

Vnější a vnitřní popis systémů

Modelování systémů a procesů (11MSP)

Bohumil Kovář, Jan Přikryl, Miroslav Vlček

Ústav aplikované matematiky
ČVUT v Praze, Fakulta dopravní

4. přednáška 11MSP
2018

verze: 2018-03-05 09:51



Obsah přednášky

① Vnější a vnitřní popis systému

System druhého řádu

Obecný systém n -tého řádu

② Příklad

③ Diskrétní systémy

④ Příklad stavového modelu z reálného světa



Systém druhého řádu

Diferenciální rovnice druhého řádu s počátečními podmínkami ve tvaru

$$y''(t) + a_1 y'(t) + a_0 y(t) = u(t) \quad (1)$$

$$y(0) = c_1 \quad \text{a} \quad y'(0) = c_2, \quad (2)$$

udává vztah vstupu $u(t)$ a výstupu $y(t)$ spojitého lineárního stacionárního systému.



Systém druhého řádu

Tento vnější popis převedeme na stavový popis volbou stavového vektoru

$$x_1(t) = y(t),$$

$$x_2(t) = y'(t).$$



Systém druhého řádu

Dosadíme za $y'(t) = x_2(t)$ a $y''(t) = x_2'(t)$ do původní diferenciální rovnice a obdržíme

$$x_2'(t) + a_1 x_2(t) + a_0 x_1(t) = u(t).$$

Současně platí

$$x_1'(t) = y'(t) = x_2(t).$$



Systém druhého řádu

Dostáváme tak

$$\begin{bmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

respektive

$$\begin{bmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \end{bmatrix} = \mathbf{A} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \mathbf{B}u(t)$$

kde

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$



Systém druhého řádu

Rovnici pro výstup vyjádříme z definice stavových veličin

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + 0 u(t).$$

Matice **D** je nulová a jedná se o tak zvaný **ryzí systém**.
Pro výstupní matici dostáváme

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Počáteční podmínky se transformují do stavového popisu jako

$$y(0) = x_1(0) = c_1 \quad \text{a} \quad y'(0) = x_2(0) = c_2.$$



Stavové rovnice z diferenciální rovnice n -tého řádu

Předpokládejme opět, že systém je popsán diferenciální rovnicí

$$y^{(n)}(t) + a_{n-1}y^{(n-1)}(t) + \dots + a_1y^{(1)}(t) + a_0y(t) = u(t)$$

Ukážeme nyní, jak se koeficienty diferenciální rovnice objeví ve stavových maticích. Postup je zobecněním předcházejícího příkladu.



Stavové rovnice z diferenciální rovnice n -tého řádu

Stavové veličiny volíme jako derivace hledaného řešení $y(t)$ takto

$$x_1(t) = y(t),$$

$$x_2(t) = y'(t),$$

$$x_3(t) = y''(t),$$

$$x_4(t) = y^{(3)}(t),$$

$$\vdots$$

$$x_n(t) = y^{(n-1)}(t),$$



Stavové rovnice z diferenciální rovnice n -tého řádu

Ze soustavy a diferenciální rovnice plyne postupně

$$x_1'(t) = x_2(t),$$

$$x_2'(t) = x_3(t),$$

$$\vdots$$

$$x_{n-1}'(t) = x_n(t),$$

$$x_n'(t) = u(t) - a_0x_1(t) - a_1x_2(t) - \dots - a_{n-1}x_n(t).$$



Stavové rovnice z diferenciální rovnice n -tého řádu

$$\begin{bmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \\ x_3'(t) \\ \vdots \\ x_n'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ & & & \vdots & & \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & -a_3 & \cdots & -a_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$



