

# Inverzní Laplaceova transformace

## Modelování systémů a procesů (11MSP)

Bohumil Kovář, Jan Příkryl, Miroslav Vlček

Ústav aplikované matematiky  
ČVUT v Praze, Fakulta dopravní

6. přednáška 11MSP  
2018

verze: 2018-03-19 10:05



# Obsah přednášky

## ① Zpětná Laplaceova transformace

Definice

Rozklad na parciální zlomky

Zakrývací pravidlo pro jednoduché póly

Násobné póly

Zakrývací pravidlo pro násobné póly

## ② Příklad použití zpětné Laplaceovy transformace



# Zpětná Laplaceova transformace

## Definice

Již jsme si řekli, že zpětná Laplaceova transformace má tvar integrálu podél křivky v komplexní rovině  $p$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} F(p) e^{pt} dp \equiv \mathcal{L}^{-1} \{F(p)\}.$$

Pro **racionální lomené funkce v proměnné  $p$**  budeme postupovat jinak.



# Jak na to?

$f(t) \Rightarrow$	$\Leftarrow F(p)$
$e^{-\alpha t}$	$\frac{1}{p + \alpha}$
$e^{-\alpha t} \cos \omega t$ $= \frac{e^{-(\alpha - i\omega)t} + e^{-(\alpha + i\omega)t}}{2}$	$\frac{p + \alpha}{(p + \alpha)^2 + \omega^2}$ $= \frac{1}{2} \left( \frac{1}{p + \alpha - i\omega} + \frac{1}{p + \alpha + i\omega} \right)$
$e^{-\alpha t} \sin \omega t$ $= \frac{e^{-(\alpha - i\omega)t} - e^{-(\alpha + i\omega)t}}{2i}$	$\frac{\omega}{(p + \alpha)^2 + \omega^2}$ $= \frac{1}{2i} \left( \frac{1}{p + \alpha - i\omega} - \frac{1}{p + \alpha + i\omega} \right)$



# Racionální lomená funkce

## Rozklad na parciální zlomky

Obraz výstupu systému ve tvaru racionální lomené funkce,

$$R(p) = \frac{Q(p)}{N(p)} = \frac{b_m p^m + b_{m-1} p^{m-1} + \dots + b_1 p + b_0}{a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_1 p + a_0}$$

Zlomek lze vyjádřit jako součet **parciálních zlomků**, což jsou jednoduché zlomky s konstantou v čitateli a jedním kořenem  $N(p)$  ve jmenovateli.



# Racionální lomená funkce

## Rozklad na parciální zlomky

O racionální lomené funkci  $\frac{Q(p)}{N(p)}$  říkáme, že má **nulové** body  $p_{0\nu}$ ,  
jestliže  $Q(p_{0\nu}) = 0$  a že má **póly**  $p_{\infty\mu}$ , jestliže  $N(p_{\infty\mu}) = 0$ .

Pokud má funkce  $\frac{Q(p)}{N(p)}$  jednoduché póly, potom

$$N(p) = \prod_{\mu=1}^n (p - p_{\infty\mu}) = (p - p_{\infty 1})(p - p_{\infty 2}) \dots (p - p_{\infty n}).$$



# Racionální lomená funkce I

## Příklad

### Example (Racionální lomená funkce)

Jestliže

$$N(p) = p^3 + 3p^2 + 6p + 4 = (p + 1)(p^2 + 2p + 4)$$

určete rozklad na kořenové činitele.

Je samozřejmě

$$N(p) = (p + 1)(p^2 + 2p + 4) = (p + 1)(p + 1 + i\sqrt{3})(p + 1 - i\sqrt{3})$$

takže platí

$$N(p) = \prod_{\mu=1}^3 (p - p_{\mu}) = (p - p_1)(p - p_2)(p - p_3).$$



# Racionální lomená funkce II

## Příklad

### Example (Racionální lomená funkce)

Póly v tomto případě jsou

$$p_1 = -1$$

$$p_2 = -1 - i\sqrt{3}$$

$$p_3 = -1 + i\sqrt{3}$$

a platí  $N(p_1) \equiv N(-1) = 0$  atd.

