

Úvodní informace

Matematické modelování

Modelování systémů a procesů (11MSP)

Bohumil Kovář, Jan Příklad

Ústav aplikované matematiky
ČVUT v Praze, Fakulta dopravní

1. přednáška 11MSP
2018

verze: 2018-02-21 15:47



Obsah přednášky

1 O předmětu

Základní organizační informace

Seznam literatury

Hodnocení předmětu

Domácí příprava

Vstupní znalosti

Výstupní znalosti



Základní informace

Přednášející:

- Ing. Bohumil Kovář, Ph.D. (kovar@fd.cvut.cz)
přednášky čt. 9:45 -11:15 a 11:30 - 13:00

Cvičící:

- Mgr. Lucie Kárná, Ph.D. (karna@fd.cvut.cz)
- Mgr. Marek Honců, Ph.D. (honcumar@fd.cvut.cz)

Erasmus:

- Dr. Ing. Jan Příkryl (prikrjan@fd.cvut.cz)

Garant předmětu:

- prof. RNDr. Miroslav Vlček, DrSc. (vlcek@fd.cvut.cz)



Základní informace

Pokračování

Domovská stránka předmětu MSP:

<http://zolotarev.fd.cvut.cz/msp>

Cvičení: Pravidla jsou na stránkách předmětu.

Cvičení pro druhý zápis: Vzhledem ke kapacitě počítačových laboratoří není možné, aby studenti opakující předmět navštěvovali cvičení. Budou odevzdávat elektronicky zadávané domácí úlohy a v průběhu semestru pro ně vypíšeme dva termíny, na kterých si napíší písemné testy.



Literatura I

- ① CARLSON, Gordon E. *Signal and Linear System Analysis: with Matlab*. 2. vyd. New York: John Wiley & Sons, 1998, 768 s. ISBN 04-711-2465-6.
- ② CHATURVEDI, Devendra K. *Modeling and simulation of systems using MATLAB and Simulink*. Boca Raton: CRC Press, 2009, 733 s. ISBN 978-143-9806-722.
- ③ ALLEN, Roy G. D. *Matematická ekonomie*. Praha: Academia, 1971, 782 s.
- ④ OPPENHEIM, Alan V., Alan S. WILLSKY a Syed Hamid NAWAB. *Signals and Systems*. 2. vyd. Upper Saddle River: Prentice Hall, 1997, 957 s. ISBN 01-381-4757-4.
- ⑤ KARBAN, Pavel. *Výpočty a simulace v programech Matlab a Simulink*. Brno: Computer Press, 2006. ISBN 80-251-1301-9.



Literatura II

⑥ Informace o prostředí MATLAB

<http://zolotarev.fd.cvut.cz/mni/>

<http://www.fd.cvut.cz/personal/nagyivan/PrpStat/Prp/MatIntro.pdf>

⑦ Matematika-opakování

<http://euler.fd.cvut.cz/predmety/ml1/>



Zápočet a zkouška

Celkový počet bodů, které studenti mohou během semestru získat, je 40. Ke zkoušce se z toho započítá maximálně 30.

Zápočet udělujeme od 25 bodů výše.

Body jsou rozděleny následovně:

- 10 bodů za 3 testy domácí přípravy,
- 4 body za tři automaticky hodnocené domácí úkoly,
- 12 bodů za dva praktické testy z Matlabu a Simulinku,
- 14 bodů za závěrečný test (dva početní příklady po pěti bodech a dvě doplňkové otázky za dva body).



Zápočet a zkouška

Pokračování

V průběhu semestru může být vyhlášeno několik **bonusových úloh**, jejichž úspěšní a nejrychlejší řešitelé budou odměněni až dvěma bonusovými body. Bonusové body se přičítají k celkovému bodovému zisku v semestru.

Bodování zaručuje, že v případě získání zápočtu (25 bodů a výše) můžete automaticky předmět absolvovat s klasifikací **dostatečně**, případně **uspokojivě**.

V případě, že máte zájem o lepší hodnocení, můžete zbylých 20 bodů získat u zkoušky.



