Přenosová funkce diskrétních systémů
Stabilita diskrétních systémů

Modelování systémů a procesů (11MSP)

Bohumil Kovář, Jan Přikryl, Miroslav Vlček

Ústav aplikované matematiky
ČVUT v Praze, Fakulta dopravní

10. přednáška 11MSP
pondělí 4. května 2015

verze: 2015-05-04 12:46

Obsah přednášky

1. Přenos diskrétních systémů
   - Přenosová funkce
   - Definice
2. Převod spojitého systému na diskrétní
3. Stabilita diskrétních systémů
4. Stavový popis diskrétních systémů

Přenosová funkce

Diferenční rovnice lineárního časově invariantního systému, za předpokladu nulových počátečních podmínek, tj. $y[n-k] = 0$ a $u[n-k] = 0$ pro $n-k < 0$, má tvar

$$\begin{aligned} a_N\, y[n-N] + a_{N-1}\, y[n-N+1] + \cdots + a_0\, y[n] = \\ = b_M\, u[n-M] + b_{M-1}\, u[n-M+1] + \cdots + b_0\, u[n] \end{aligned}$$

tedy

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y[n-k] = \sum_{m=0}^{M} b_m u[n-m].$$

Přenosová funkce

Použijeme $\mathcal{Z}$-transformaci

$$\sum_{k=0}^{N} a_k \, \mathcal{Z}\left\{y[n-k]\right\} = \sum_{m=0}^{M} b_m \, \mathcal{Z}\left\{u[n-m]\right\}$$

a dostáváme algebraickou rovnici

$$\sum_{k=0}^{N} a_k \, z^{-k} \cdot Y(z) = \sum_{m=0}^{M} b_m \, z^{-m} \cdot U(z).$$

Přenosová funkce

Nyní můžeme snadno vyjádřit $Y(z)$ ve tvaru

$$Y(z) = \frac{\sum_{m=0}^{M} b_m z^{-m}}{\sum_{k=0}^{N} a_k z^{-k}} \cdot U(z)$$
$$Y(z) = H(z) \cdot U(z).$$

Připomeňme si, že mezi vstupem a výstupem v časové rovině platí vztah

$$y[n] = \sum_{m=0}^{n} h(n-m) \cdot u[n]$$

Přenosová funkce

Funkce $H(z) = \mathcal{Z}\left\{h[n]\right\}$ je **přenosová funkce** a má tvar racionální lomené funkce v proměnné z^{-1}

$$H(z) = \frac{\sum_{m=0}^{M} b_m z^{-m}}{\sum_{k=0}^{N} a_k z^{-k}} = \frac{Q(z)}{N(z)}$$

Obraz přechodové odezvy

Funkce $S(z) = \mathcal{Z}\{s[n]\}$ je obrazem přechodové odezvy a z přenosové funkce ji určíme snadno jako

$$S(z) = H(z) \cdot \mathcal{Z}\{\mathbf{1}[n]\} = H(z)\,\frac{1}{1-z^{-1}} = H(z)\,\frac{z}{z-1}$$

Obsah přednášky

Převod spojitého systému na diskrétní

Spojitý systém popsaný stavovými rovnicemi

$$\mathbf{x}'(t) = \mathbf{A}\,\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\,\mathbf{u}(t) \tag{1}$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\,\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\,\mathbf{u}(t) \tag{2}$$

můžeme převést na ekvivalentní diskrétní systém tak, že čas t nahradíme diskrétními časovými okamžiky $t = nT$, kde T je vzdálenost mezi následujícími časovými okamžiky, neboli **perioda vzorkování**.