Z tohoto příkladu plyne první krok, který musíme při zpětné Laplaceově transformaci provést: **nalezení kořenů polynomu ve jmenovateli racionální funkce  $N(p)$**





# Zpětná Laplaceova transformace

Rozklad racionální lomené funkce na parciální zlomky má tvar

$$\begin{aligned}\frac{Q(p)}{N(p)} &= \sum_{\mu=1}^n \frac{k_{\mu}}{p - p_{\infty\mu}} \\ &= \frac{k_1}{p - p_{\infty 1}} + \frac{k_2}{p - p_{\infty 2}} + \dots + \frac{k_n}{p - p_{\infty n}} \\ &\equiv \frac{k_1}{p - p_1} + \frac{k_2}{p - p_2} + \dots + \frac{k_n}{p - p_n},\end{aligned}$$

kde  $k_{\mu}$  se nazývají **residua**.



# Zpětná Laplaceova transformace

Pro residua platí

$$\begin{aligned}
 k_{\mu} &= \lim_{p \rightarrow p_{\infty\mu}} (p - p_{\infty\mu}) \frac{Q(p)}{N(p)} \\
 &= Q(p_{\infty\mu}) \lim_{p \rightarrow p_{\infty\mu}} (p - p_{\infty\mu}) \frac{1}{N(p)} \\
 &= Q(p_{\infty\mu}) \lim_{p \rightarrow p_{\infty\mu}} \frac{1}{\frac{N(p)}{p - p_{\infty\mu}}} \\
 &= Q(p_{\infty\mu}) \frac{1}{N'(p_{\infty\mu})}
 \end{aligned}$$



# Zpětná Laplaceova transformace

Pro jednoduchost budeme dále psát  $p_{\infty\mu} \rightarrow p_{\mu}$ . Protože platí

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{p - \alpha} \right\} = e^{\alpha t},$$

dostaneme

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{Q(p)}{N(p)} \right\} = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \sum_{\mu=1}^n \frac{k_{\mu}}{p - p_{\mu}} \right\} = \sum_{\mu=1}^n k_{\mu} e^{p_{\mu} t}.$$



# Zpětná Laplaceova transformace

Tím jsme dokázali tzv. **Heavisideův vzorec** pro zpětnou transformaci racionální lomené funkce s jednoduchými póly

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{Q(p)}{N(p)} \right\} = \sum_{\mu} \frac{Q(p_{\mu})}{N'(p_{\mu})} e^{p_{\mu} t}$$



# Zpětná Laplaceova transformace I

## Příklad

### Example (Jednoduché póly)

Laplaceův obraz impulsní odezvy systému je

$$H(p) = \frac{6}{p^3 + 3p^2 + 6p + 4} = \frac{6}{(p + 1)(p^2 + 2p + 4)}.$$

Určete  $h(t)$ .

**Řešení:**

Nejprve rozložíme

$$\begin{aligned} H(p) &= \frac{6}{(p + 1)(p^2 + 2p + 4)} \\ &= \frac{k_1}{p + 1} + \frac{k_2}{p + 1 + i\sqrt{3}} + \frac{k_3}{p + 1 - i\sqrt{3}}. \end{aligned}$$



# Zpětná Laplaceova transformace II

## Příklad

### Example (Jednoduché póly)

Platí

$$k_1 = \lim_{p \rightarrow -1} \frac{6}{p^2 + 2p + 4} = \frac{6}{1 - 2 + 4} = \frac{6}{3} = 2,$$

$$\begin{aligned} k_2 &= \lim_{p \rightarrow -1 - i\sqrt{3}} \frac{6}{(p + 1)(p + 1 - i\sqrt{3})} \\ &= \frac{6}{(-1 - i\sqrt{3} + 1)(-1 - i\sqrt{3} + 1 - i\sqrt{3})} \\ &= \frac{6}{(-i\sqrt{3})(-i2\sqrt{3})} = -1, \end{aligned}$$



# Zpětná Laplaceova transformace III

## Příklad

### Example (Jednoduché póly)

$$\begin{aligned}k_3 &= \lim_{p \rightarrow -1 - i\sqrt{3}} \frac{6}{(p+1)(p+1+i\sqrt{3})} \\ &= \frac{6}{(-1+i\sqrt{3}+1)(-1+i\sqrt{3}+1+i\sqrt{3})} \\ &= \frac{6}{(i\sqrt{3})(i2\sqrt{3})} = -1.\end{aligned}$$



# Zpětná Laplaceova transformace

Co s násobnými póly?

