Úvodní informace
Matematické modelování

Modelování systémů a procesů (11MSP)

Bohumil Kovář, Jan Přikryl

Ústav aplikované matematiky
ČVUT v Praze, Fakulta dopravní

1. přednáška 11MSP
2017

verze: 2017-03-17 09:01

Obsah přednášky

Základní informace

Přednášející:

- Ing. Bohumil Kovář, Ph.D. (kovar@fd.cvut.cz)
  přednášky čt. 8:00-9:30

Cvičící:

- Mgr. Lucie Kárná, Ph.D. (karna@fd.cvut.cz)

Garant předmětu:

- prof. RNDr. Miroslav Vlček, DrSc. (vlcek@fd.cvut.cz)

Základní informace
Pokračování

Domovská stránka předmětu MSP:
`http://zolotarev.fd.cvut.cz/msp`

Cvičení: Pravidla jsou na stránkách předmětu.

Cvičení pro druhý zápis: Vzhledem ke kapacitě počítačových laboratoří není možné, aby studenti opakující předmět navštěvovali cvičení. Budou odevzdávat elektronicky zadávané domácí úlohy a v průběhu semestru pro ně vypíšeme dva termíny, na kterých si napíšou písemné testy.

Literatura I

1. CARLSON, Gordon E. *Signal and Linear System Analysis: with Matlab*. 2. vyd. New York: John Wiley & Sons, 1998, 768 s. ISBN 04-711-2465-6.
2. CHATURVEDI, Devendra K. *Modeling and simulation of systems using MATLAB and Simulink*. Boca Raton: CRC Press, 2009, 733 s. ISBN 978-143-9806-722.
3. ALLEN, Roy G. D. *Matematická ekonomie*. Praha: Academia, 1971, 782 s.
4. OPPENHEIM, Alan V., Alan S. WILLSKY a Syed Hamid NAWAB. *Signals and Systems*. 2. vyd. Upper Saddle River: Prentice Hall, 1997, 957 s. ISBN 01-381-4757-4.
5. KARBAN, Pavel. *Výpočty a simulace v programech Matlab a Simulink*. Brno: Computer Press, 2006. ISBN 80-251-1301-9.

Literatura II

6. Informace o prostředí MATLAB
   http://zolotarev.fd.cvut.cz/mni/
   http://www.fd.cvut.cz/personal/nagyivan/PrpStat/Prp/MatIntro.pdf
7. Matematika-opakování
   http://euler.fd.cvut.cz/predmety/ml1/

Zápočet a zkouška

Celkový počet bodů, které studenti mohou během semestru získat, je 40. Ke zkoušce se z toho započítá maximálně 30.

Zápočet udělujeme od 25 bodů výše.

Body jsou rozděleny následovně:

- 10 bodů za 3 testy domácí přípravy,
- 4 body za tři automaticky hodnocené domácí úkoly,
- 12 bodů za dva praktické testy z Matlabu a Simulinku,
- 14 bodů za závěrečný test (dva početní příklady po pěti bodech a dvě doplňkové otázky za dva body).

Zápočet a zkouška
Pokračování

V průběhu semestru může být vyhlášeno několik **bonusových úloh**, jejichž úspěšní a nejrychlejší řešitelé budou odměněni až dvěma bonusovými body. Bonusové body se přičítají k celkovému bodovému zisku v semestru.

Bodování zaručuje, že v případě získání zápočtu (25 bodů a výše) můžete automaticky předmět absolvovat s klasifikací dostatečně, případně uspokojivě.

V případě, že máte zájem o lepší hodnocení, můžete zbylých 20 bodů získat u zkoušky.

