

Bilineární transformace

Shrnutí

Modelování systémů a procesů (11MSP)

Jan Příkryl, Miroslav Vlček

12. přednáška 11MSP

pondělí 19. května 2015

verze: 2015-05-12 15:22

Obsah

<i>Kmitočtové charakteristiky systémů</i>	1
<i>Kmitočtové charakteristiky spojitých systémů</i>	1
<i>Kmitočtové charakteristiky diskrétních systémů</i>	2
<i>Příklady na kmitočtové charakteristiky</i>	4
<i>Bilineární transformace</i>	4
<i>Příklady</i>	6

Tento text je do jisté míry experimentálním pískovištěm na odladění převodu textu prezentace vytvořené v \LaTeX ové třídě beamer do textu vysázeného pomocí *tuft*-handout. Obsah je oproti prezentaci mírně rozšířen o poznámky. Bude se ještě v průběhu semestru měnit, kontrolujte si prosím čas sestavení v záhlaví tohoto souboru.

Kmitočtové charakteristiky systémů

Kmitočtové charakteristiky systémů vyjadřují vztah Laplaceovy či \mathcal{Z} -transformace s měřitelnými fyzikálními charakteristikami systémů. Pokud platí tvrzení, že zkoumaný systém je typu LTI, platí i princip superpozice, který je možno aplikovat na vstupní i výstupní signály systému. Vstupní i výstupní signál lze pomocí Fourierovy řady pro periodické signály a Fourierovy transformace pro neperiodické signály rozložit na tzv. amplitudové a fázové charakteristiky vstupů a výstupů. Frekvenční charakteristiky systému říkají, jak budou rozdílné frekvence zkoumaným systémem procházet, což má velmi významnou fyzikální interpretaci v mnoha technických i netechnických oborech.

Kmitočtové charakteristiky spojitých systémů

Laplaceovu transformaci je třeba brát jako nářadí pro analýzu LTI spojitých systémů bez zřetelného fyzikálního významu komplexní proměnné $p = \sigma + i\omega$ ($i = \sqrt{-1}$ značí imaginární jednotku).

Z polohy pólů přenosové funkce $H(p)$ lze usoudit na některé vlastnosti zkoumaného systému. Funkce $H(p)$ je funkce komplexní proměnné, u které je možno vyjádřit modul $|H(p)|$ a fázi $\arg H(p)$.

Přenosová funkce může být potom zapsána ve tvaru

$$H(p) = |H(p)| e^{i \arg H(p)}. \quad (1)$$

Pokud si zobrazíme modul přenosové funkce $|H(p)| = |H(\sigma + i\omega)|$ v komplexní rovině, získáme trojrozměrnou funkci, zobrazenou pro ilustraci na obrázku (??). Pokud za p dosadíme pouze imaginární část $p = i\omega$ ■ **to odpovídá Fourierově transformaci pro periodické signály** ■, dostáváme výraz

$$H(i\omega) = |H(i\omega)| e^{i \arg H(i\omega)}, \quad (2)$$

kde $|H(i\omega)|$ nazveme **amplitudovou charakteristikou** spojitého systému a $\arg H(i\omega)$ **fázovou charakteristikou** spojitého systému.

Amplitudová charakteristika systému je funkcí kmitočtu, nebo úhlové rychlosti a má fyzikální význam v tom, že říká které frekvence průchodem systémem budou zesíleny a které naopak budou potlačeny. Tato vlastnost je velmi důležitá například při průchodu akustického signálu systémem a říká nám, které harmonické frekvence budou systémem potlačeny (charakteristiky radiových přijímačů atd).

Fázová charakteristika systému je též funkcí kmitočtu, nebo úhlové rychlosti a říká jak budou jednotlivé frekvence průchodem systémem zpožděny. Pokud budou všechny frekvence zpožděny jednotně, bude mít fázová charakteristika lineární průběh. Tato vlastnost je velmi důležitá např. při synchronizaci televizních oscilátorů, atd., kde špatné fázové poměry vedou k poškození přijatého signálu.

