Přenosová funkce spojitých systémů. Stabilita spojitých systémů.

Modelování systémů a procesů (11MSP)

Bohumil Kovář, Jan Přikryl, Miroslav Vlček

Ústav aplikované matematiky
ČVUT v Praze, Fakulta dopravní

7. přednáška 11MSP
pondělí 13. dubna 2015

verze: 2015-04-13 11:33

Obsah přednášky

Obecné řešení diferenciální rovnice druhého řádu

Diferenciální rovnici

$$\frac{d^2}{dt^2}y(t) + 2a\,\frac{d}{dt}y(t) + (a^2 + b^2)y(t) = u(t)$$

s počátečními podmínkami ve tvaru

$$y(0) = c_1 \qquad \text{a} \qquad y'(0) = c_2,$$

řešíme pomocí Laplaceovy transformace.

Obecné řešení diferenciální rovnice druhého řádu

Protože platí

$$\mathcal{L}\left\{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}y(t)\right\} = pY(p) - y(0)$$

$$\mathcal{L}\left\{\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}y(t)\right\} = p^2Y(p) - py(0) - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}y(0)$$

nalezneme Laplaceovou transformací diferenciální rovnice její algebraický tvar

$$p^2Y(p) - py(0) - y'(0) + 2a(pY(p) - y(0)) + (a^2 + b^2)Y(p) = U(p).$$

Obecné řešení diferenciální rovnice druhého řádu

Vyřešíme předchozí rovnici vzhledem k obrazu výstupní veličiny Y(p) a dostáváme

$$\left(p^2 + 2a\,p + (a^2 + b^2)\right) Y(p) = U(p) + py(0) + y'(0) + 2a\,y(0)$$

nebo

$$Y(p) = \frac{U(p) + c_2 + (p + 2a)c_1}{(p + a + ib)(p + a - ib)}$$

Přenosová funkce

Přenosová funkce $H(p)$ je definována jako podíl obrazu výstupu k obrazu vstupu

$$H(p) = \frac{Y(p)}{U(p)}$$

pro nulové počáteční podmínky a tedy

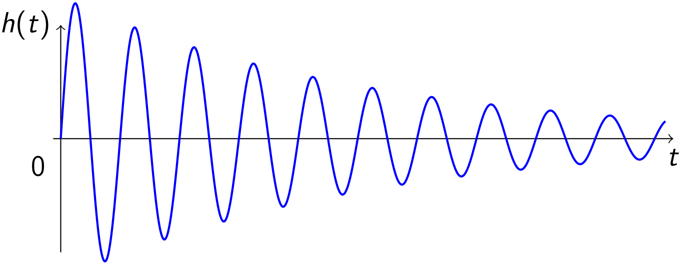
$$\boxed{H(p) = \frac{Y(p)}{U(p)} = \frac{1}{(p + a + \mathrm{i}b)(p + a - \mathrm{i}b)}}$$

Přenosová funkce

Impulsní odezva

Impulsní odezvu určíme jako zpětnou Laplaceovu transformaci přenosové funkce

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{H(p)\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(p+a)^2+b^2}\right\} = \frac{1}{b}e^{-at}\sin bt$$



Přenosová funkce

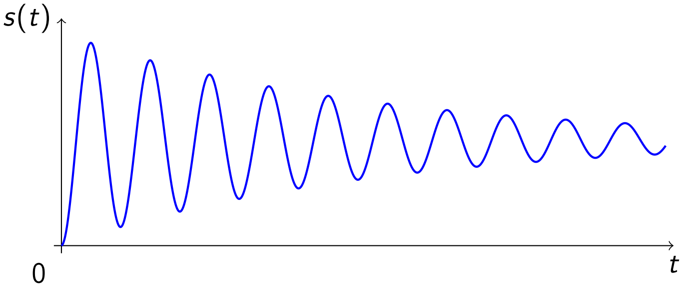
Přechodová odezva

Přechodovou odezvu $s(t)$ určíme zpětnou Laplaceovu transformaci
$s(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{H(p)\frac{1}{p}\right\}$