Jestliže  $N(p) = (p - p_1)^{\beta_1}(p - p_2)^{\beta_2} \dots (p - p_n)^{\beta_n}$  má násobné kořeny s násobností  $\beta_i$ , musíme předchozí postup modifikovat, protože platí

$$\mathcal{L}\{e^{-\alpha t}\} = \frac{1}{p + \alpha}$$

$$\mathcal{L}\{te^{-\alpha t}\} = \frac{1!}{(p + \alpha)^2}$$

$$\mathcal{L}\{t^2 e^{-\alpha t}\} = \frac{2!}{(p + \alpha)^3}$$

$$\vdots$$

$$\mathcal{L}\{t^n e^{-\alpha t}\} = \frac{n!}{(p + \alpha)^{n+1}}$$





# Zpětná Laplaceova transformace

Co s násobnými póly?

Je zřejmé, že v inverzní transformaci hrají výsadní roli póly racionální lomené funkce. Proto se v dalším můžeme zabývat pouze takovými racionálně lomenými funkcemi, jejichž čitatel je jednotkový

$$H(p) = \frac{1}{N(p)}.$$

Jestliže tedy

$$N(p) = (p - p_1)^{\beta_1} (p - p_2)^{\beta_2} \dots (p - p_n)^{\beta_n}$$

má násobné kořeny, potom inverzní Laplaceova transformace má tvar



# Zpětná Laplaceova transformace

Co s násobnými póly?

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{N(p)} \right\} &= e^{p_1 t} \left[ k_1^{(1)} + k_1^{(2)} \frac{t}{1!} + \dots + k_1^{(\beta_1)} \frac{t^{\beta_1-1}}{(\beta_1-1)!} \right] \\ &\quad + e^{p_2 t} \left[ k_2^{(1)} + k_2^{(2)} \frac{t}{1!} + \dots + k_2^{(\beta_2)} \frac{t^{\beta_2-1}}{(\beta_2-1)!} \right] \\ &\quad \vdots + e^{p_n t} \left[ k_n^{(1)} + k_n^{(2)} \frac{t}{1!} + \dots + k_n^{(\beta_n)} \frac{t^{\beta_n-1}}{(\beta_n-1)!} \right] \end{aligned}$$



# Zpětná Laplaceova transformace I

Co s násobnými póly?

Koeficienty  $k_{\mu}^{(\beta_m)}$  můžeme získat následujícím postupem.

Example (Zpětná Laplaceova transformace násobných pólů)

Nechť například

$$N(p) = (p - 2)^2(p + 5)(p + 7).$$

Rozklad na parciální zlomky hledáme ve tvaru

$$\frac{1}{(p - 2)^2(p + 5)(p + 7)} = \frac{k_1^{(2)}}{(p - 2)^2} + \frac{k_1^{(1)}}{p - 2} + \frac{k_2}{p + 5} + \frac{k_3}{p + 7}$$



# Zpětná Laplaceova transformace II

Co s násobnými póly?

Example (Zpětná Laplaceova transformace násobných pólů)

Vynásobíme rovnici členem  $(p - 2)^2$

$$\frac{(p - 2)^2}{(p - 2)^2(p + 5)(p + 7)}$$

$$= k_1^{(2)} + k_1^{(1)}(p - 2) + \frac{k_2(p - 2)^2}{p + 5} + \frac{k_3(p - 2)^2}{p + 7}$$

a nalezneme limitu pro  $p \rightarrow 2$ ,

$$\frac{1}{(2 + 5)(2 + 7)} = k_1^{(2)}$$



# Zpětná Laplaceova transformace III

Co s násobnými póly?