Domácí příprava

Témata domácích příprav a na ně navázaných testů:

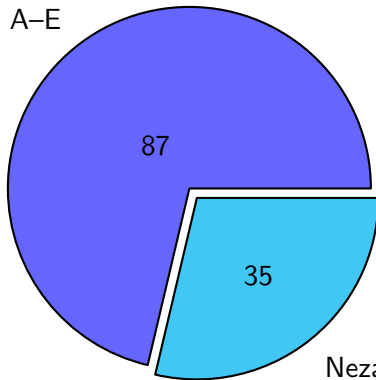
1.	Typy systémů
2.	Laplaceova transformace, zpětná Laplaceova transformace a řešení diferenciálních rovnic
3.	\mathcal{Z} -transformace, zpětná \mathcal{Z} -transformace a řešení diferenčních rovnic

Domácí přípravy jsou zároveň vaší přípravou na závěrečný test.



Výsledky 2016/2017

Klasifikováno A–E



Nezapočteno

Počet studujících dle KOS ke dni 21. února 2018 = 97

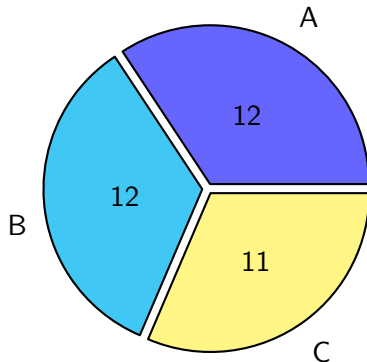


Výsledky 2016/2017

Pravěk	Pravěk	3/51	0	0	-	1.2	0.8	-	-	1	-	-	-	-	0	-	-	-	1	2	0	0	0	3	3	F
Pravěk	Pravěk	2/97	0.5	-	-	0.6	0.2	0.7	-	2	-	-	-	-	-	-	-	-	2.5	1.5	-	0	0	4	4	F
Pravěk	Pravěk	2/51	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	0	0	-	0	0	0	0	F
Pravěk	Pravěk	2/15	2	-	-	-	-	-	-	2	-	-	-	-	-	-	-	-	4	0	-	0	0	4	4	F
Pravěk	Pravěk	2/50	-	0	-	-	-	-	-	2	1.5	-	-	-	-	-	-	-	3.5	0	-	0	0	3.5	3.5	F
Pravěk	Pravěk	2/60	0	-	-	-	-	-	-	2.5	-	0.3	-	-	-	-	-	-	2.5	0	-	0.3	0	2.8	2.8	F
Pravěk	Pravěk	2/60	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	0	0	-	0	0	0	0	F
Pravěk	Pravěk	2/50	0.2	omluva	-	1.2	0.8	-	-	4.5	-	-	-	-	-	-	-	-	4.7	2	-	0	0	6.7	6.7	F
Pravěk	Pravěk	3/60	0	-	-	1.2	0	0.9	-	3	-	-	-	-	-	-	-	-	3	2.1	-	0	0	5.1	5.1	F
Pravěk	Pravěk	3/80	0.5	0	-	1.2	0.8	1	-	0	1	-	-	-	-	-	-	-	1.5	3	-	0	0	4.5	4.5	F
Pravěk	Pravěk	2/50	-	-	-	1.2	0.8	-	-	2	-	0.5	-	-	-	-	-	-	2	2	-	0.5	0	4.5	4.5	F
Pravěk	Pravěk	3/99	0.5	0.1	0	1.2	0.8	1	1	1	2.8	-	0.3	-	0	-	-	-	4.4	4	0	0.3	0	8.7	8.7	F
Pravěk	Pravěk	1/97	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	0	0	-	0	0	0	0	F
Pravěk	Pravěk	3/99	1	0	-	1.2	0.8	-	-	0.5	-	-	-	-	-	-	-	-	1.5	2	-	0	0	3.5	3.5	F
Pravěk	Pravěk	2/50	0	-	-	1.2	0.8	1	-	3	-	-	-	-	-	-	-	-	3	3	-	0	0	6	6	F
Pravěk	Pravěk	3/51	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	0	0	-	0	0	0	0	F
Pravěk	Pravěk	2/98	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	0	0	-	0	0	0	0	F
Pravěk	Pravěk	3/80	0	1.5	omluva	1.2	0.8	1	0.7	1.5	-	-	-	-	-	-	-	-	3	3.7	-	0	0	6.7	6.7	F