Převod spojitého systému na diskrétní

Všechny veličiny měříme pouze v čase $t = nT$ a proto

$$
\begin{aligned}
x(t) &= x(nT) \rightarrow x[n],\\
y(t) &= y(nT) \rightarrow y[n],\\
u(t) &= u(nT) \rightarrow u[n].
\end{aligned}
$$

Derivaci stavu $\mathbf{x}'(t)$ nahradíme v prvním přiblížení první diferencí

$$
\mathbf{x}'(t) \approx \frac{\mathbf{x}\left(nT + T\right) - \mathbf{x}(nT)}{T} = \frac{1}{T}\left(\mathbf{x}[n+1] - \mathbf{x}[n]\right).
$$

Převod spojitého systému na diskrétní

Dosazením do původních spojitých stavových rovnic dostaneme po úpravě jejich diskrétní tvar

$$\begin{aligned}\mathbf{x}[n+1] &= (\mathbf{I} + T\,\mathbf{A})\,\mathbf{x}[n] + T\mathbf{B}\,\mathbf{u}[n]\\ \mathbf{y}[n] &= \mathbf{C}\,\mathbf{x}[n] + \mathbf{D}\,\mathbf{u}[n]\end{aligned}$$

resp.

$$\begin{aligned}\mathbf{x}[n+1] &= \mathbf{M}\,\mathbf{x}[n] + \mathbf{N}\,\mathbf{u}[n]\\ \mathbf{y}[n] &= \mathbf{C}\,\mathbf{x}[n] + \mathbf{D}\,\mathbf{u}[n]\end{aligned}$$

Obsah přednášky

Stabilita systému
Příklad na rovnici 2. řádu

Diferenční rovnice 2. řádu s konstantními koeficienty

$$y[n+2] + a\,y[n+1] + b\,y[n] = u[n]$$

má za nulových počátečních podmínek přenosovou funkci

$$H(z) = \frac{z^2 + z}{z^2 + a\,z + b} = \frac{z^2 + z}{(z - z_1)(z - z_2)}.$$

Poloha pólů přenosové funkce $H(z)$ rozhoduje o stabilitě systému.

Definice stability

BIBO stabilita systému

BIBO stabilita – bounded input bounded output

Odezva na omezený vstupní signál musí být vždy omezená – systém je BIBO stabilní.

Odezva systému je kombinací

- odezvy na vstupní signál
- odezvy na počáteční podmínky

Kritérium stability

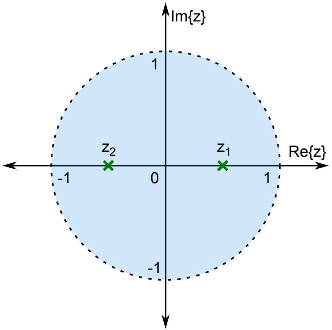
- **Stabilní systém**
  Všechny póly přenosové funkce $H(z)$ leží uvnitř jednotkové kružnice.
- **Nestabilní systém**
  Alespoň jeden pól přenosové funkce $H(z)$ leží vně jednotkové kružnice nebo alespoň jeden násobný pól leží na jednotkové kružnici.
- **Mez stability**
  Alespoň jeden jednoduchý pól leží na jednotkové kružnici a žádný pól neleží vně kružnice. Případné násobné póly leží uvnitř.

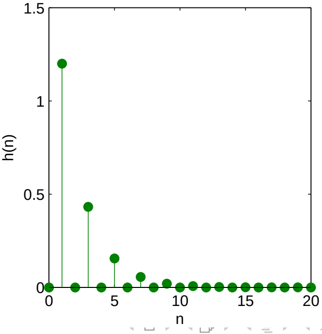
Stabilita

Stabilní systém

$$h[n] = (0{,}6)^n - (-0{,}6)^n$$

$$H(z) = \frac{z^2}{z^2 - \frac{1}{4}} = \frac{z^2}{(z - \frac{3}{5})(z + \frac{3}{5})}$$