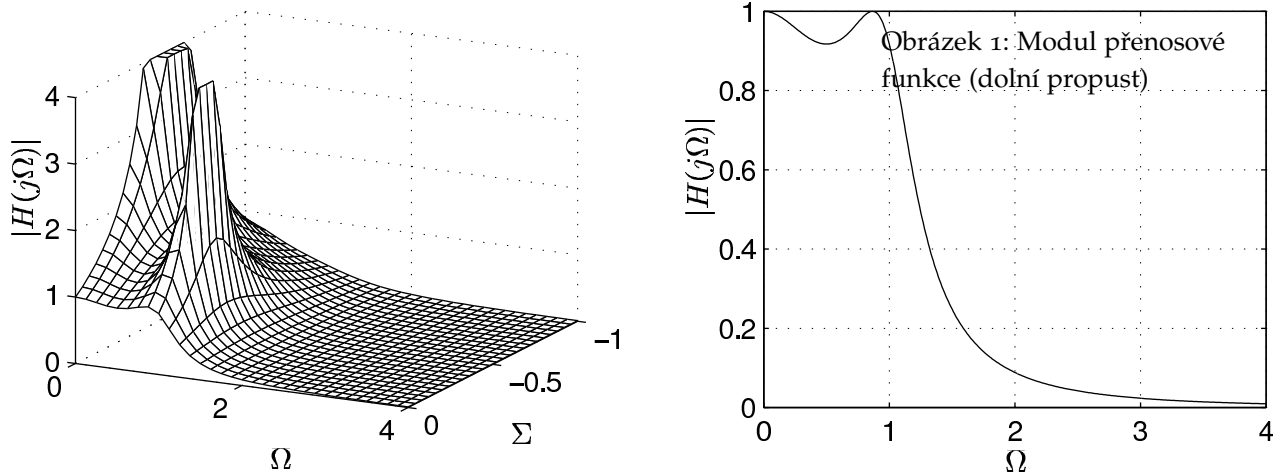
Na obrázku 1 je zobrazena amplitudová charakteristika systému, který je navržen jako dolní propust (nízké frekvence systémem procházejí, vysoké jsou potlačeny). Obrázek přehledně ukazuje vztah mezi přenosovou funkcí systému $H(p)$ a amplitudovou charakteristikou systému $|H(i\omega)|$.

Kmitočtové charakteristiky diskrétních systémů

Diskrétní systémy je možno popsat pomocí přenosové funkce $H(z)$, kde komplexní proměnná z nemá též fyzikální interpretaci. Lze dokázat, že pokud popíšeme vzorkování spojitého systému pomocí vzorkovací funkce, pro kterou vypočítáme její Laplaceův obraz ■ **viz přednáška/kapitola X** ■, vznikne následující přibližný vztah mezi proměnnými p a z :

$$z^{-1} \sim e^{-pT}. \quad (3)$$

Ve tomto vztahu označuje T periodu vzorkování. Problematice převodu spojitého systému na systém diskrétní bude věnována samostatná kapitola.



Obrázek 1: Modul kmitočtové charakteristiky filtru v Čebyševově aproximaci stupně 5 .

Využijme vztahu (3) a převed'eme přenosovou funkci $H(z)$ na funkci v proměnné p ,

$$H(z) \sim H(e^{pT}). \quad (4)$$

Dále využijeme znalostí o kmitočtových charakteristikách spojitých systémů, popsaných výše **■ opravdu? ■**, dosadíme $p = i\omega$ a rozepíšeme funkci $H(e^{-i\omega T})$ na funkce modulu a fáze,

$$H(z) \sim H(e^{-i\omega T}) = |H(e^{i\omega})|e^{j \arg(H(e^{i\omega}))} \quad (5)$$

Amplitudová charakteristika diskrétního systému $|H(e^{i\omega})|$ je funkcí kmitočtu, nebo úhlové rychlosti a má fyzikální význam v tom, že udává, které frekvence průchodem diskrétního systému budou zesíleny a které naopak budou potlačeny.

Fázová charakteristika diskrétního systému $\arg H(e^{i\omega})$ je též funkcí kmitočtu, nebo úhlové rychlosti a říká jak budou jednotlivé frekvence průchodem diskrétního systému zpožděny.