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{p((p+a)^2+b^2)}\right) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{a^2+b^2}\left[\frac{1}{p} - \frac{p+2a}{(p+a)^2+b^2}\right]\right) =$$
$$= \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{a^2+b^2}\left[\frac{1}{p} - \frac{p+a}{(p+a)^2+b^2} - \frac{a}{(p+a)^2+b^2}\right]\right)$$
$$= \frac{1}{a^2+b^2}\left[1 - e^{-at}\cos bt - \frac{a}{b}e^{-at}\sin bt\right].$$

Obecné řešení diferenciální rovnice druhého řádu

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{a^2+b^2}\left[\frac{1}{p}-\frac{p+2a}{(p+a)^2+b^2}\right]\right\} =$$
$$= \frac{1}{a^2+b^2}\left[1-e^{-at}\cos bt-\frac{a}{b}e^{-at}\sin bt\right]$$



Obsah přednášky

Přenosová funkce a vnitřní popis

Přenosová funkce vnitřního popisu je určena opět jako

$$H(p) = \frac{Y(p)}{U(p)}$$

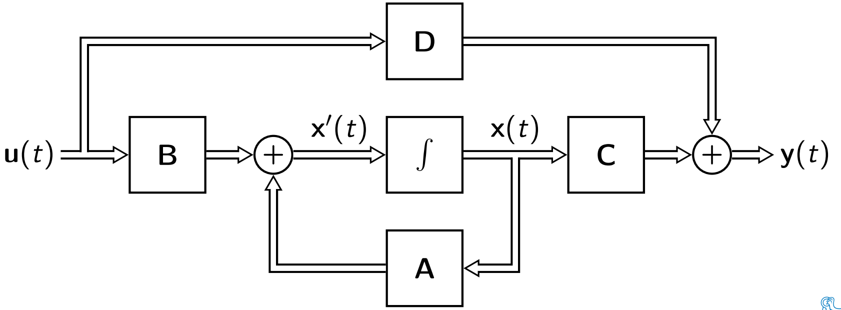
ovšem $Y(p)$ nyní závisí na stavových proměnných.

Přenosová funkce a vnitřní popis

Původní soustava

Mějme spojitý lineární časově invariantního systém

$$\mathbf{x}'(t) = \mathbf{A}\,\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\,\mathbf{u}(t),$$
$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\,\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\,\mathbf{u}(t).$$



Přenosová funkce a vnitřní popis

Laplaceova transformace

Stavový popis převedeme pomocí Laplaceovy transformace na algebraické rovnice rovnice tvaru

$$\begin{aligned} pX(p) - \mathbf{x}(0) &= \mathbf{A}\, X(p) + \mathbf{B}\, U(p) \\ Y(p) &= \mathbf{C}\, X(p) + \mathbf{D}\, U(p) \end{aligned}$$

a upravíme na

$$(p\mathbf{I} - \mathbf{A})\; X(p) = x(0) + \mathbf{B}\, U(p)$$

a vypočítáme

$$X(p) = (p\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\; x(0) + (p\mathbf{1} - \mathbf{A})^{-1}\; \mathbf{B}\, U(p).$$

Přenosová funkce a vnitřní popis

Přenosová funkce je definována pro nulovou počáteční podmínku $\mathbf{x}(0) = 0$. Po dosazení dostáváme

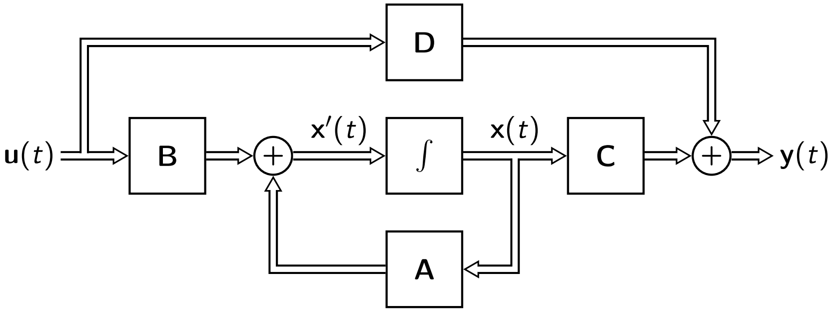
$$\begin{aligned} Y(p) &= \mathbf{C}\,(p\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\,\mathbf{B}\,U(p) + \mathbf{D}\,U(p) \\ &= \left[\mathbf{C}\,(p\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\,\mathbf{B} + \mathbf{D}\right] U(p) \end{aligned}$$

a přenosová funkce je

$$\boxed{H(p) = \mathbf{C}\,(p\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\,\mathbf{B} + \mathbf{D}}$$