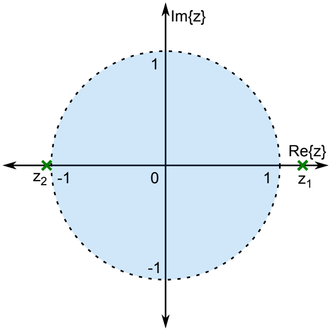


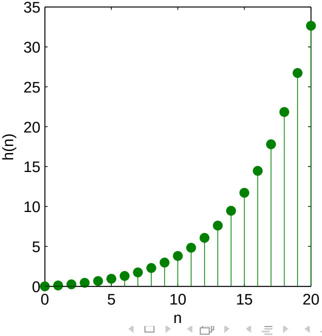
Stabilita

Nestabilní systém

$$h[n] = \left(\tfrac{6}{5}\right)^n - \left(-\tfrac{12}{11}\right)^n$$

$$H(z) = \frac{1}{z^2 + \frac{6}{55} + \frac{72}{55}} = \frac{1}{(z - \frac{6}{5})(z + \frac{12}{11})}$$



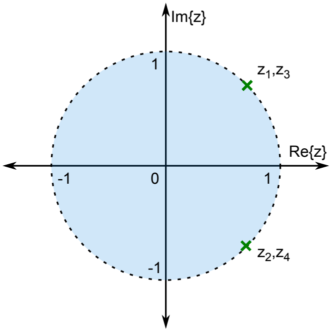


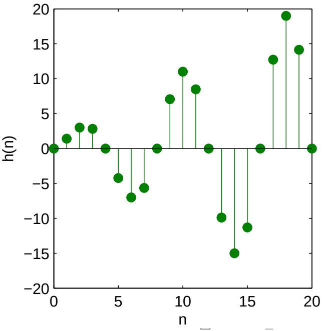
Stabilita

Nestabilní systém s násobnými póly

$$h[n] = (n+1)\cdot \sin\tfrac{\pi}{4}n = \frac{1}{2}\mathrm{i}(n+1)\left[\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{4}n} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}n}\right]$$

$$H(z) = \frac{\sqrt{2}z^3 - z^2}{\left(z^2 - \sqrt{2}\,z + 1\right)^2} = \frac{-\frac{1}{2}\mathrm{i}\cdot z}{z - \mathrm{e}^{\frac{\pi}{4}\mathrm{i}}} + \frac{-\frac{1}{2}\mathrm{i}\cdot z}{\left(z - \mathrm{e}^{\frac{\pi}{4}\mathrm{i}}\right)^2} + \frac{\frac{1}{2}\mathrm{i}\cdot z}{z - \mathrm{e}^{-\frac{\pi}{4}\mathrm{i}}} + \frac{\frac{1}{2}\mathrm{i}\cdot z}{\left(z - \mathrm{e}^{-\frac{\pi}{4}\mathrm{i}}\right)^2}$$



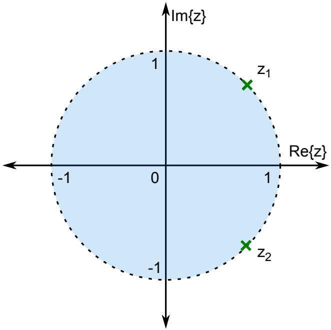


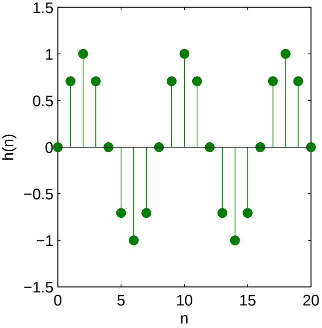
Stabilita

Mez stability s komplexně sdruženými póly

$$h[n] = \sin\frac{\pi}{4}n = \frac{1}{2}\mathrm{i}\left[\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{4}n} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}n}\right]$$

$$H(z) = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}z}{z^2 - \sqrt{2}\,z + 1} = \frac{-\frac{1}{2}\mathrm{i}\cdot z}{z - \mathrm{e}^{\frac{\pi}{4}\mathrm{i}}} + \frac{\frac{1}{2}\mathrm{i}\cdot z}{z - \mathrm{e}^{-\frac{\pi}{4}\mathrm{i}}}$$