Výsledky 2016/2017



- A Nulová účast na cvičeních a testech
- B Přestalo docházet na cvičení a testy
- C Nesplnilo požadavky udělení zápočtu



Znalosti vstupní

Toto jsou znalosti, u nichž předpokládáme, že je ovládáte. Jejich neznalost se **neomlouvá**.

- 1 Znalost základních pojmů a operací s vektory a maticemi
- 2 Znalost práce s komplexními čísly a základů funkcí komplexní proměnné
- 3 Znalost vlastností trigonometrických, hyperbolických, exponenciálních funkcí
- 4 Znalost výpočtu součtů nekonečné řady, derivace a integrálů funkce jedné proměnné
- 5 Znalost práce se zlomky, algebraickými výrazy a běžné středoškolské matematiky
- 6 Základní znalosti prostředí SCILAB/MATLAB (v rozsahu předmětů 11PT a 11STS)



Znalosti výstupní

- 1 Znalost použití Laplaceovy transformace pro řešení diferenciálních rovnic popisujících spojité lineární časově invariantní systémy
- 2 Znalost použití \mathcal{Z} -transformace pro řešení diferenčních rovnic popisujících diskrétní lineární časově invariantní systémy
- 3 Znalost nalezení stavového popisu ze slovního zadání dynamického systému
- 4 Znalost použití pojmu stabilita řešení a metody ověření stability dynamického systému
- 5 Znalost prostředí MATLAB/SIMULINK pro modelování dynamických systémů a řešení soustav nelineárních diferenciálních a diferenčních rovnic



Obsah přednášky

② Matematické modelování systémů

Jaké cíle může modelování dosáhnout?

Klasifikace modelů

Fáze modelování

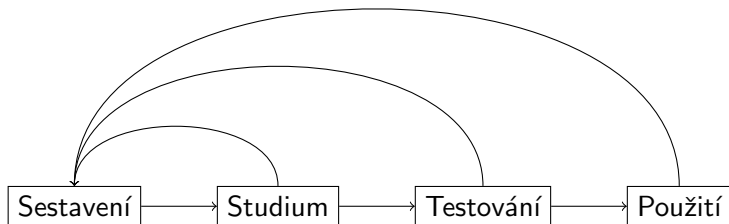
Model systému

Vnější popis systémů

Vnitřní popis systémů

③ Příklady systémů





Tento proces opakovaných iterací je pro modelovací projekty typický a je jedním z nejužitečnějších aspektů modelování, pokud jde o lepší pochopení toho, jak systém funguje. Toto rozdělení činnosti v oblasti modelování budeme používat i nadále a bude tvořit strukturu pro zbytek tohoto kurzu.



Systém

Definition (Systém)

Charakteristické vlastnosti, se kterými vystačíme při modelování:

- systém považujeme za část prostředí, kterou lze od jejího okolí oddělit fyzickou nebo myšlenkovou hranicí,
- systém se skládá z podsystemů, vzájemně propojených součástí.

Je to část našeho světa, která se svým okolím nějak interaguje, například prostřednictvím vstupu a výstupu.



Co je modelování?