Z výše uvedeného popisu a definic kmitočtových charakteristik je zřejmé, že jejich fyzikální význam je shodný jak pro spojitě tak pro diskrétní systémy. Kmitočtové charakteristiky spojitěho systému získáme dosazením parametru $p = i\omega$ do přenosové funkce systému $H(p)$. Kmitočtové charakteristiky diskrétního systému získáme dosazením parametru $z = e^{i\omega T}$ do přenosové funkce diskrétního systému $H(z)$. V obou případech je možno stanovit modul a fázi a definovat amplitudové a fázové charakteristiky systémů.

Příklady na kmitočtové charakteristiky

Příklad 1 (Spojitý systém). Mějme spojitý systém definovaný přenosovou funkcí

$$H(p) = \frac{1}{p-2}.$$

Nalezněte jeho amplitudovou a fázovou charakteristiku.

Řešení:

Dosazením $p = i\omega$ a jednoduchou úpravou dostáváme komplexní funkci ve složkovém tvaru,

$$H(i\omega) = \frac{1}{i\omega - 2} = -\frac{1}{2 - i\omega} = -\frac{1}{\omega^2 + 4} (2 + i\omega),$$

z něhož je možno stanovit amplitudovou a fázovou charakteristiku systému:

$$|H(i\omega)| = -\frac{1}{\sqrt{\omega^2 + 4}}$$

$$\arg H(i\omega) = \arctan\left(\frac{\omega}{2}\right)$$

□

Příklad 2 (diskrétní systém). Mějme diskrétní systém definovaný přenosovou funkcí

$$H(z) = \frac{1}{1 - z^{-1}}.$$

Nalezněte jeho amplitudovou a fázovou charakteristiku. Perioda vzorkování je $T = 1$.

Řešení:

Dosazením $z = e^{i\omega T} = e^{i\omega}$ a jednoduchou úpravou dostáváme komplexní funkci ve složkovém tvaru

$$H(e^{i\omega}) = \frac{1}{2} + i \frac{\sin \omega}{2 \cdot (1 - \cos \omega)},$$

z něhož je možno stanovit amplitudovou a fázovou charakteristiku diskrétního systému

$$|H(e^{i\omega})| = -\frac{1}{\sqrt{2 \cdot (1 - \cos \omega)}}$$

$$\arg H(i\omega) = \arctan\left(\frac{\sin \omega}{1 - \cos \omega}\right)$$

□

Bilineární transformace

Bilineární transformaci, kterou můžeme převést popis spojitého systému na diskrétní, lze odvodit několika ekvivalentními způsoby. Řešení diferenciálních rovnic numerickou integrací lichoběžníkovým pravidlem vede na bilineární transformaci způsobem, který je

používán v **teorii řízení**. Zde je velmi často spojována se jménem Tutsinova transformace ¹.

Vzorkování analogového signálu a Laplaceova transformace vzorkovací funkce vede na ekvivalenci

$$z \sim e^{pT}. \quad (6)$$

Komplexní kmitočet p lze získat úpravou vztahu (6)

$$p = \frac{1}{T} \ln z. \quad (7)$$

Abychom se vyhnuli transcendentním funkcím při vyjadřování přenosových vlastností, rozvineme pravou stranu rovnice (7) v řadu, přičemž v dalších úvahách vezmeme v úvahu jen první člen rozvoje. Platí

$$\begin{aligned} \ln z &= \frac{z-1}{1} - \frac{(z-1)^2}{2} + \frac{(z-1)^3}{3} - \dots \\ &= \frac{z-1}{z} + \frac{1}{2} \left(\frac{z-1}{z} \right)^2 + \dots \\ &= 2 \left[\frac{z-1}{z+1} + \frac{1}{3} \left(\frac{z-1}{z+1} \right)^3 + \frac{1}{5} \left(\frac{z-1}{z+1} \right)^5 + \dots \right]. \end{aligned}$$

Po dosazení do vztahu (7) vždy prvních členů rozvoje funkce $\ln z$ získáme tři transformace $z \rightarrow p$, které jsou v literatuře označovány jako

- **FD (forward difference)**

$$\frac{1}{T} \frac{z-1}{1}$$

- **BD (backward difference)**

$$\frac{1}{T} \frac{z-1}{z}$$

- **bilineární transformace**

$$p = \frac{2}{T} \frac{z-1}{z+1} = \frac{2}{T} \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}$$