Přenosová funkce a vnitřní popis

$$H(p) = \mathbf{C}\left(p\mathbf{I} - \mathbf{A}\right)^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D}$$



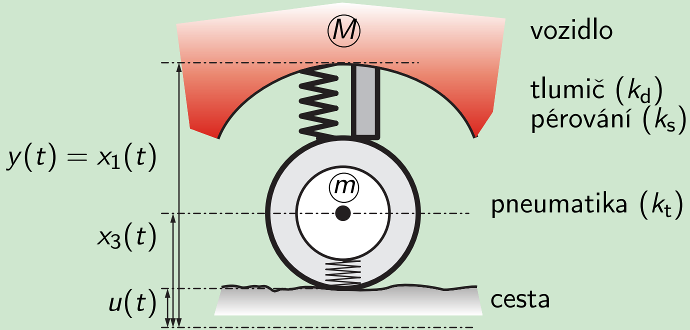
Přenosová funkce a vnitřní popis

Pokud se jedná o ryzí systém, který nemá žádnou přímou vazbu ze vstupu na výstup a tedy $\mathbf{D} = \emptyset$, potom

$$\boxed{H(p) = \mathbf{C}\left(p\mathbf{I} - \mathbf{A}\right)^{-1}\mathbf{B} = \mathbf{C}\,\frac{\operatorname{adj}\left(p\mathbf{I} - \mathbf{A}\right)}{\det\left(p\mathbf{I} - \mathbf{A}\right)}\,\mathbf{B}}$$

Přenosová funkce a vnitřní popis – příklad I

Příklad (Odpružení kola)



Na obrázku je model zavěšení kola vozidla a jeho odpružení s koeficienty tuhosti k_t, k_s a k_d.

Přenosová funkce a vnitřní popis – příklad II

Příklad (Odpružení kola)

Jestliže platí pohybové rovnice

$$
\begin{aligned}
&Mx_3''(t) + k_t\,[x_3(t) - u(t)] \\
&\quad k_s\,[x_1(t) - x_3(t)] - k_d\,[x_1'(t) - x_3'(t)] = 0 \\
&\qquad mx_1''(t) + k_s\,[x_1(t) - x_3(t)] + k_d\,[x_1'(t) - x_3'(t)] = 0
\end{aligned}
$$

nalezněte stavový popis s použitím vektoru stavových proměnných $\mathbf{x} = [x_1(t), x_2(t), x_3(t), x_4(t)]^T$.
Nalezněte přenosovou funkci $H(p) = Y(p)/U(p)$, která charakterizuje chování vozidla v závislosti na povrchu vozovky.

Přenosová funkce a vnitřní popis – příklad III

Příklad (Odpružení kola)

Zvolíme

$$x_1(t) = y(t), \qquad x_1'(t) = x_2(t)$$
$$x_3(t), \qquad x_3'(t) = x_4(t)$$

a dostáváme soustavu rovnic

$$x_1'(t) = x_2(t),$$
$$x_2'(t) = -\frac{k_s}{m}\left[x_1(t) - x_3(t)\right] - \frac{k_d}{m}\left[x_1'(t) - x_3'(t)\right]$$
$$x_3'(t) = x_4(t)$$
$$x_4'(t) = -\frac{k_t}{M}\left[x_3(t) - u(t)\right] + \frac{k_s}{M}\left[x_1(t) - x_3(t)\right] + \frac{k_d}{M}\left[x_1'(t) - x_3'(t)\right]$$

Přenosová funkce a vnitřní popis – příklad IV

Příklad (Odpružení kola)

Rovnice převedeme na stavový popis

$$\begin{bmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \\ x_3'(t) \\ x_4'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\dfrac{k_s}{m} & -\dfrac{k_d}{m} & \dfrac{k_s}{m} & \dfrac{k_d}{m} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \dfrac{k_s}{M} & \dfrac{k_d}{M} & -\dfrac{k_s + k_t}{M} & -\dfrac{k_d}{M} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \dfrac{k_t}{M} \end{bmatrix} u(t)$$

a

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \end{bmatrix}.$$

Přenosová funkce a vnitřní popis – příklad V

Příklad (Odpružení kola)