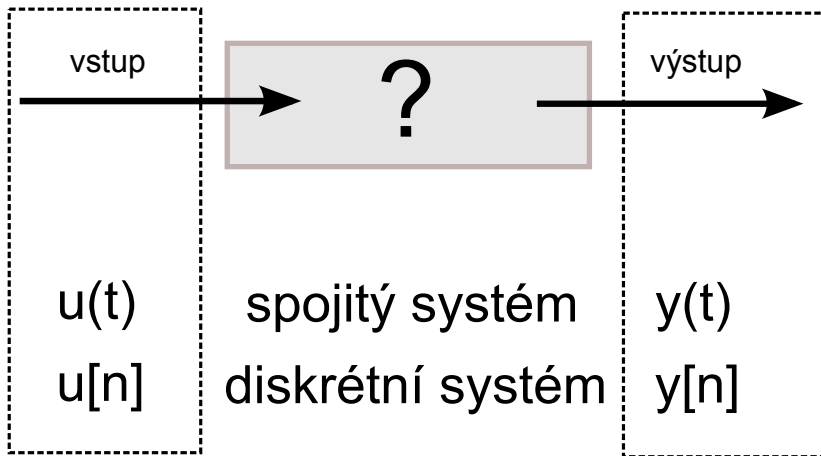
Model

Za model můžeme pokládat náhradu nebo zjednodušení **skutečného objektu reálného světa** z hlediska jeho vlastností a funkčnosti.

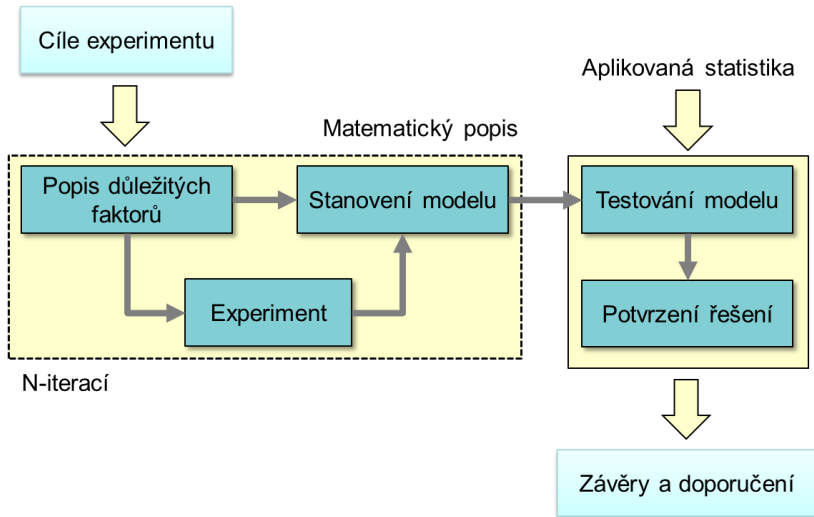
Modelování je možné pouze pokud zavedeme **určitý stupeň** abstrakce a aproximace.



Diskrétní a spojitý model



Tvorba modelu

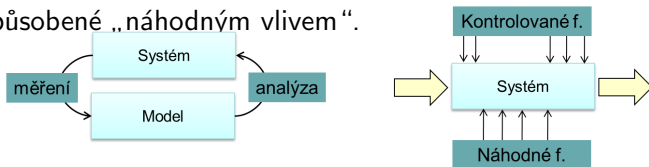


Tvorba modelu

Při analýze navrženého modelu chceme učinit co možná nejsilnější rozhodnutí na základě malého množství dat. Správnost našeho návrhu je nutné statisticky vyhodnotit.

Problémy:

- 1 Významné diference ve sledovaných parametrech mohou být způsobeny špatným návrhem modelu, případně měřením dat
- 2 Je těžké rozlišit, zda diference v datech jsou skutečné nebo způsobené „náhodným vlivem“.



Proč modelování systémů?

Otázky:

- Jak ověříme správnost výpočtu rychlosti šíření ptačí chřipky?
- Jak ověříme pevnost nového mostu?
- Jak ověříme bezpečnost softwaru?

Pokud nemůžeme předem prokázat určité vlastnosti na samotného systému, prokážeme hledané vlastnosti na jeho modelu!