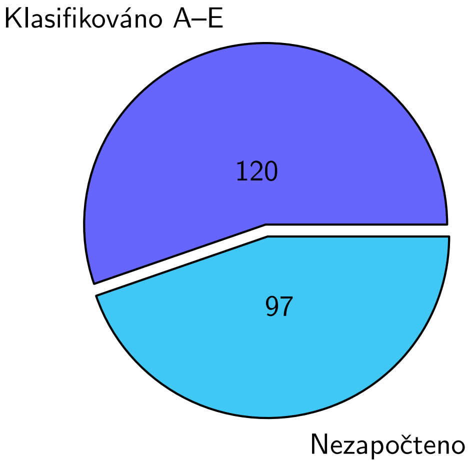
Domácí příprava

Témata domácích příprav a na ně navázaných testů:

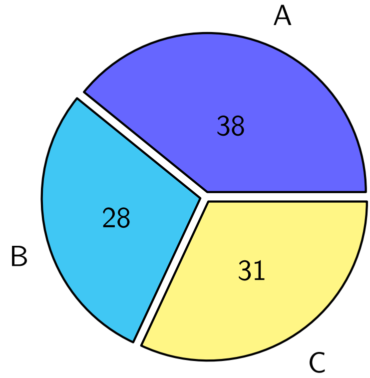
1.	Typy systémů
2.	Laplaceova transformace, zpětná Laplaceova transformace a řešení diferenciálních rovnic
3.	$\mathcal{Z}$-transformace, zpětná $\mathcal{Z}$-transformace a řešení diferenčních rovnic

Domácí přípravy jsou zároveň vaší přípravou na závěrečný test.

Výsledky 2015/2016

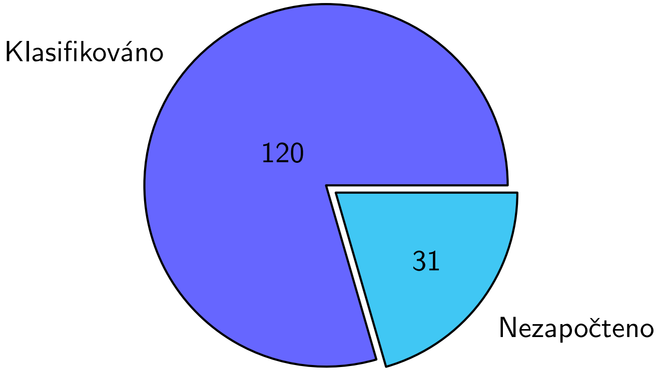


Výsledky 2015/2016



A	Nulová účast na cvičeních a testech
B	Přestalo docházet na cvičení a testy
C	Nesplnilo požadavky udělení zápočtu

Výsledky 2015/2016



Znalosti vstupní

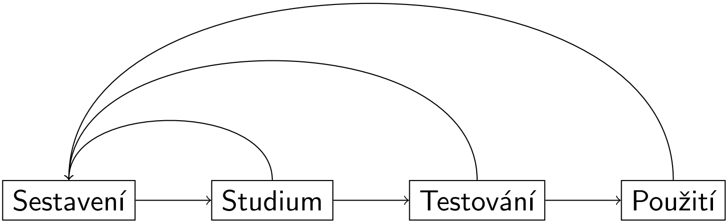
Toto jsou znalosti, u nichž předpokládáme, že je ovládáte. Jejich neznalost se neomlouvá.

1. Znalost základních pojmů a operací s vektory a maticemi
2. Znalost práce s komplexními čísly a základů funkcí komplexní proměnné
3. Znalost vlastností trigonometrických, hyperbolických, exponenciálních funkcí
4. Znalost výpočtu součtů nekonečné řady, derivace a integrálů funkce jedné proměnné
5. Znalost práce se zlomky, algebraickými výrazy a běžné středoškolské matematiky
6. Základní znalosti prostředí SCILAB/MATLAB (v rozsahu předmětů 11PT a 11STS)

Znalosti výstupní

1. Znalost použití Laplaceovy transformace pro řešení diferenciálních rovnic popisujících spojité lineární časově invariantní systémy
2. Znalost použití $\mathcal{Z}$-transformace pro řešení diferenčních rovnic popisujících diskrétní lineární časově invariantní systémy
3. Znalost nalezení stavového popisu ze slovního zadání dynamického systému
4. Znalost použití pojmu stabilita řešení a metody ověření stability dynamického systému
5. Znalost prostředí MATLAB/SIMULINK pro modelování dynamických systémů a řešení soustav nelineárních diferenciálních a diferenčních rovnic

Obsah přednášky



Tento proces opakovaných iterací je pro modelovací projekty typický a je jedním z nejužitečnějších aspektů modelování, pokud jde o lepší pochopení toho, jak systém funguje. Toto rozdělení činnosti v oblasti modelování budeme používat i nadále a bude tvořit strukturu pro zbytek tohoto kurzu.