Máme matice stavového popisu ve tvaru

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\dfrac{k_s}{m} & -\dfrac{k_d}{m} & \dfrac{k_s}{m} & \dfrac{k_d}{m} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \dfrac{k_s}{M} & \dfrac{k_d}{M} & -\dfrac{k_s + k_t}{M} & -\dfrac{k_d}{M} \end{bmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \dfrac{k_t}{M} \end{bmatrix}$$

a

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Přenosová funkce a vnitřní popis – příklad VI

Příklad (Odpružení kola)

a platí $H(p) = \mathbf{C}\,(p\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}$, t.j.

$$H(p) = \frac{1}{\Delta}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}* & * & * & -\Delta_{41} \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ * & * & * & *\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{k_t}{M}\end{bmatrix} =$$

$$= \frac{(k_d p + k_s)\,k_t}{(M\,p^2 + k_t)(m\,p^2 + k_d p + k_s) + m\,(k_d\,p + k_s)\,p^2}$$

kde $*$ označuje prvky inverzní matice, které nemusíme pro přenosovou funkci počítat a Δ je determinant $\Delta = \det(p\mathbf{I} - \mathbf{A})$.

Obsah přednášky

Definice stability

BIBO stabilita systému

BIBO stabilita – bounded input bounded output

Odezva na omezený vstupní signál musí být vždy omezená – systém je BIBO stabilní.

Odezva systému je kombinací

- odezvy na vstupní signál
- odezvy na počáteční podmínky

Obsah přednášky

V případě přenosové funkce dané rovnicí (3) z odstavce ?? jsou póly přenosové funkce komplexní čísla ve tvaru

$$\begin{aligned} p_1 &= -a + bi, \\ p_2 &= -a - bi. \end{aligned}$$

Pro stabilitu systému jsou rozhodující hodnoty $\Re(p_1)$ a $\Re(p_2)$. Jedná se o póly komplexně sdružené (jiné ani u LTI systémů být nemohou), platí proto $\Re(p_1) = \Re(p_2) = -a$ a pro stabilitu systému je proto rozhodující pouze hodnota parametru a.

Stabilní spojitý LTI systém

Věta (Stabilní spojitý LTI systém)

Reálná část všech pólů přenosové funkce $H(p)$ stabilního systému leží v levé části p-roviny.

Příklad (Přenos spojitého LTI 2. řádu – jednoduché póly)

Spojitý systém 2. řádu má přenosovou funkci

$$H(p) = \frac{1}{p^2 + 4p + 3} = \frac{1}{(p+1)(p+3)}.$$

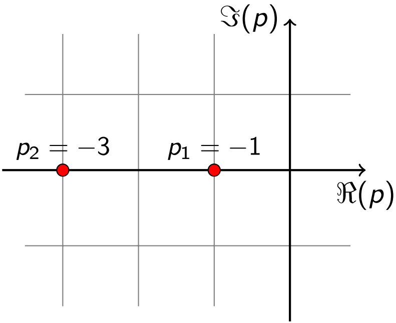
Póly přenosové funkce $p_1 = -1$ a $p_2 = -3$ leží v levé části p-roviny a jedná se proto o stabilní systém. Připomeňme, že

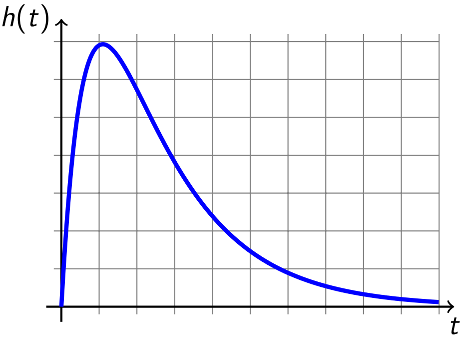
$$h(t) = \mathcal{L}^{-1}\{H(p)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{k_1}{p+1} + \frac{k_2}{p+3}\right\} = \frac{1}{2}e^{-t} - \frac{1}{2}e^{-3t}.$$

Stabilní spojitý LTI systém

Věta (Stabilní spojitý LTI systém)

Reálná část všech pólů přenosové funkce $H(p)$ stabilního systému leží v levé části p-roviny.