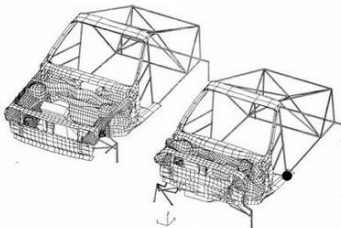
Modely reálného světa

Antoni Gaudí

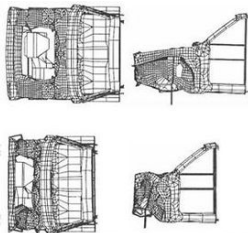


Modely reálného světa

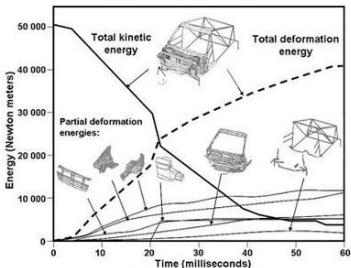
VW Polo crash test



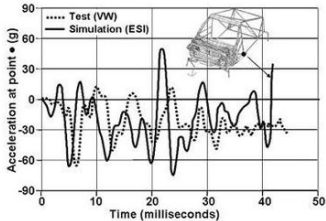
(a) crash simulation



(b) top and side views of simulation



(c) energy balance



(d) acceleration at point in cabin



Vnější popis systémů

Vnější popis vychází z popisu systému vektorem **vstupu u** a vektorem **výstupu y** .

System tak chápeme jako černou skříňku, o jejíchž vlastnostech se dozvíme pouze tehdy, jestliže budeme zkoumat její reakci na vnější události (signály, data).

Vnější model popisujeme diferenciální rovnicí pro systémy se spojitým časem a diferenční rovnicí pro systémy s diskretním časem. Uvedená rovnice je obecně vyššího řádu, než 1.



Vnitřní popis systémů

Vnitřní, tzv. **stavový popis** systému používá k popisu dynamiky systému vektor **vnitřních stavů** \mathbf{x} .

Vektor vstupů \mathbf{u} a vektor výstupních veličin \mathbf{y} jsou druhotné veličiny vnitřního popisu.

Stavové modely popisujeme

- soustavou diferenciálních rovnic prvního řádu pro systémy se spojitým časem a
- soustavou diferenčních rovnic prvního řádu pro systémy s diskrétním časem.



Role matematiky

Modelování není samospasitelné:

- výstupy modelu je vždy třeba ověřovat,
- možné chyby jsou jak v modelu, tak i v jeho výpočtu.

Verifikace: Počítáme správný model.

Validace: Model počítá správně.



Obsah přednášky

② Matematické modelování systémů

③ Příklady systémů



Zombie apokalypsa

SIR model (1/8)



Zombie apokalypsa

SIR model(2/8)

Rovnice SIR modelu

$$S'(t) = -\alpha I(t)S(t)$$

$$R'(t) = \beta I(t)$$

$$I'(t) = -S'(t) - R'(t) = \alpha I(t)S(t) - \beta I(t)$$

$S(t)$ počet zdravých jedinců

$I(t)$ počet infikovaných

$R(t)$ počet mrtvých nebo imunních

$$S(t) + I(t) + R(t) = c$$

$$S'(t) + I'(t) + R'(t) = 0$$



Zombie apokalypsa

SIR model - Numerické řešení (3/8)

Co nám tyto rovnice říkají? Předpokládejme, populaci $S(0) = 100000$ zdravých jedinců, $I(0) = 10$ Zombies a $R(0) = 10$ imunních s mírou šíření nákazy $\alpha = 0.0001$ a úmrtností $\beta = 0.1$. V čase $t = 0$, tedy dnes:

$$S'(0) = -\alpha I(0)S(0) = -100$$

$$R'(0) = \beta I(0) = 1$$

$$I'(0) = -S'(0) - R'(0) = \alpha I(0)S(0) - \beta I(0) = 99$$

První den Zombie apokalypsy se počet zdravých jedinců sníží o 100, jeden člověk zemře a množství infikovaných vzroste o 99.