Systém

Definition (Systém)

Charakteristické vlastnosti, se kterými vystačíme při modelování:

- systém považujeme za část prostředí, kterou lze od jejího okolí oddělit fyzickou nebo myšlenkovou hranicí,
- systém se skládá z podsystémů, vzájemně propojených součástí.

Je to část našeho světa, která se svým okolím nějak interaguje, například prostřednictvím vstupu a výstupu.

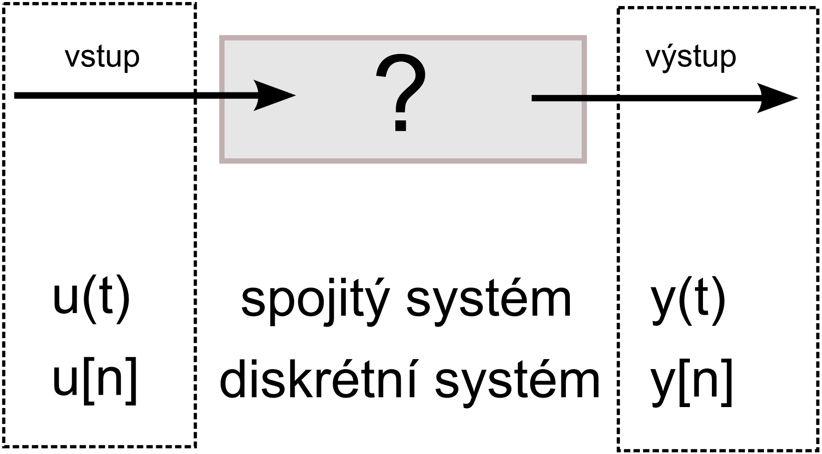
Co je modelování?

Model

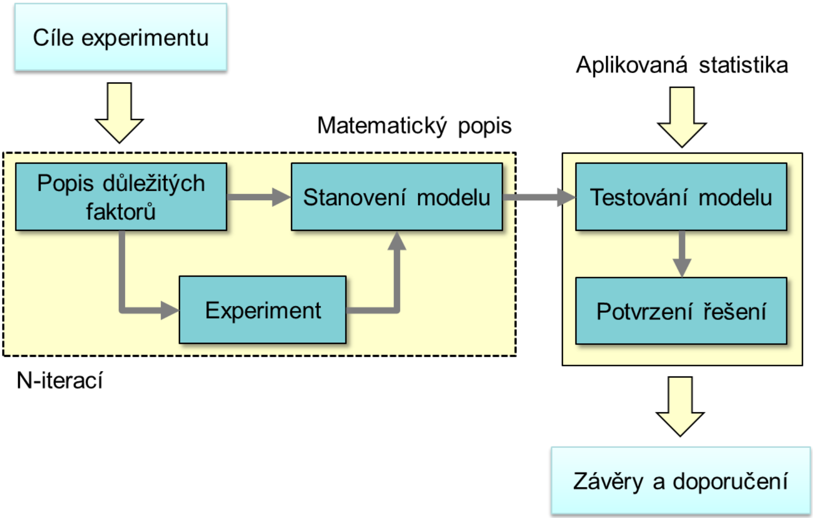
Za model můžeme pokládat náhradu nebo zjednodušení **skutečného objektu reálného světa** z hlediska jeho vlastností a funkčnosti.

Modelování je možné pouze pokud zavedeme **určitý stupeň** abstrakce a aproximace.