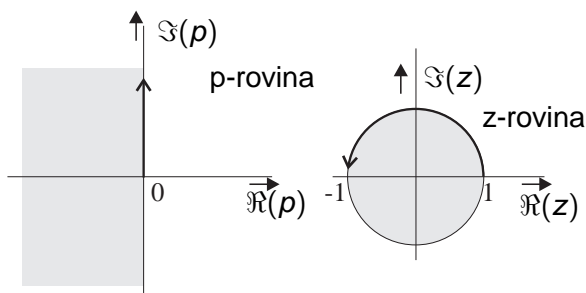
Všimněme si jakým způsobem bilineární transformace transformuje imaginární osu kmitočtů:

$$\begin{aligned} i\omega &= \frac{2}{T} \frac{1 - e^{-i\omega T}}{1 + e^{-j\omega T}} = j \frac{2}{T} \frac{e^{i\omega T/2} - e^{-i\omega T/2}}{e^{i\omega T/2} + e^{-i\omega T/2}} \\ &= j \frac{2}{T} \frac{\sin(\omega T/2)}{\cos(\omega T/2)} = j \frac{2}{T} \tan \frac{\omega T}{2}. \end{aligned} \quad (8)$$

Z rovnice (8) můžeme vyvodit, že kmitočtové osy jsou vzájemně zkreslené a platí

$$\Omega = \frac{2}{T} \tan \frac{\omega T}{2}. \quad (9)$$

spojitý čas	diskrétní čas
$\frac{d}{dt}y(t) = x(t)$	
$\int_{(n-1)T}^{nT} \frac{d}{dt}y(t)dt = \int_{(n-1)T}^{nT} x(t)dt$ integrace diferenciální rovnice	$y(nT) - y((n-1)T) = T \frac{x(nT) + x((n-1)T)}{2}$ numerická integrace
	$Y(z)(1 - z^{-1}) = \frac{T}{2}X(z)(1 + z^{-1})$ z-transformace
$pY(p) = X(p)$ Laplaceova transformace	$\frac{2}{T} \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}} Y(z) = X(z)$



Obrázek 2: Zobrazení roviny p na rovinu z při bilineární transformaci

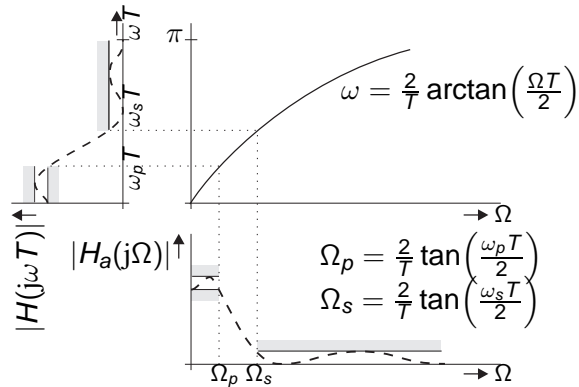
Příklady

■ něco z toho asi půjde do cvičebnice ■

Příklad 3 (Vzorkovací teorem). Ověřte platnost vzorkovacího teoremu v případě funkce $A \sin \omega t$ s amplitudou $A = 10$ a frekvencí $f = 0,1$ Hz. Měňte vzorkovací kmitočet a sledujte podobnost vzorkovaného signálu se signálem původním.

Řešení:

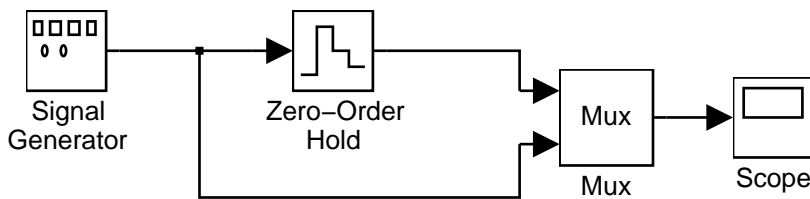
Kmitočet sinusového signálu $f = 0,1$ Hz znamená, že perioda opakování je $T = 10$ s. Parametry sinusového signálu je možno vložit do bloku **Signal generator**. Vzorkování je možno simulovat pomocí bloku **Zero-Order Hold**, který drží vzorek signálu po čas zadaný v bloku. Jelikož Simulink jako program pracuje též s diskretním signálem modelu, je třeba citlivě definovat parametry simulace. Pro plnou kontrolu nad simulací doporučujeme v tomto