Zombie apokalypsa

SIR model - Numerické řešení(4/8)

Zítra, v čase $t = 1$ můžeme tedy očekávat

$$S(1) \approx S(0) + S'(0) = 99900$$

$$R(1) \approx R(0) + R'(0) = 11$$

$$I(1) \approx I(0) + I'(0) = 109$$

a

$$S'(1) = -\alpha I(1)S(1) = -1088.91$$

$$R'(1) = \beta I(1) = 10.9$$

$$I'(1) = -S'(1) - R'(1) = \alpha I(1)S(1) - \beta I(1) = 1078.01$$



Zombie apokalypsa

SIR model - Numerické řešení (5/8)

Rovnice nám umožňují odhadovat změny S, I, R i v minulosti. Pokud známe stav apokalypsy dnes (v čase $t = 0$), pak můžeme odhadnout hodnoty včera (v čase $t = -1$) jako

$$S(-1) \approx S(0) - S'(0)$$

$$R(-1) \approx R(0) - R'(0)$$

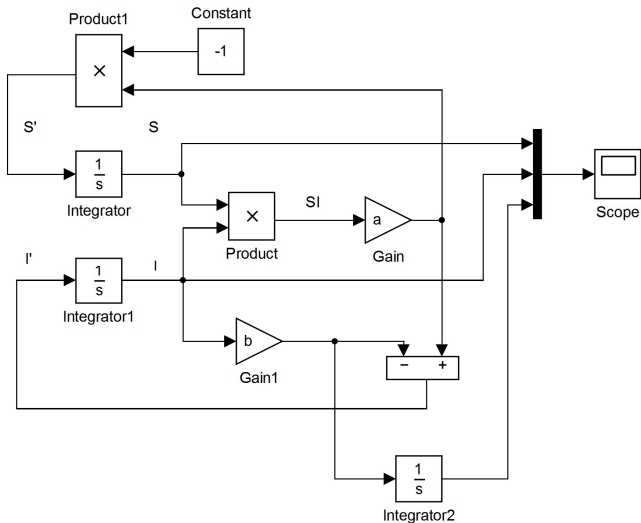
$$I(-1) \approx I(0) - I'(0)$$

Takto můžeme numericky analyzovat změny S, I a R v čase a predikovat, jak se bude apokalypsa vyvíjet. Jedná se o rekurentní výpočty, které jsou s použitím počítače velmi snadné.



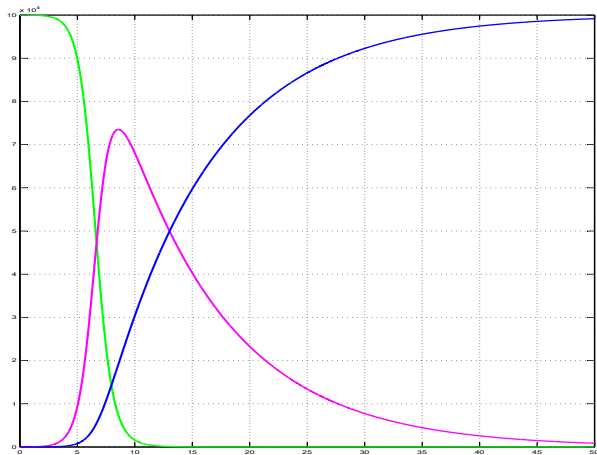
Zombie apokalypsa

SIR model - Simulink (6/8)



Zombie apokalypsa

SIR model - Simulink (7/8)



$$\alpha = 0.00015, \beta = 0.11, S(0) = 100000, I(0) = R(0) = 10$$



Zombie apokalypsa

SIR model - Analytické řešení (8/8)

Analýza rovnice pro infikované

$$I'(t) = \alpha S(t)I(t) - \beta I(t) = (\alpha S(t) - \beta)I(t)$$

Pokud

- $S(t) > \frac{\beta}{\alpha}$ pak $I'(t) > 0$ a tedy apokalypsa se zhoršuje a počet Zombies roste,
- $S(t) < \frac{\beta}{\alpha}$ pak $I'(t) < 0$ situace se lepší a počet Zombies klesá,
- $\Rightarrow \frac{\beta}{\alpha}$ je práh.

Počet infikovaných tedy bude klesat, pokud se nám podaří snížit hodnotu koeficientu α , případně i β .