Diskrétní a spojitý model



Tvorba modelu

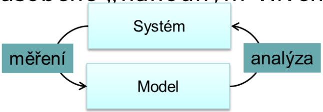


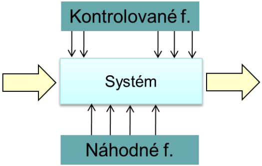
Tvorba modelu

Při analýze navrženého modelu chceme učinit co možná nejsilnější rozhodnutí na základě malého množství dat. Správnost našeho návrhu je nutné statisticky vyhodnotit.

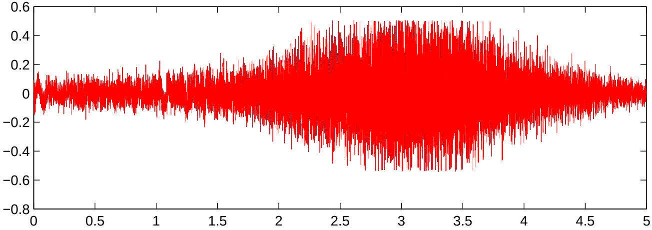
Problémy:

1. Významné diference ve sledovaných parametrech mohou být způsobeny špatným návrhem modelu, případně měřením dat
2. Je těžké rozlišit, zda diference v datech jsou skutečné nebo způsobené „náhodným vlivem“.





Svět dopravy se neobejde bez měření . . .



a teď jeho zvuk zvuk auta

Proč modelování systémů?

Otázky:

- Jak ověříme správnost výpočtu rychlosti šíření ptačí chřipky?
- Jak ověříme pevnost nového mostu?
- Jak ověříme bezpečnost softwaru?

Pokud nemůžeme předem prokázat určité vlastnosti na samotného systému, prokážeme hledané vlastnosti na jeho modelu!

Modely reálného světa

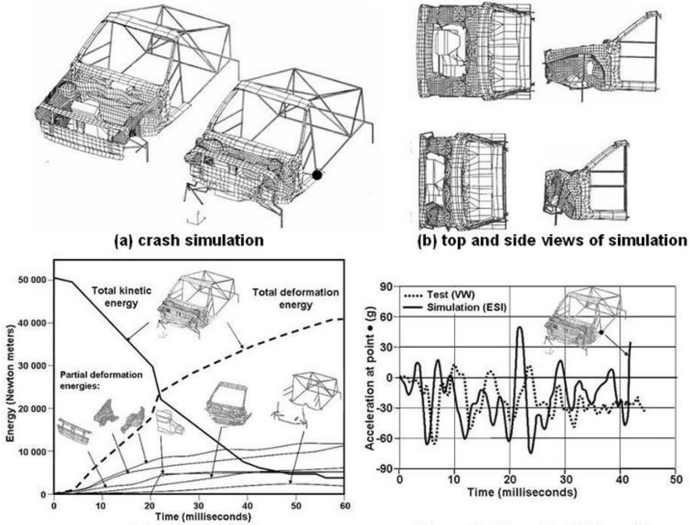
Antoni Gaudí

Modely reálného světa

Antoni Gaudí

Modely reálného světa

VW Polo crash test



(a) crash simulation

(b) top and side views of simulation

(c) energy balance

(d) acceleration at point in cabin

Vnější popis systémů

Vnější popis vychází z popisu systému vektorem vstupu $\mathbf{u}$ a vektorem výstupu $\mathbf{y}$.

Systém tak chápeme jako černou skříňku, o jejíchž vlastnostech se dozvíme pouze tehdy, jestliže budeme zkoumat její reakci na vnější události (signály, data).

Vnější model popisujeme diferenciální rovnicí pro systémy se spojitým časem a diferenční rovnicí pro systémy s diskrétním časem. Uvedená rovnice je obecně vyššího řádu, než 1.

Vnitřní popis systémů

Vnitřní, tzv. **stavový popis** systému používá k popisu dynamiky systému vektor **vnitřních stavů $\mathbf{x}$**.

Vektor vstupů $\mathbf{u}$ a vektor výstupních veličin $\mathbf{y}$ jsou druhotné veličiny vnitřního popisu.

