_3(p-2)^2}{p+7}$$

a nalezneme limitu pro $p \to 2$,

$$\frac{1}{(2+5)(2+7)} = k_1^{(2)}$$

Zpětná Laplaceova transformace III

Co s násobnými póly?

Příklad (Zpětná Laplaceova transformace násobných pólů)

Odečteme-li výraz $\dfrac{1}{63(p-2)^2}$ od obou stran původní rovnice, dostáváme

$$\frac{1}{(p-2)^2(p+5)(p+7)} - \frac{1}{63(p-2)^2} = \frac{k_1^{(1)}}{p-2} + \frac{k_2}{p+5} + \frac{k_3}{p+7}$$

respektive rovnici

$$\frac{1}{63}\left[\frac{-(p+14)}{(p-2)(p+5)(p+7)}\right] = \frac{k_1^{(1)}}{p-2} + \frac{k_2}{p+5} + \frac{k_3}{p+7},$$

Zpětná Laplaceova transformace IV

Co s násobnými póly?

Příklad (Zpětná Laplaceova transformace násobných pólů)

pro kterou se výpočet k_μ redukuje na případ s jednoduchými póly a platí

$$\begin{aligned} k_1^{(1)} &= -\frac{2^4}{7^2 \times 9^2}, \\ k_2 &= \frac{1}{2 \times 7^2}, \\ k_3 &= -\frac{1}{2 \times 9^2}. \end{aligned}$$

Heavisideův vzorec pro násobné póly I

Příklad (Heavisideův vzorec pro násobné póly)

Heavisideovou metodou rozložíme na parciální zlomky racionální lomenou funkci

$$R(p) = \frac{1}{(p+1)^2(p+2)}.$$

Heavisideův vzorec pro násobné póly II

Příklad (Heavisideův vzorec pro násobné póly)

Postupujeme takto:

$$R(p) = \frac{1}{(p+1)^2(p+2)}$$

Původní racionální lomená funkce s násobnými póly.

$$= \frac{1}{(p+1)} \cdot \frac{1}{(p+1)(p+2)}$$

Násobné kořeny vytkneme.

$$= \frac{1}{(p+1)} \left(\frac{1}{p+1} + \frac{-1}{p+2} \right)$$

Na pravý zlomek použijeme zakrývací pravidlo.

$$= \frac{1}{(p+1)^2} - \frac{1}{(p+1)(p+2)}$$

Roznásobíme závorku.

$$= \frac{1}{(p+1)^2} - \frac{1}{p+1} + \frac{1}{p+2}$$

A na pravý zlomek použijeme zakrývací pravidlo ještě jednou.

Obsah přednášky

Zpětná Laplaceova transformace I

Příklad

Příklad (Spojitý systém druhého řádu)

Uvažujme lineární spojitý systém, popsaný diferenciální rovnicí

$$y''(t) + 3y'(t) + 2y(t) = 5u(t),$$

kde $u(t) = \mathbf{1}(t)$ je jednotkový skok a počáteční stav systému je dán stavem výstupu a rychlosti v čase $t = 0$: $y(0) = -1$ a $y'(0) = 2$. Máme nalézt řešení $y(t)$.

Zpětná Laplaceova transformace II
Příklad

Příklad (Spojitý systém druhého řádu)

Po Laplaceově transformaci diferenciální rovnice dostaneme algebraickou rovnici

$$p^2 Y(p) - py(0) - y'(0) + 3pY(p) - 3y(0) + 2Y(p) = 5\,\frac{1}{p}.$$

S použitím počátečních podmínek nalezneme řešení algebraické rovnice ve tvaru

$$Y(p) = \frac{5 - p - p^2}{p(p+1)(p+2)}.$$

Zpětná Laplaceova transformace III

Příklad

Příklad (Spojitý systém druhého řádu)

Rozložíme racionální lomenou funkci na parciální zlomky

$$Y(p) = \frac{5}{2p} - \frac{5}{p+1} + \frac{3}{2}\frac{1}{(p+2)}.$$

Hledané řešení je pro $t \geq 0$

$$y(t) = \frac{5}{2} - 5e^{-t} + \frac{3}{2}e^{-2t}.$$

První člen odpovídá ustálenému stavu, další dva členy popisují přechodový děj.

Testing whether or not animals “kiss”