Romeo a Julie

Love model (1/8)



Romeo a Julie


Love model¹ (2/8)

Předpokládejme, že funkce $R(t)$ popisuje lásku Romea k Julii v čase t a funkce $J(t)$ popisuje lásku Julie k Romeovi. Předpokládejme, že kladné hodnoty funkcí $R(t)$ a $J(t)$ představují lásku, vášeň atp., záporné hodnoty nenávisť a nulové hodnoty lhostejnost.

Rovnice modelu

$$R'(t) = rrR(t) + rjJ(t)$$

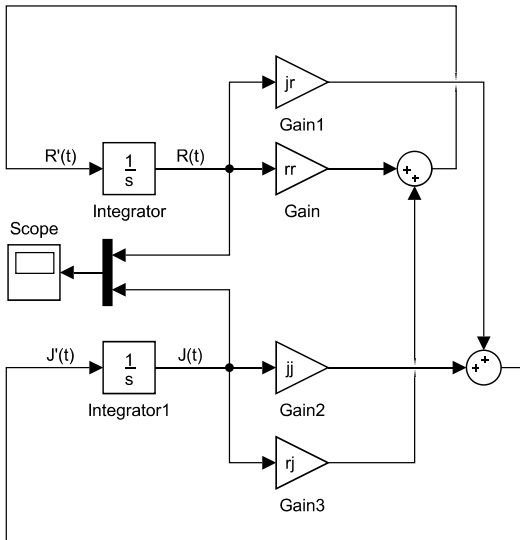
$$J'(t) = jrR(t) + jjJ(t)$$

¹S. H. Strogatz: Love Affairs and Differential Equations 



Romeo a Julie

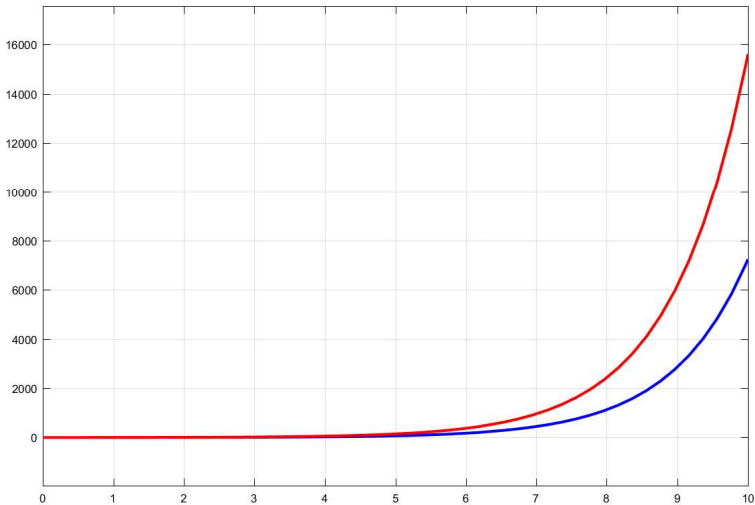
Love model (3/8)



oooooooooooo

Romeo a Julie

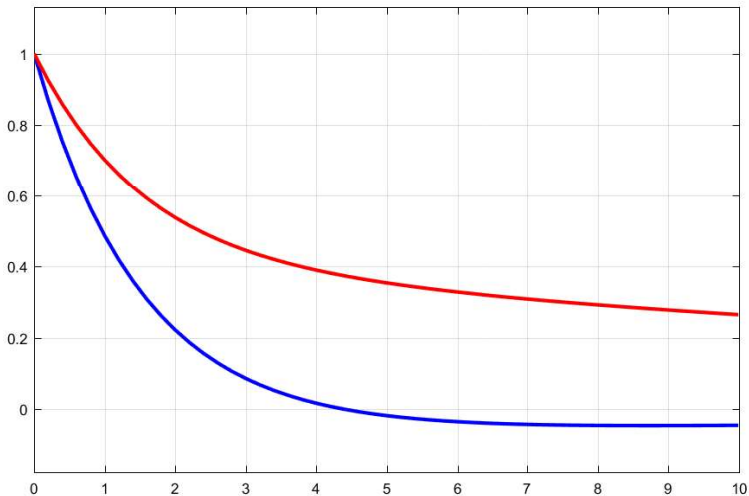
Love model [$rr=0.5$, $rj = 0.2$, $jj = 0.7$, $jr = 0.5$] (4/8)