Stavové modely popisujeme

- soustavou diferenciálních rovnic prvního řádu pro systémy se spojitým časem a
- soustavou diferenčních rovnic prvého řádu pro systémy s diskrétním časem.

Role matematiky

Modelování není samospasitelné:

- výstupy modelu je vždy třeba ověřovat,
- možné chyby jsou jak v modelu, tak i v jeho výpočtu.

Verifikace: Počítáme správný model.

Validace: Model počítá správně.

Obsah přednášky

2. Matematické modelování systémů
3. Příklady systémů
4. Iterace diferenční rovnice

Zombie apokalypsa
SIR model (1/8)

Zombie apokalypsa

SIR model(2/8)

Rovnice SIR modelu

$$S'(t) = -\alpha I(t)S(t)$$

$$R'(t) = \beta I(t)$$

$$I'(t) = -S'(t) - R'(t) = \alpha I(t)S(t) - \beta I(t)$$

$S(t)$	počet zdravých jedinců
$I(t)$	počet infikovaných
$R(t)$	počet mrtvých nebo imunních

$$S(t) + I(t) + R(t) = c$$

$$S'(t) + I'(t) + R'(t) = 0$$

Zombie apokalypsa

SIR model - Numerické řešení (3/8)

Co nám tyto rovnice říkají? Předpokládejme, populaci $S(0) = 100000$ zdravých jedinců, $I(0) = 10$ Zombies a $R(0) = 10$ imunních s mírou šíření nákazy $\alpha = 0.0001$ a úmrtností $\beta = 0.1$. V čase $t = 0$, tedy dnes:

$$S'(0) = -\alpha I(0)S(0) = -100$$

$$R'(0) = \beta I(0) = 1$$

$$I'(0) = -S'(0) - R'(0) = \alpha I(0)S(0) - \beta I(0) = 99$$

První den Zombie apokalypsy se počet zdravých jedinců sníží o 100, jeden člověk zemře a množství infikovaných vzroste o 99.

Zombie apokalypsa

SIR model - Numerické řešení(4/8)

Zítra, v čase $t = 1$ můžeme tedy očekávat

$$S(1) \approx S(0) + S'(0) = 99900$$

$$R(1) \approx R(0) + R'(0) = 11$$

$$I(1) \approx I(0) + I'(0) = 109$$

a

$$S'(1) = -\alpha I(1)S(1) = -1088.91$$

$$R'(1) = \beta I(1) = 10.9$$

$$I'(1) = -S'(1) - R'(1) = \alpha I(1)S(1) - \beta I(1) = 1078.01$$

Zombie apokalypsa

SIR model - Numerické řešení (5/8)

Rovnice nám umožňují odhadovat změny S, I, R i v minulosti. Pokud známe stav apokalypsy dnes (v čase $t = 0$), pak můžeme odhadnout hodnoty včera (v čase $t = -1$) jako

$$S(-1) \approx S(0) - S'(0)$$

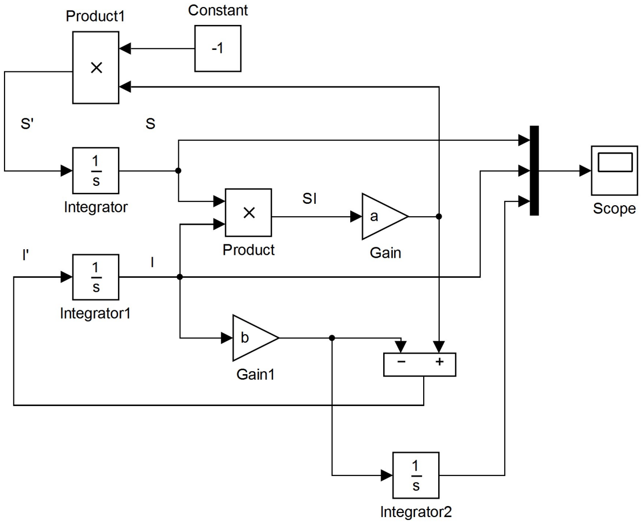
$$R(-1) \approx R(0) - R'(0)$$

$$I(-1) \approx I(0) - I'(0)$$

Takto můžeme numericky analyzovat změny S, I *a* R v čase a predikovat, jak se bude apokalypsa vyvíjet. Jedná se o rekurentní výpočty, které jsou s použitím počítače velmi snadné.