Stabilní spojitý LTI systém

Věta (Stabilní spojitý LTI systém)

Reálná část všech pólů přenosové funkce $H(p)$ stabilního systému leží v levé části p-roviny.

Příklad (Přenos spojitého LTI 2. řádu – komplexně sdružené póly)

Spojitý systém 2. řádu má přenosovou funkci

$$H(p) = \frac{1}{p^2 + 4p + 20}.$$

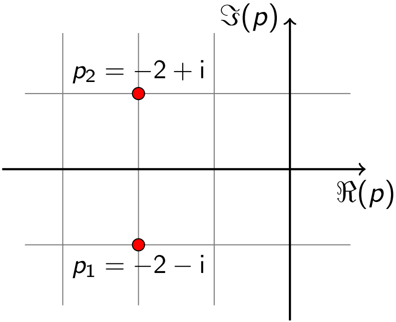
Dva komplexně sdružené póly v levé části p-roviny. Jedná se tedy o stabilní systém. Připomeňme, že

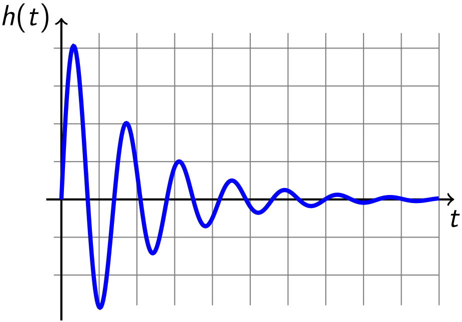
$$h(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{4}\frac{4}{(p+2)^2+16}\right\} = \frac{1}{4}e^{-2t}\sin(4t).$$

Stabilní spojitý LTI systém

Věta (Stabilní spojitý LTI systém)

Reálná část všech pólů přenosové funkce $H(p)$ stabilního systému leží v levé části p-roviny.





Nestabilní spojitý LTI systém

Věta (Nestabilní spojitý LTI systém)

Reálná část alespoň jednoho pólu přenosové funkce $H(p)$ nestabilního spojitého LTI systému leží v pravé části p-roviny, případně má takový systém násobný pól $H(p)$ na imaginární ose.

Příklad (Nestabilní spojitý LTI 2. řádu – reálné póly)

Spojitý LTI systém 2. řádu má přenosovou funkci

$$H(p) = \frac{1}{p^2 + p - 2} = \frac{1}{(p+2)(p-1)}.$$

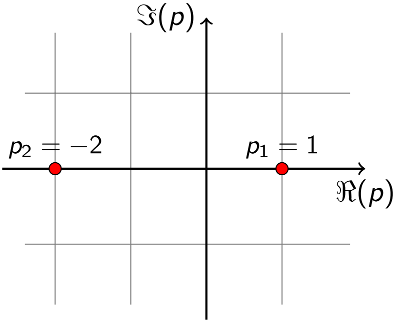
Jeden z pólů přenosové funkce, $p_2 = 1$, leží v pravé části p-roviny a jedná se proto o nestabilní systém. Připomeňme, že

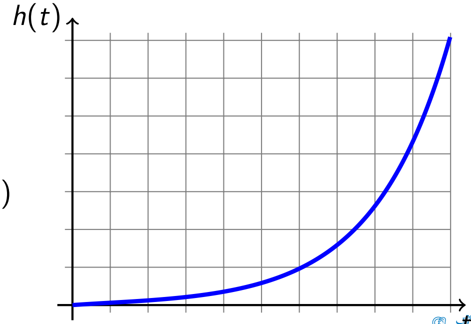
$$h(t) = \mathcal{L}^{-1}\{H(p)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{k_1}{p+2} + \frac{k_2}{p-1}\right\} = -\frac{1}{3}e^{-2t} + \frac{1}{3}e^{t}.$$

Nestabilní spojitý LTI systém

Věta (Nestabilní spojitý LTI systém)

Reálná část alespoň jednoho pólu přenosové funkce $H(p)$ nestabilního spojitého LTI systému leží v pravé části p-roviny, případně má takový systém násobný pól $H(p)$ na imaginární ose.





Nestabilní spojitý LTI systém

Věta (Nestabilní spojitý LTI systém)

Reálná část alespoň jednoho pólu přenosové funkce $H(p)$ nestabilního spojitého LTI systému leží v pravé části p-roviny, případně má takový systém násobný pól $H(p)$ na imaginární ose.