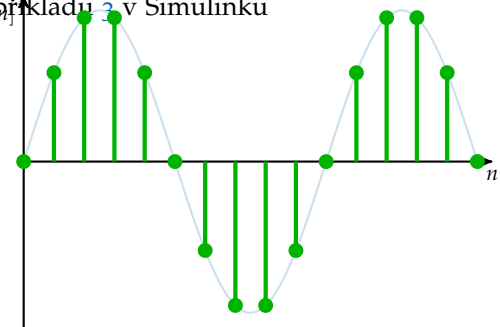
Obrázek 3: Zkreslení kmitočtových os při bilineární transformaci analogové dolní propusti na číslicovou dolní propust

příkladem zadat jako typ řešení Fixed-step a discrete. Jako pevný krok simulace doporučujeme zvolit hodnotu 0.01. Při zvolení například proměnného kroku s jiným typem řešiče (například ode4, což je řešič diferenciálních rovnic), mění Simulink krok simulace podle složitosti **lépe: podle odhadu numerické chyby** problému a výsledek nemusí vždy odpovídat reálnému výstupu. V případě použití proměnného kroku simulace je nutno s uvážením nastavit maximální krok spolu s relativní a absolutní přesností řešení. Tím se simulace blíží realitě i s proměnným krokem.

Blokové schéma příkladu je zobrazeno na obrázku ?? . Porovnání původního signálu se vzorkovaným signálem po 1 s je uvedeno na obrázku 5. Pro tento případ je možno původní signál jednoduše rekonstruovat. Obrázek 6 zobrazuje vzorkování s periodou 2,5 s, která je mezní vzorkovací periodou. Pro delší periody vzorkování, jako například 3 s na obrázku 7, již není možno původní signál zrekonstruovat.



Obrázek 4: Schéma modelu z příkladu 3 v Simulinku



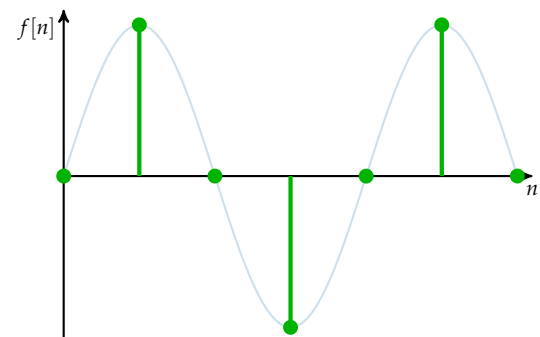
Příklad 4 (Vzorkování – diskretizace). Nalezněte popis diskrétního systému, který vznikne diskretizací spojitého systému popsaného přenosovou funkcí

$$H(p) = \frac{1}{p^3 + 1,18p^2 + 1,6p + 1,5}$$

bude-li perioda vzorkování rovna

1. $T_0 = 1$,
2. $T_0 = 4$.

Obrázek 5: Vzorkování signálu sinus s periodou vzorkování 1 s



Namodelujte v Simulinku jak původní spojitého systému, tak i diskretizovaný systém a porovnejte jejich odezvy na jednotkový skok.

Řešení:

Existuje mnoho metod, jak převést popis spojitého systému na popis diskretizovaného systému. Některé z těchto metod nejsou příliš stabilní. V našich experimentech se osvědčila metoda, převodu stavových matic **A** a **B** spojitého systému na stavové matice **M** a **N** diskretizovaného systému pomocí příkazu `c2d`. Teoreticky se dá dokázat (a ukázali jsme si to v přednášce **■ kapitole - doplnit ■**), že stavové matice **C**, **D** se vzorkováním nemění.