Stavové rovnice z diferenciální rovnice n-tého řádu

V souladu s obecným značením pro stavový popis LTI systémů označíme

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ & & \vdots & & & \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & -a_3 & \dots & -a_{n-1} \end{bmatrix}$$

a

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}.$$



Stavové rovnice z diferenciální rovnice n-tého řádu

Dále platí

$$y = [1 \ 0 \ 0 \ 0 \ \dots \ 0] \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix},$$

takže

$$\mathbf{C} = [1 \ 0 \ 0 \ 0 \ \dots \ 0]$$

a

$$\mathbf{D} = [0].$$



Stavové rovnice z diferenciální rovnice n-tého řádu

Počáteční podmínky mají tvar

$$\begin{aligned}y(0) &= x_1(0) = c_1, \\y'(0) &= x_2(0) = c_2, \\y''(0) &= x_3(0) = c_3, \\&\vdots \\y^{(n-1)}(0) &= x_n(0) = c_n.\end{aligned}$$



Obsah přednášky

① Vnější a vnitřní popis systému

② Příklad

Soustava dvou vozíků

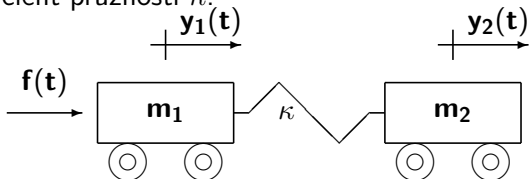
③ Diskrétní systémy

④ Příklad stavového modelu z reálného světa



Příklad

Dva vozíky s hmotností m_1 a m_2 jsou spojeny pružinou, která má koeficient pružnosti κ .



Podle obrázku působí na první vozík hnací síla $f(t)$.



Polohy vozíků jsou $y_1(t)$ a $y_2(t)$, takže při zanedbání tření mají pohybové rovnice tvar

$$m_1 y_1''(t) = f(t) + \kappa (y_2(t) - y_1(t))$$

$$m_2 y_2''(t) = -\kappa (y_2(t) - y_1(t))$$

Máme sestavit stavové rovnice pro systém dvou vozíků.



Položíme

$$\begin{aligned}x_1(t) &= y_1(t), & x_2(t) &= y_2(t), \\x_3(t) &= y_1'(t), & x_4(t) &= y_2'(t)\end{aligned}$$

a dostáváme soustavu rovnic

$$x_1'(t) \equiv y_1'(t) = x_3(t),$$

$$x_2'(t) \equiv y_2'(t) = x_4(t),$$

$$x_3'(t) \equiv y_1''(t) = \frac{\kappa}{m_1} (x_2(t) - x_1(t)) + \frac{1}{m_1} f(t),$$

$$x_4'(t) \equiv y_2''(t) = -\frac{\kappa}{m_2} (x_2(t) - x_1(t)).$$



kteřou již snadno převedeme na stavový popis

$$\begin{bmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \\ x_3'(t) \\ x_4'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{\kappa}{m_1} & \frac{\kappa}{m_1} & 0 & 0 \\ \frac{\kappa}{m_2} & -\frac{\kappa}{m_2} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{m_1} \\ 0 \end{bmatrix} f(t)$$

a

$$y = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \end{bmatrix}.$$



Máme matice stavového popisu ve tvaru

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{\kappa}{m_1} & \frac{\kappa}{m_1} & 0 & 0 \\ \frac{\kappa}{m_2} & -\frac{\kappa}{m_2} & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{m_1} \\ 0 \end{bmatrix}$$

a

$$\mathbf{C} = [0 \quad 1 \quad 0 \quad 0]$$



Obsah přednášky

- 1 Vnější a vnitřní popis systému
- 2 Příklad
- 3 Diskrétní systémy**
 System druhého řádu
- 4 Příklad stavového modelu z reálného světa



Systém druhého řádu

Diferenční rovnice druhého řádu s počátečními podmínkami ve tvaru

$$y[n + 2] + \alpha_1 y[n + 1] + \alpha_0 y[n] = u[n] \quad (3)$$

$$y(0) = \gamma_1 \quad \text{a} \quad y(1) = \gamma_2, \quad (4)$$

udává vztah vstupu $u[n]$ a výstupu $y[n]$ diskrétního LTI systému



Systém druhého řádu

Tento vnější popis převedeme na stavový popis volbou stavového vektoru

$$\begin{aligned}x_1[n] &= y[n], \\x_2[n] &= y[n + 1].\end{aligned}$$



Systém druhého řádu

Dosadíme za $y[n+1] = x_2[n]$ a $y[n+2] = x_2[n+1]$ do původní diferenční rovnice a je

