

# Inverzní $Z$ -transformace

## Modelování systémů a procesů (11MSP)

Bohumil Kovář, Jan Příkryl, Miroslav Vlček

Ústav aplikované matematiky  
ČVUT v Praze, Fakulta dopravní

9. přednáška 11MSP  
pondělí 27. dubna 2015

verze: 2015-04-20 12:43



# Obsah přednášky

## ① Inverzní $\mathcal{Z}$ -transformace

Metody výpočtu

Nuly a póly v  $\mathcal{Z}$ -rovině

## ② Příklady použití



# Metody výpočtu inverzní $\mathcal{Z}$ -transformace

Zpětná  $\mathcal{Z}$ -transformace má tvar integrálu

$$y[n] = \frac{1}{2\pi i} \oint_C Y(z) z^{n-1} dz \equiv \mathcal{Z}^{-1} \{Y(z)\}$$

podél uzavřené křivky  $C$ , která obsahuje všechny singulární body racionální lomené funkce

$$Y(z) = \frac{Q(z)}{N(z)}.$$



# Metody výpočtu inverzní $\mathcal{Z}$ -transformace

O racionální lomené funkci

$$\frac{Q(z)}{N(z)}$$

říkáme, že má **nulové body**  $z_{0\nu}$ , jestliže

$$Q(z_{0\nu}) = 0,$$

a že má **póly**  $z_{\infty\mu}$ , jestliže

$$N(z_{\infty\mu}) = 0.$$



# Rozklad racionální lomené funkce na parciální zlomky

Pokud má funkce  $\frac{Q(z)}{N(z)}$  jednoduché póly, potom

$$N(z) = \prod_{\mu=1}^N (1 - z_{\infty\mu} z^{-1}) = (1 - z_{\infty 1} z^{-1})(1 - z_{\infty 2} z^{-1}) \dots (1 - z_{\infty N} z^{-1})$$

a platí

$$\begin{aligned} \frac{Q(z)}{N(z)} &= \sum_{\mu=1}^N \frac{k_{\mu}}{1 - z_{\infty\mu} z^{-1}} \\ &= \frac{k_1}{1 - z_{\infty 1} z^{-1}} + \frac{k_2}{1 - z_{\infty 2} z^{-1}} + \dots + \frac{k_N}{1 - z_{\infty N} z^{-1}} \end{aligned}$$



# Rozklad racionální lomené funkce na parciální zlomky

kde

$$\begin{aligned}k_{\mu} &= \lim_{z \rightarrow z_{\infty\mu}} (1 - z_{\infty\mu} z^{-1}) \frac{Q(z)}{N(z)} \\&= Q(z_{\infty\mu}) \lim_{z \rightarrow z_{\infty\mu}} (1 - z_{\infty\mu} z^{-1}) \frac{1}{N(z)} \\&= Q(z_{\infty\mu}) \lim_{z \rightarrow z_{\infty\mu}} \frac{1}{\frac{N(z)}{1 - z_{\infty\mu} z^{-1}}} \\&= Q(z_{\infty\mu}) \frac{1}{N_{\mu}(z_{\infty\mu})}\end{aligned}$$



# Rozklad racionální lomené funkce na parciální zlomky

Pro jednoduchost budeme dále psát  $z_{\infty\mu} \rightarrow z_\mu$ . Protože pro  $|az^{-1}| < 1$  platí

$$\mathcal{Z}^{-1} \left\{ \frac{1}{1 - az^{-1}} \right\} = \mathcal{Z}^{-1} \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} a^n z^{-n} \right\} = a^n$$

dostaneme

$$\mathcal{Z}^{-1} \left\{ \frac{Q(z)}{N(z)} \right\} = \mathcal{Z}^{-1} \left\{ \sum_{\mu=1}^N \frac{k_\mu}{1 - z_\mu z^{-1}} \right\} = \sum_{\mu=1}^N k_\mu z_\mu^n.$$