Nejprve vypočteme stavové matice **A**, **B**, **C** a **D** daného systému příkazem

```
[A,B,C,D]=tf2ss(1,[1 1.18 1.6 1.5])
```

Výsledkem jsou stavové matice spojitého systému

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1,18 & -1,6 & -1,5 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{C} = [c0 \ 0 \ 1], \quad \mathbf{D} = 0.$$

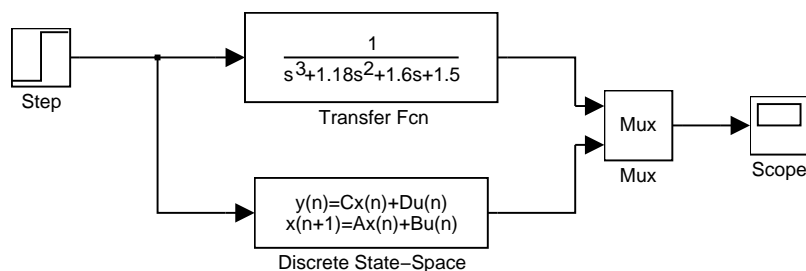
Matice diskretizovaného systému **M** a **N** získáme aplikací příkazu

```
[M,N]=c2d(A,B,To)
```

kde za T_0 dosazujeme periodu vzorkování T_0 . Pro $T_0 = 1$ vychází matice diskretizovaného systému

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} -0,1411 & -1,1078 & -0,6148 \\ 0,4098 & 0,3425 & -0,4521 \\ 0,3014 & 0,7655 & 0,8247 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{N} = \begin{bmatrix} 0,4800 \\ 0,3014 \\ 0,1169 \end{bmatrix}.$$

Jak bylo již řečeno **■ v kapitole/přednášce ■**, matice **C** a **D** se diskretizací nemění, tudíž úplný popis diskretizovaného systému lze zapsat pomocí matic stavového popisu **M**, **N**, **C** a **D**. Pro porovnání chování spojitého a diskretního systému lze v Simulinku vytvořit schéma zahrnující oba systémy s bloky **State Space** a **Discrete State Space**, přičemž na patřičná místa vložíme stavové matice původního spojitého a diskretizovaného systému a periodu vzorkování T_0 .



Obrázek 8: Schéma modelu v Simulinku

Výsledek simulace je zobrazen na obrázku 9, z něhož je zřejmé, že perioda vzorkování byla zvolena v souladu se vzorkovacím teorémem a přechodová odezva diskretizovaného systému kopíruje průběh původního spojitého systému.

Pro vzorkovací periodu $T_0 = 4$ vychází matice diskretizovaného systému

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} -0,4628 & 0,9400 & 0,5029 \\ -0,3353 & 0,0672 & 0,4120 \\ -0,2746 & -0,6593 & -0,3723 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{N} = \begin{bmatrix} -0,3353 \\ -0,2746 \\ 0,9148 \end{bmatrix}.$$

Obr. 10 zobrazuje rozdíl mezi původním spojitém systémem a diskretizovaným systémem pro vzorkovací periodu $T_0 = 4$. Z průběhů signálů je zřejmé, že diskretizovaný systém nezachycuje průběh přechodové funkce původního spojitého systému.

Příklad 5 (Přenosová funkce diskretizovaného systému). Nalezněte přenosovou funkci diskretního systému, který vznikne diskretizací spojitého systému popsaného přenosovou funkcí

$$H(p) = \frac{1}{p + 0.3}. \quad (10)$$

Jako periodu vzorkování zvolte $T_0 = 1$ s. V Simulinku namodelujte přechodovou odezvu původního a diskretizovaného systému a tyto odezvy vzájemně porovnejte. Dále zobrazte stavové matice, impulsní odezvy a frekvenční charakteristiky diskretního a spojitého systému a vzájemně je porovnejte.

Řešení:

Nejprve nalezneme stavové matice spojitého systému aplikací příkazu

```
[A,B,C,D]=tf2ss(1,[1 0.3])
```

Systém je prvního řádu, matice v rovnici vývoje stavu tedy degenerují na skaláry a výsledkem jsou následující hodnoty stavového popisu spojitého systému:

A=-0.3, B=1, C=1, D=0

Stavový popis diskretizovaného systému získáme aplikací příkazu

```
[M,N]=c2d(A,B,1)
```