$$x_2[n+1] = -\alpha_1 x_2[n] - \alpha_0 x_1[n] + u[n].$$

Současně platí

$$x_1[n+1] = y[n+1] = x_2[n].$$



Systém druhého řádu

Dostáváme tak

$$\begin{bmatrix} x_1[n+1] \\ x_2[n+1] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\alpha_0 & -\alpha_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1[n] \\ x_2[n] \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u[n]$$

nebo

$$\begin{bmatrix} x_1[n+1] \\ x_2[n+1] \end{bmatrix} = \mathbf{M} \begin{bmatrix} x_1[n] \\ x_2[n] \end{bmatrix} + \mathbf{N} u[n],$$

resp.

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\alpha_0 & -\alpha_1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{N} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$



Systém druhého řádu

Rovnici pro výstup vyjádříme z definice stavových veličin

$$y[n] = [1 \quad 0] \begin{bmatrix} x_1[n] \\ x_2[n] \end{bmatrix} + 0 u[n].$$

Matice **D** je tedy nulová a pro výstupní matici dostáváme

$$\mathbf{C} = [1 \quad 0].$$

Lineární systém, který má matici **D** nulovou, se nazývá **ryzí** systém. Je vhodné podotknout, že počáteční podmínky se transformují do stavového popisu takto

$$y(0) = \gamma_1 = x_1(0) \quad \text{a} \quad y(1) = \gamma_2 = x_2(0).$$



Obsah přednášky

- ① Vnější a vnitřní popis systému
- ② Příklad
- ③ Diskrétní systémy
- ④ Příklad stavového modelu z reálného světa

Model fakulty



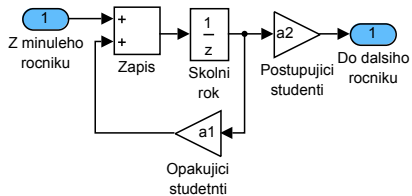
Model fakulta

Vznik nové fakulty a hledání odpovědí na různé otázky související s počty studentů jsou ukázkou diskrétního stavového systému, ve kterém složka stavového vektoru x_i reprezentuje počet studentů v i -tém ročníku. Předpokládejme dále, že do prvního ročníku budeme přijímat pravidelně každý rok $u[n]$ studentů.

- Jestliže z každého ročníku postoupí bez potíží a_1x_i studentů, opakuje a_2x_i studentů a fakultu opustí a_3x_i studentů, kde $a_1 + a_2 + a_3 = 1$, nalezněte počty absolventů, pokud úspěšnost u státních závěrečných zkoušek je a , pro které platí $a \equiv a_1^{(5)}$.
- Nalezněte celkový počet studentů, kteří studují v jednom akademickém roce na fakultě.



Model fakulta



Model fakulta

Stavový popis této vzorové situace je

$$\begin{bmatrix} x_1[n+1] \\ x_2[n+1] \\ x_3[n+1] \\ x_4[n+1] \\ x_5[n+1] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_2^{(1)} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_1^{(1)} & a_2^{(2)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_1^{(2)} & a_2^{(3)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_1^{(3)} & a_2^{(4)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_1^{(4)} & a_2^{(5)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1[n] \\ x_2[n] \\ x_3[n] \\ x_4[n] \\ x_5[n] \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u[n]$$

$$y[n] = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad a] \begin{bmatrix} x_1[n] \\ x_2[n] \\ x_3[n] \\ x_4[n] \\ x_5[n] \end{bmatrix}.$$



Model fakulta

Nebo se můžeme ptát, jaký je celkový počet studentů na fakultě v určitém roce. Potom pro výstup obdržíme

$$y[n] = [1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1] \begin{bmatrix} x_1[n] \\ x_2[n] \\ x_3[n] \\ x_4[n] \\ x_5[n] \end{bmatrix} .$$