Příklad (Nestabilní spojitý LTI 2. řádu – násobný pól)

Spojitý LTI systém 2. řádu má přenosovou funkci

$$H(p) = \frac{1}{(p^2+1)^2}.$$

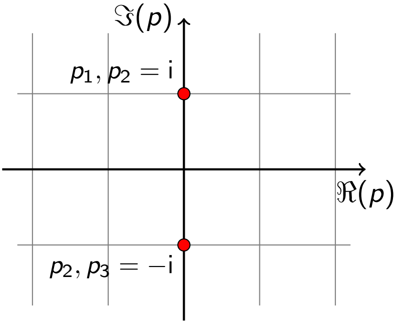
Dvojnásobný pól přenosové funkce $p_\infty = \pm \mathrm{i}$ leží na imagirnární ose p-roviny a jedná se proto o nestabilní systém. Připomeňme, že

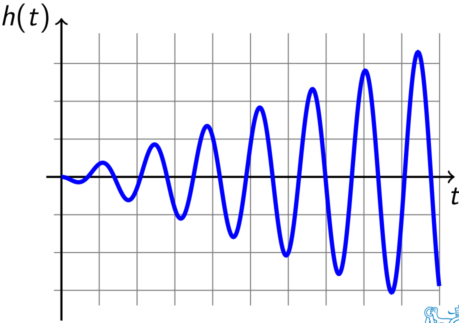
$$h(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{H(p)\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(p^2+1)^2}\right\} = t\,\sin(t).$$

Nestabilní spojitý LTI systém

Věta (Nestabilní spojitý LTI systém)

Reálná část alespoň jednoho pólu přenosové funkce $H(p)$ nestabilního spojitého LTI systému leží v pravé části p-roviny, případně má takový systém násobný pól $H(p)$ na imaginární ose.





Spojitý LTI systém na mezi stability

Věta (Spojitý LTI systém na mezi stability)

Reálná část pólů přenosové funkce $H(p)$ spojitého LTI systému na mezi stability je rovna nule a póly nejsou násobné.

Příklad (Spojitý LTI 1. řádu na mezi stability – jednoduchý pól)

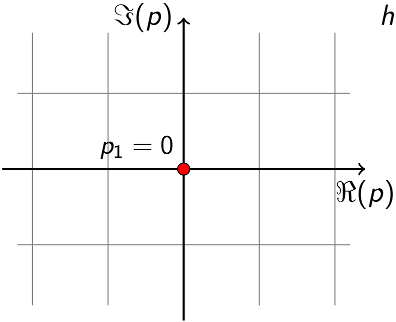
Spojitý LTI systém 1. řádu má přenosovou funkci

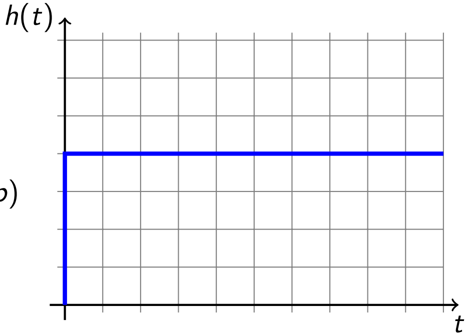
$$H(p) = \frac{1}{p}.$$

Spojitý LTI systém na mezi stability

Věta (Spojitý LTI systém na mezi stability)

Reálná část pólů přenosové funkce $H(p)$ spojitého LTI systému na mezi stability je rovna nule a póly nejsou násobné.





Spojitý LTI systém na mezi stability

Věta (Spojitý LTI systém na mezi stability)

Reálná část pólů přenosové funkce $H(p)$ spojitého LTI systému na mezi stability je rovna nule a póly nejsou násobné.