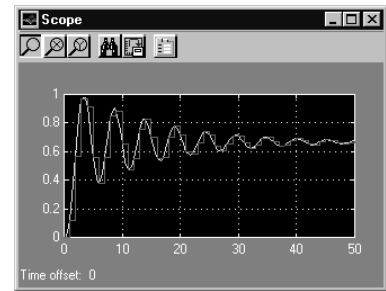
a vyjde

M=0.74, N=0.8639, C=1, D=0

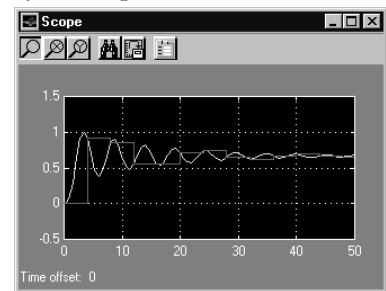
Pokud známe diskretní stavový popis, je možno aplikovat příkaz

```
[dcit,djmen]=ss2tf(M,N,C,D)
```

který platí jak pro spojitě tak i diskretní systémy. V našem případě jsme jako parametry příkazu `ss2tf` dosadili stavové matice diskretizovaného systému a příkaz vrací koeficienty diskretní přenosové funkce



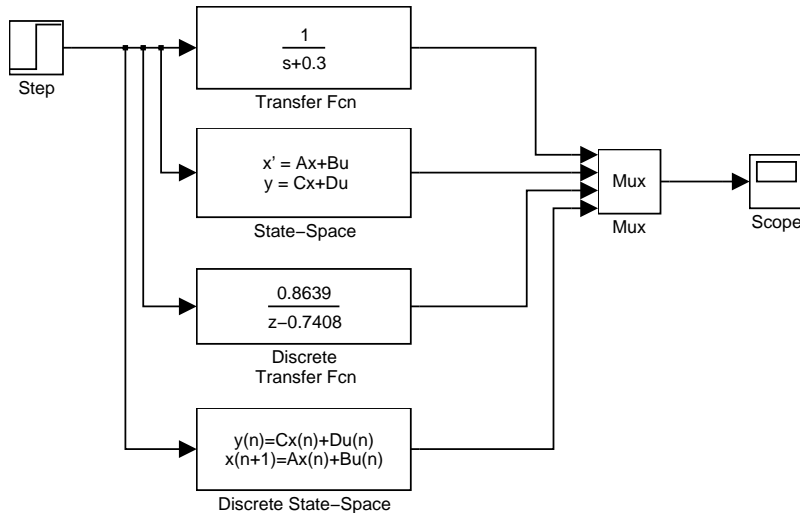
Obrázek 9: Přechodová odezva původního a diskretizovaného systému pro $T_0 = 1$



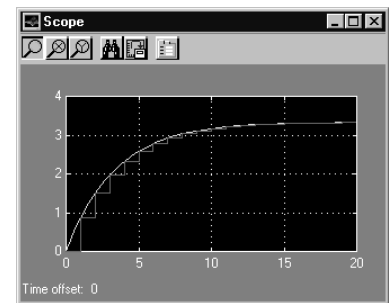
Obrázek 10: Přechodová odezva původního a diskretizovaného systému pro $T_0 = 4$

$dcit=0.8639$, $djmen=[1 \ -0.7]$

Je nutno upozornit, že *diskrétní přenosová funkce je v Matlabu definovaná v kladných mocninách z*.



Obrázek 11: Schéma Simulinkového modelu systému z příkladu 5



Obrázek 12: Porovnání různých popisů spojitého a diskretizovaného systému

Obrázek 11 zobrazuje blokové schéma v Simulinku, kde jsou uvedeny oba popisy spojitého systému (přenosová funkce, stavové matice) a oba popisy diskretizovaného systému (diskrétní přenosová funkce, stavové matice diskrétního systému). Výsledek simulace je zobrazen na obr. 12, kde je vidět, že jak popis spojitého systému pomocí přenosové funkce či pomocí stavových matic je identický z hlediska vlastností vstupu a výstupu. Totéž platí u systému diskrétního. Výsledek simulace říká, že při diskretizaci byla vhodně zvolena perioda vzorkování.