oooooooooooo

Romeo a Julie

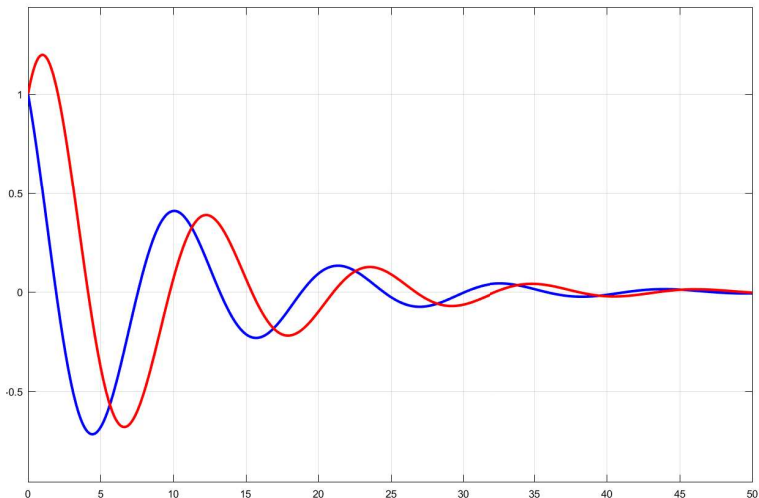
Love model [$rr=-0.6$, $rj = -2$, $jj = 0.7$, $jr = 0.8$] (5/8)



oooooooooooo

Romeo a Julie

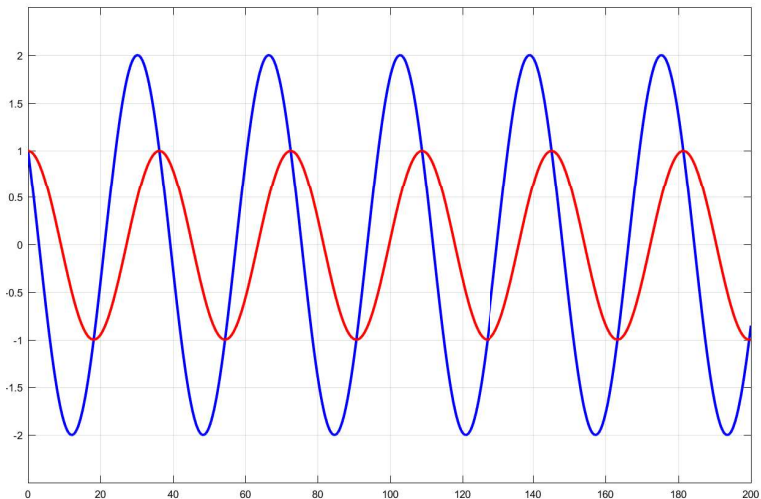
Love model [$rr=0.1$, $rj = -0.5$, $jj = -0.3$, $jr = 0.7$] (6/8)



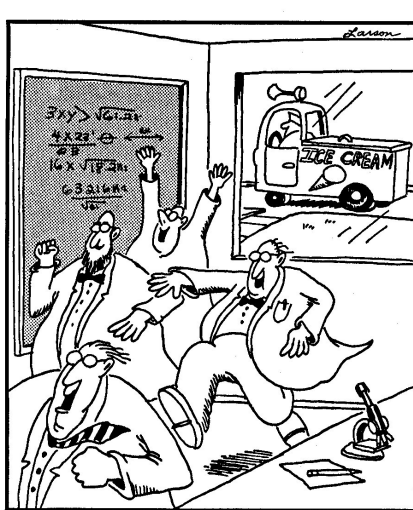
oooooooooooo

Romeo a Julie

Love model [rr=0.1, rj = -0.4, jj = -0.1, jr = 0.1] (7/8)



Na závěr



Děkuji za pozornost. Až budete utíkat, prosím opatrně.