Příklad (Spojitý LTI 2. řádu na mezi stability – komplexně sdružený pól)

Spojitý LTI systém 2. řádu má přenosovou funkci

$$H(p) = \frac{1}{p^2 + 4}.$$

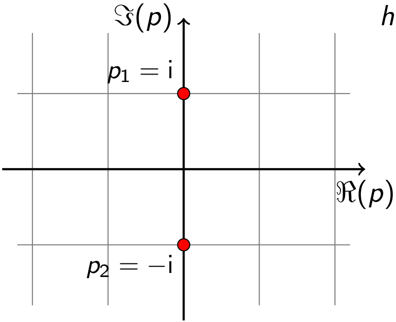
Připomeňme, že

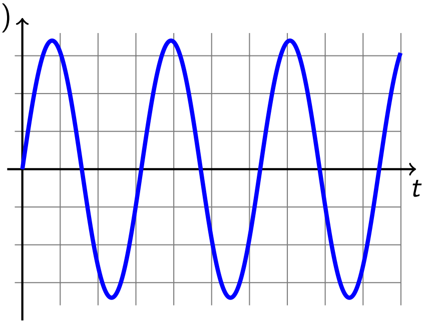
$$h(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{H(p)\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{2}\frac{2}{p^2 + 2^2}\right\} = \frac{1}{2}\sin(2t).$$

Spojitý LTI systém na mezi stability

Věta (Spojitý LTI systém na mezi stability)

Reálná část pólů přenosové funkce $H(p)$ spojitého LTI systému na mezi stability je rovna nule a póly nejsou násobné.





Kritérium stability
Shrnutí

Stabilní systém

- $\lim_{t\to\infty} h(t) = 0$
- Všechny póly přenosové funkce $H(p)$ leží v levé polorovině komplexní roviny, $\Re(p_\infty) < 0$.

Nestabilní systém

- $\lim_{t\to\infty} h(t) = \infty$
- Alespoň jeden pól přenosové funkce $H(p)$ leží v pravé polorovině komplexní roviny, $\Re(p_\infty) > 0$ nebo alespoň jeden násobný pól leží na imaginární ose.

Mez stability

- $\lim_{t\to\infty} h(t) = c$ nebo neexistuje
- Alespoň jeden jednoduchý pól leží na imaginární ose a žádný pól neleží v pravé polorovině komplexní roviny. Případné násobné póly leží v levé polorovině.

Obsah přednášky

Stabilita vnitřního popisu

Stabilitu určujeme opět na základě polohy pólů přenosové funkce $H(p)$ v p-rovině. V případě vnitřního popisu je přenosová funkce definována vztahem

$$H(p) = \mathbf{C}\,(p\,\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D}.$$

Věta (Stabilita vnitřního popisu)

Pro stabilitu systému je rozhodující matice $\mathbf{A}$, *respektive*

$$\det(p\,\mathbf{I} - \mathbf{A}).$$

odpovídající jmenovateli přenosové funkce.

Další postup je identický s vyšetřováním stability vnějšího popisu.

Přenosová funkce vnitřního popisu spojitého LTI systému I

Příklad (Přenosová funkce vnitřního popisu spojitého LTI systému)

Vnějšímu popisu spojitého LTI systému z Příkladu ?? odpovídá diferenciální rovnice 2. řádu

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}y(t) + 4\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}y(t) + 20\,y(t) = u(t).$$

Přenosová funkce je

$$H(p) = \frac{1}{p^2 + 4p + 20}.$$

Přenosová funkce vnitřního popisu spojitého LTI systému II

Příklad (Přenosová funkce vnitřního popisu spojitého LTI systému)

Pokud při převodu do vnitřního popisu zavedeme stavy

$$
\begin{aligned}
x_1(t) &= y(t), \\
x_2(t) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} y(t),
\end{aligned}
$$

bude matice vývoje stavu $\mathbf{A}$, výraz $(p\,\mathbf{I} - \mathbf{A})$ a jeho determinant rovny

$$
\begin{aligned}
\mathbf{A} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -20 & -4 \end{bmatrix}, \\
p\mathbf{I} - \mathbf{A} &= \begin{bmatrix} p & -1 \\ 20 & p+4 \end{bmatrix}, \\
\det(p\,\mathbf{I} - \mathbf{A}) &= p^2 + 4p + 20.
\end{aligned}
$$

Přenosová funkce vnitřního popisu spojitého LTI systému III

Příklad (Přenosová funkce vnitřního popisu spojitého LTI systému)

Polynom $p^2 + 4p + 20$ je charakteristický polynom systému a jeho kořeny jsou póly přenosové funkce.

Další rozhodování o stabilitě vnitřního popisu systému je shodné s kritérii stability vnějšího popisu.

Testing whether or not animals "kiss"