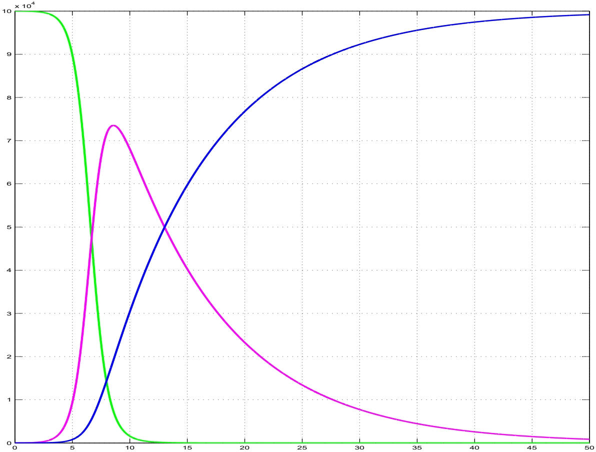
Zombie apokalypsa

SIR model - Simulink (6/8)



Zombie apokalypsa

SIR model - Simulink (7/8)



$\alpha = 0.00015,\ \beta = 0.11,\ S(0) = 100000,\ I(0) = R(0) = 10$

Zombie apokalypsa

SIR model - Analytické řešení (8/8)

Analýza rovnice pro infikované

$$I'(t) = \alpha S(t)I(t) - \beta I(t) = (\alpha S(t) - \beta)I(t)$$

Pokud

- $S(t) > \frac{\beta}{\alpha}$ pak $I'(t) > 0$ a tedy apokalypsa se zhoršuje a počet Zombies roste,
- $S(t) < \frac{\beta}{\alpha}$ pak $I'(t) < 0$ situace se lepší a počet Zombies klesá,
- $\Rightarrow \frac{\beta}{\alpha}$ je práh.

Počet infikovaných tedy bude klesat, pokud se nám podaří snížit hodnotu koeficientu α, případně i β.

Příklady systémů

Příklad variace ceny (1/2)

Rovnice nabídky

Nabídka dnes závisí na včerejší ceně a to tak, že nabídka stoupá s rostoucí cenou. Pro $\mathcal{C} > 0$ platí

$$n[k] = \mathcal{C}c[k-1] + \mathcal{A}u[k].$$

Rovnice poptávky

Poptávka dnes závisí na dnešní ceně a to tak, že poptávka klesá s rostoucí cenou. Pro $\mathcal{D} > 0$ platí

$$p[k] = -\mathcal{D}c[k] + \mathcal{B}u[k].$$

Příklady systémů

Příklad variace ceny (2/2)