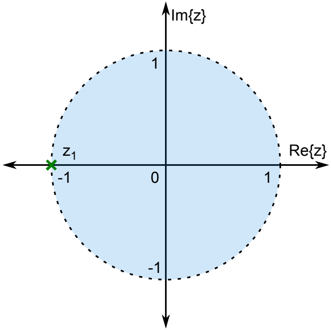


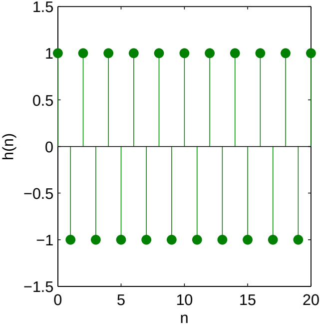
Stabilita

Mez stability s $(-1)^n$

$$h[n] = (-1)^n$$

$$H(z) = \frac{1}{1+z^{-1}} = \frac{z}{z+1}$$



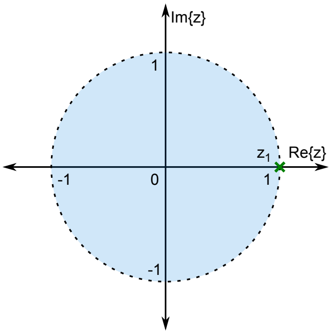


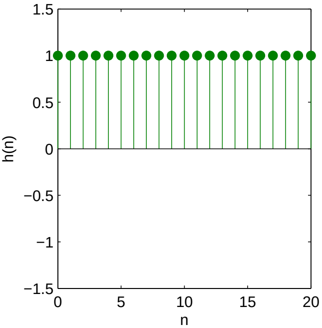
Stabilita

Mez stability s jednotkovým skokem

$$h[n] = (1)^n$$

$$H(z) = \frac{1}{1 - z^{-1}} = \frac{z}{z - 1}$$





Obsah přednášky

1. Přenos diskrétních systémů
2. Převod spojitého systému na diskrétní
3. Stabilita diskrétních systémů
4. **Stavový popis diskrétních systémů**
   - Přenosová funkce

Přenosová funkce diskrétního systému

Příklad (1/3)

Nalezněte přenosovou funkci $H(z)$ diskrétního LTI systému popsaného stavovými rovnicemi

$$\mathbf{x}[n+1] = \mathbf{M}\,\mathbf{x}[n] + \mathbf{N}\,\mathbf{u}[n]$$
$$\mathbf{y}[n] = \mathbf{C}\,\mathbf{x}[n]$$

- Uvažujte pouze jeden vstup a výstup.
- Při odvození použijte $\mathcal{Z}$-transformaci!
- Která matice ve stavovém popisu je rozhodující pro stabilitu řešení?

Přenosová funkce diskrétního systému

Příklad (2/3)

S pomocí vztahů pro $\mathcal{Z}$-transformaci transformujeme rovnice

$$\begin{aligned} \mathbf{x}[n+1] &= \mathbf{M}\,\mathbf{x}[n] + \mathbf{N}\,u[n] \\ y[n] &= \mathbf{C}\,\mathbf{x}[n] \end{aligned}$$

na

$$\begin{aligned} z(\mathbf{X}(z) - \mathbf{x}[0]) &= \mathbf{M}\,\mathbf{X}(z) + \mathbf{N}\,U(z) \\ Y(z) &= \mathbf{C}\,\mathbf{X}(z) \end{aligned}$$

Přenosová funkce diskrétního systému

Příklad (3/3)

Protože přenosová funkce je definována pro $x[0] = 0$, obdržíme z první rovnice

$$\mathbf{X}(z) = (z\mathbf{I} - \mathbf{M})^{-1}\mathbf{N}\,U(z)$$

a dosazením do druhé rovnice je

$$Y(z) = \mathbf{C}\,(z\mathbf{I} - \mathbf{M})^{-1}\mathbf{N}\,U(z)$$

Přenosová funkce $H(z)$ je tedy

$$H(z) = \mathbf{C}\,(z\mathbf{I} - \mathbf{M})^{-1}\mathbf{N} = \mathbf{C}\,\frac{\operatorname{adj}(z\mathbf{I} - \mathbf{M})}{\det(z\mathbf{I} - \mathbf{M})}\,\mathbf{N}$$

"You know, we're just not reaching that guy."