Kmitočtové charakteristiky spojitého systému vrací příkaz

```
bode(1, [1 0.3])
```

a jsou zobrazeny na obr. 13. Kmitočtové charakteristiky diskretizovaného systému vyjádříme pomocí příkazu

```
dbode(0.8639, [1 -0.7408])
```

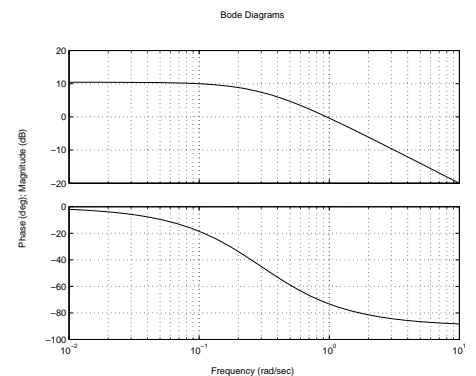
Výsledkem jsou diskrétní kmitočtové charakteristiky zobrazené na obr. 14. Impulsní charakteristiku spojitého systému vrací příkaz:

```
impulse(1, [1 0.3])
```

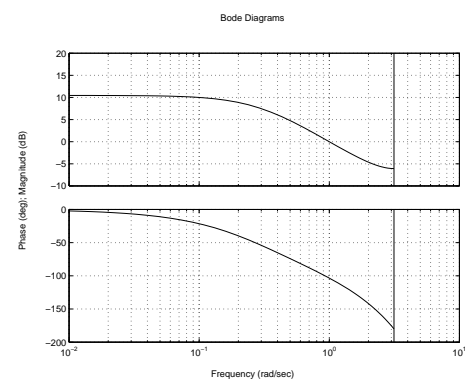
a je zobrazena na obrázku 15(a). Impulsní charakteristiku diskretizovaného systému vyjádříme pomocí příkazu

```
dimpulse(0.8639, [1 -0.7408])
```

Je zobrazena na obrázku 15(b).

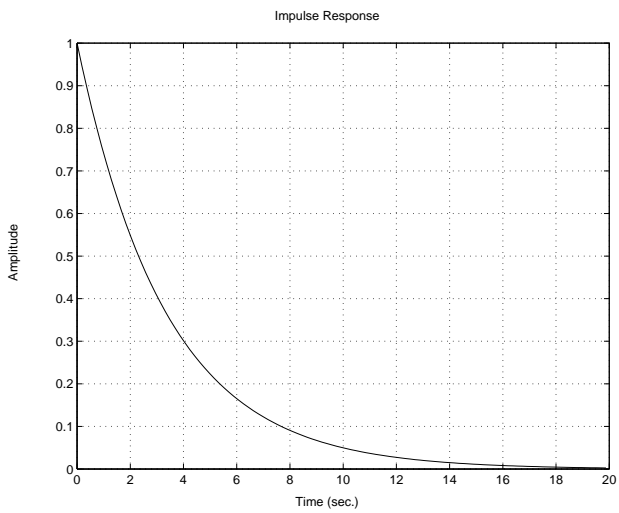


Obrázek 13: Kmitočtové charakteristiky spojitého systému

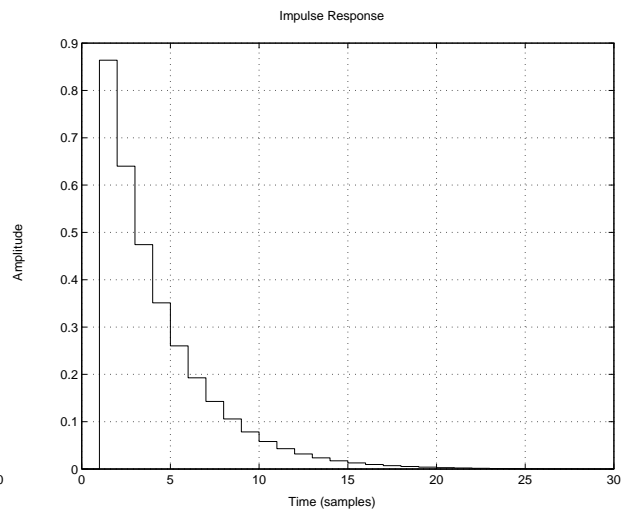


Obrázek 14: Kmitočtové charakteristiky diskretizovaného systému

□



(a) Impulsní charakteristika spojitého systému



(b) Impulsní charakteristika diskretizovaného systému

Obrázek 15: Impulsní charakteristiky systému studovaného v příkladu 5