Rovnost nabídky a poptávky

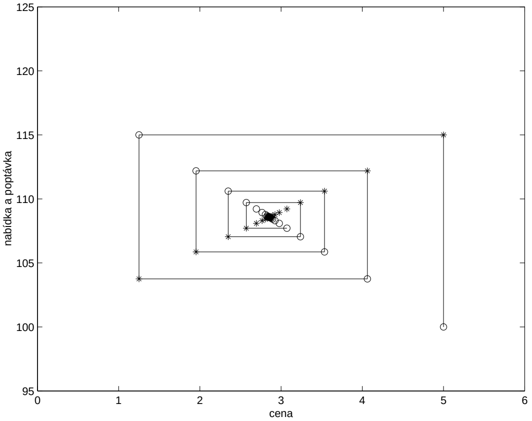
$$n[k] = p[k]$$

pak vede na diferenční rovnici prvního řádu

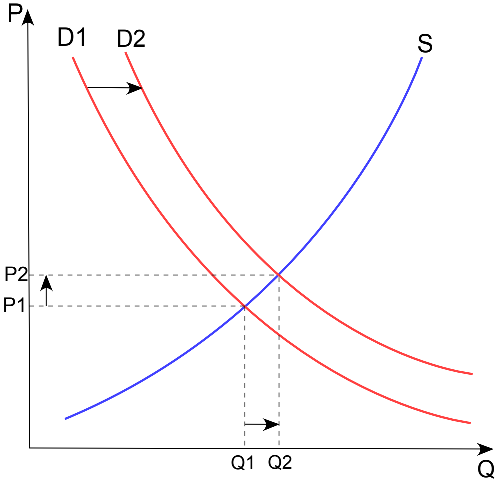
$$c[k] + \frac{\mathcal{C}}{\mathcal{D}} c[k-1] = \frac{\mathcal{B} - \mathcal{A}}{\mathcal{D}} u[k].$$

Příklady systémů

Příklad variace ceny



Rozdíl mezi lineárním a linearizovaným



Obsah přednášky

Iterace rovnice ceny

Diferenční rovnici, kterou jsme odvodili

$$c[k] + \frac{\mathcal{C}}{\mathcal{D}} c[k-1] = \frac{\mathcal{B}-\mathcal{A}}{\mathcal{D}} x[k]$$

přepíšeme do kanonického tvaru

$$y[k] + \gamma y[k-1] = \beta u[k]$$

a postupnými iteracemi nalezneme pro $u[k] = \mathbf{1}[k]$ a počáteční podmínku $y[-1] = 0$

Iterace rovnice ceny

Pro $k = 0$:

$$y[0] + \gamma y[-1] = \beta u[0]$$
$$y[0] = \beta - \gamma y[-1] = \beta$$

Pro $k = 1$:

$$y[1] + \gamma y[0] = \beta u[1]$$
$$y[1] = \beta - \gamma y[0] = \beta - \beta\gamma$$

Iterace rovnice ceny

Pro $k = 2$:

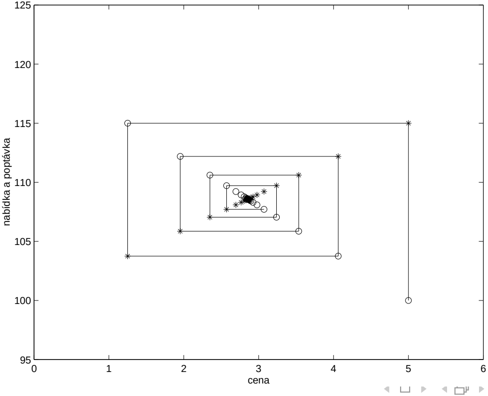
$$y[2] + \gamma y[1] = \beta u[2]$$
$$y[2] = \beta - \gamma y[1] = \beta - \beta\gamma + \beta\gamma^2$$

Pro obecné n:

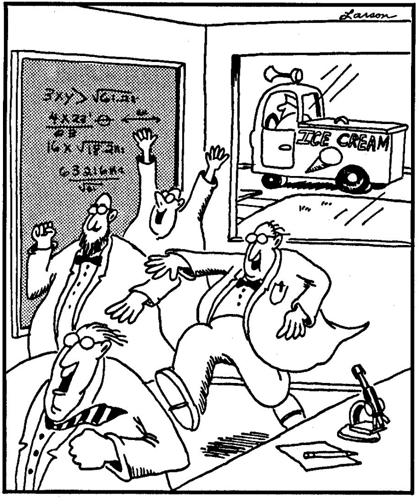
$$y[n] + \gamma y[n-1] = \beta u[n]$$
$$y[n] = \beta - \gamma y[n-1] = \beta\left(1 - \gamma + \gamma^2 + \cdots + (-\gamma)^n\right)$$

Iterace rovnice ceny

$$y[n] = \beta \sum_{m=0}^{n} (-\gamma)^m = \beta \frac{1 - (-\gamma)^{n+1}}{1+\gamma} = \frac{\beta}{1+\gamma} + \frac{\beta\gamma}{1+\gamma}(-\gamma)^n$$



Na závěr



Děkuji za pozornost. Až budete utíkat, prosím opatrně.