# Obsah přednášky

## ① Inverzní $Z$ -transformace

## ② Příklady použití

Mikroekonomický model

Diferenční rovnice 2. řádu





# Příklady použití

## Diferenční rovnice – mikroekonomický model

Rovnice nabídky – nabídka **dnes** závisí na **včerejší** ceně a to tak, že nabídka stoupá s rostoucí cenou. Pro  $C > 0$  platí

$$n[k] = Cc[k - 1] + Ax[k].$$

Rovnice poptávky – poptávka **dnes** závisí na **dnešní** ceně a to tak, že poptávka klesá s rostoucí cenou. Pro  $D > 0$  platí

$$p[k] = -Dc[k] + Bx[k].$$



# Příklady použití

## Diferenční rovnice – mikroekonomický model

Rovnost nabídky a poptávky

$$n[k] = p[k]$$

pak vede na diferenční rovnici prvního řádu

$$c[k] + \frac{C}{D}c[k-1] = \frac{B-A}{D}x[k].$$



# Příklady použití

## Diferenční rovnice – mikroekonomický model

Pro jednoduchost označíme

$$\frac{C}{D} = \gamma, \quad \frac{B - A}{D} = \alpha.$$

Diferenční rovnice má v označení  $c[k] \equiv y[k]$  tvar

$$y[k] + \gamma y[k - 1] = \alpha x[k]$$



# Příklady použití

## Diferenční rovnice – mikroekonomický model

Za předpokladu  $x[k] = \mathbf{1}[k]$  a  $y[k] = 0$  pro  $k < 0$  dostaneme použitím  $\mathcal{Z}$ -transformace algebraickou rovnici

$$Y(z) + \gamma z^{-1} Y(z) = \frac{\alpha}{1 - z^{-1}}$$

s řešením v  $\mathcal{Z}$ -rovině ve tvaru

$$Y(z) = \frac{\alpha}{(1 - z^{-1})(1 + \gamma z^{-1})}.$$



# Příklady použití

## Diferenční rovnice – mikroekonomický model

Rozložíme na parciální zlomky

$$Y(z) = \frac{\alpha}{(1 - z^{-1})(1 + \gamma z^{-1})} = \frac{k_1}{1 - z^{-1}} + \frac{k_2}{1 + \gamma z^{-1}},$$

kde

$$k_1 = \lim_{z \rightarrow 1} (1 - z^{-1})Y(z) = \frac{\alpha}{1 + \gamma},$$
$$k_2 = \lim_{z \rightarrow -\gamma} (1 + \gamma z^{-1})Y(z) = \frac{\alpha\gamma}{1 + \gamma}.$$



# Příklady použití

## Diferenční rovnice – mikroekonomický model

Zpětná transformace funkce

$$Y(z) = \frac{\alpha}{1 + \gamma} \left( \frac{1}{(1 - z^{-1})} + \frac{\gamma}{1 + \gamma z^{-1}} \right)$$

pak vede na řešení ve tvaru diferenční rovnice

$$y[k] = \frac{\alpha}{1 + \gamma} \left( 1 - (-\gamma)^{k+1} \right) \mathbf{1}[k],$$

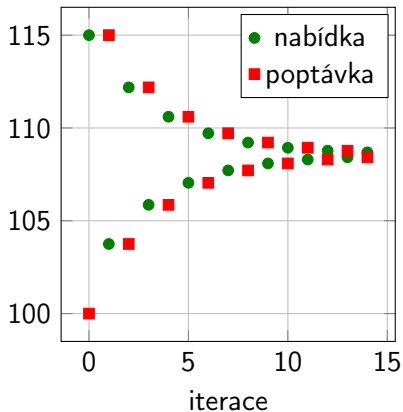
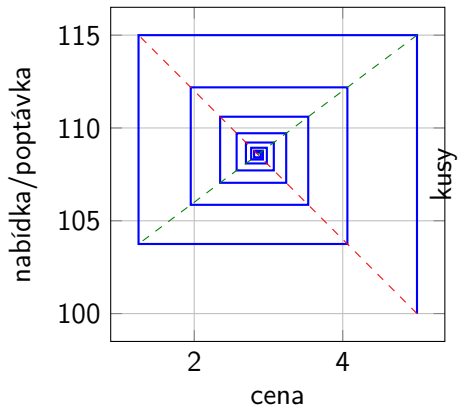
kteřé v případě stabilního trhu  $\gamma = \frac{C}{D} < 1$  určuje limitní velikost ceny

$$\lim_{k \rightarrow \infty} c[k] = \frac{\alpha}{1 + \gamma} = \frac{B - A}{C + D}.$$



# Řešení diferenční rovnice 1.řádu

Pro následující obrázek byly zvoleny hodnoty  $A = 100$ ,  $B = 120$ ,  $C = 3$ ,  $D = 4$ .