Example (Zpětná Laplaceova transformace násobných pólů)

Odečteme-li výraz  $\frac{1}{63(p-2)^2}$  od obou stran původní rovnice, dostáváme

$$\frac{1}{(p-2)^2(p+5)(p+7)} - \frac{1}{63(p-2)^2} = \frac{k_1^{(1)}}{p-2} + \frac{k_2}{p+5} + \frac{k_3}{p+7}$$

respektive rovnici

$$\frac{1}{63} \left[ \frac{-(p+14)}{(p-2)(p+5)(p+7)} \right] = \frac{k_1^{(1)}}{p-2} + \frac{k_2}{p+5} + \frac{k_3}{p+7},$$



# Zpětná Laplaceova transformace IV

Co s násobnými póly?

Example (Zpětná Laplaceova transformace násobných pólů)

pro kterou se výpočet  $k_\mu$  redukuje na případ s jednoduchými póly a platí

$$k_1^{(1)} = -\frac{2^4}{7^2 \times 9^2},$$

$$k_2 = \frac{1}{2 \times 7^2},$$

$$k_3 = -\frac{1}{2 \times 9^2}.$$



# Heavisideův vzorec pro násobné póly I

Example (Heavisideův vzorec pro násobné póly)

Heavisideovou metodou rozložíme na parciální zlomky racionální lomenou funkci

$$R(p) = \frac{1}{(p+1)^2(p+2)}.$$



# Heavisideův vzorec pro násobné póly II

## Example (Heavisideův vzorec pro násobné póly)

Postupujeme takto:

$$\begin{aligned}
 R(p) &= \frac{1}{(p+1)^2(p+2)} \\
 &= \frac{1}{(p+1)} \cdot \frac{1}{(p+1)(p+2)} \\
 &= \frac{1}{(p+1)} \left( \frac{1}{p+1} + \frac{-1}{p+2} \right) \\
 &= \frac{1}{(p+1)^2} - \frac{1}{(p+1)(p+2)} \\
 &= \frac{1}{(p+1)^2} - \frac{1}{p+1} + \frac{1}{p+2}
 \end{aligned}$$

Původní racionální lomená funkce s násobnými póly.

Násobné kořeny vytkneme.

Na pravý zlomek použijeme zakrývací pravidlo.

Roznásobíme závorku.

A na pravý zlomek použijeme zakrývací pravidlo ještě jednou.





# Obsah přednášky

- 1 Zpětná Laplaceova transformace
- 2 Příklad použití zpětné Laplaceovy transformace  
Diferenciální rovnice



# Zpětná Laplaceova transformace I

## Příklad

### Example (Spojitý systém druhého řádu)

Uvažujme lineární spojitý systém, popsany diferencíální rovnicí

$$y''(t) + 3y'(t) + 2y(t) = 5u(t),$$

kde  $u(t) = \mathbf{1}(t)$  je jednotkový skok a počáteční stav systému je dán stavem výstupu a rychlosti v čase  $t = 0$ :  $y(0) = -1$  a  $y'(0) = 2$ .  
Máme nalézt řešení  $y(t)$ .



# Zpětná Laplaceova transformace II

## Příklad

### Example (Spojitý systém druhého řádu)

Po Laplaceově transformaci diferenciální rovnice dostaneme algebraickou rovnici

$$p^2 Y(p) - py(0) - y'(0) + 3pY(p) - 3y(0) + 2Y(p) = 5 \frac{1}{p}.$$

S použitím počátečních podmínek nalezneme řešení algebraické rovnice ve tvaru

$$Y(p) = \frac{5 - p - p^2}{p(p + 1)(p + 2)}.$$



# Zpětná Laplaceova transformace III

## Příklad

### Example (Spojitý systém druhého řádu)

Rozložíme racionální lomenou funkci na parciální zlomky

$$Y(p) = \frac{5}{2p} - \frac{5}{p+1} + \frac{3}{2} \frac{1}{(p+2)}.$$

Hledané řešení je pro  $t \geq 0$

$$y(t) = \frac{5}{2} - 5e^{-t} + \frac{3}{2}e^{-2t}.$$

První člen odpovídá ustálenému stavu, další dva členy popisují přechodový děj.





Testing whether or not animals "kiss"