# Řešení diferenční rovnice 2. řádu

Hledejme řešení diferenční rovnice druhého řádu, která popisuje LTI diskrétní systém,

$$y[n+2] + 2ay[n+1] + (a^2 + b^2)y[n] = c_0u[n]$$

splňující počáteční podmínky ve tvaru

$$y[0] = y_0 = 1, \quad y[1] = y_1 = -1.$$





## Řešení diferenční rovnice 2. řádu

Rovnici řešíme pomocí  $\mathcal{Z}$ -transformace. Protože platí

$$\mathcal{Z}\{y[n+m]\} = z^m \left[ Y(z) - \sum_{\nu=0}^{m-1} y[\nu]z^{-\nu} \right]$$

tak

$$\mathcal{Z}\{y[n]\} = Y(z),$$

$$\mathcal{Z}\{y[n+1]\} = z^1 [Y(z) - y[0]],$$

$$\mathcal{Z}\{y[n+2]\} = z^2 [Y(z) - y[0] - z^{-1}y[1]].$$



## Řešení diferenční rovnice 2. řádu

Transformací nalezneme algebraický tvar

$$Y(z) (z^2 + 2a z^1 + (a^2 + b^2)) - z^2 y_0 - z^1 y_1 - 2a z^1 y_0 = c_0 X(z).$$

a vyjádříme

$$Y(z) = \frac{c_0 X(z) + z^1 + z^2 - z^1}{z^2 + 2a z^1 + (a^2 + b^2)} \times \frac{z^{-2}}{z^{-2}}.$$

respektive

$$Y(z) = \frac{1 + c_0 X(z) z^{-2}}{1 + 2a z^{-1} + (a^2 + b^2) z^{-2}}.$$



## Řešení diferenční rovnice 2. řádu

Přenosová funkce  $H(z)$  je definována jako podíl obrazu výstupu k obrazu vstupu

$$H(z) = \frac{Y(z)}{U(z)}$$

pro nulové počáteční podmínky a tedy

$$\begin{aligned} H(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} &= \frac{c_0 z^{-2}}{1 + 2a z^{-1} + (a^2 + b^2) z^{-2}} \\ &= \frac{c_0 z^{-2}}{(1 - z_1 z^{-1})(1 - z_2 z^{-1})}, \end{aligned}$$

kde  $z_1$  a  $z_2$  jsou póly přenosové funkce

$$z_{1,2} = -a \pm ib.$$



# Řešení diferenční rovnice 2. řádu

Impulsní odezvu určíme jako inverzní  $\mathcal{Z}$ -transformaci přenosové funkce. Potože platí

$$\lim_{z \rightarrow z_1} H(z)(1 - z_1 z^{-1}) = \frac{c_0 z_1^{-1}}{z_1 - z_2},$$
$$\lim_{z \rightarrow z_2} H(z)(1 - z_2 z^{-1}) = -\frac{c_0 z_2^{-1}}{z_1 - z_2},$$

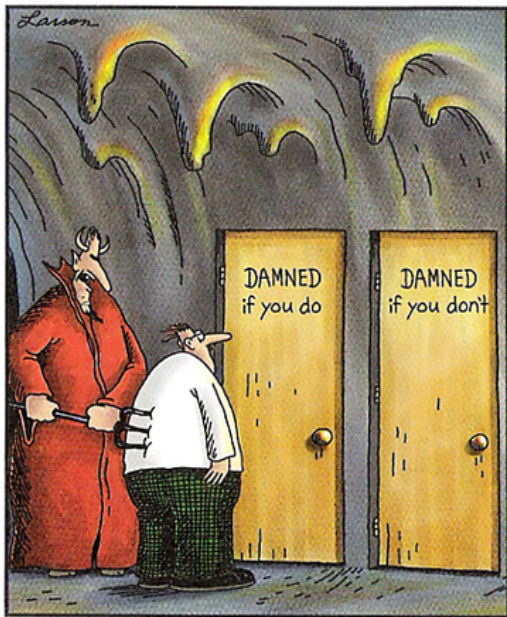
obdržíme impulsní odezvu ve tvaru



## Řešení diferenční rovnice 2. řádu

$$h[n] = \mathcal{Z}^{-1} \{H(z)\} = c_0 \frac{z_1^{n-1} - z_2^{n-1}}{z_1 - z_2}$$





“C’mon, c’mon—it’s either one or the other.”

