# Přenosová funkce spojitých systémů. Stabilita spojitých systémů.

Modelování systémů a procesů (11MSP)

Bohumil Kovář, Jan Přikryl, Miroslav Vlček

Ústav aplikované matematiky
ČVUT v Praze, Fakulta dopravní

7. přednáška 11MSP
čtvrtek 5. dubna 2018

verze: 2018-04-04 16:40

# Obsah přednášky

# Obecné řešení diferenciální rovnice druhého řádu

Diferenciální rovnici

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}y(t) + 2a\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}y(t) + (a^2 + b^2)y(t) = u(t)$$

s počátečními podmínkami ve tvaru

$$y(0) = c_1 \qquad \text{a} \qquad y'(0) = c_2,$$

řešíme pomocí Laplaceovy transformace.

# Obecné řešení diferenciální rovnice druhého řádu

Protože platí

$$\mathcal{L}\left\{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}y(t)\right\} = pY(p) - y(0),$$

$$\mathcal{L}\left\{\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}y(t)\right\} = p^2Y(p) - py(0) - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}y(0),$$

nalezneme Laplaceovou transformací diferenciální rovnice její algebraický tvar

$$p^2Y(p) - py(0) - y'(0) + 2a(pY(p) - y(0)) + (a^2 + b^2)Y(p) = U(p).$$

# Obecné řešení diferenciální rovnice druhého řádu

Předchozí rovnici vyřešíme vzhledem k obrazu výstupní veličiny $Y(p)$ a dostáváme

$$\left(p^2 + 2a\,p + (a^2 + b^2)\right) Y(p) = U(p) + py(0) + y'(0) + 2a\,y(0)$$

neboli

$$Y(p) = \frac{U(p) + c_2 + (p + 2a)c_1}{(p + a + ib)(p + a - ib)}$$

# Přenosová funkce

Přenosová funkce $H(p)$ je definována jako podíl obrazu výstupu k obrazu vstupu

$$H(p) = \frac{Y(p)}{U(p)}$$

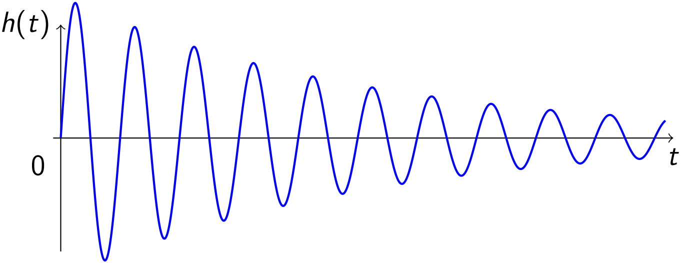
pro nulové počáteční podmínky a tedy

$$\boxed{H(p) = \frac{Y(p)}{U(p)} = \frac{1}{(p + a + \mathrm{i}b)(p + a - \mathrm{i}b)}}$$

# Přenosová funkce
## Impulsní odezva

Impulsní odezvu určíme jako zpětnou Laplaceovu transformaci přenosové funkce

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{H(p)\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(p+a)^2+b^2}\right\} = \frac{1}{b}\mathrm{e}^{-at}\sin bt$$



# Přenosová funkce

## Přechodová odezva

Přechodovou odezvu $s(t)$ určíme zpětnou Laplaceovu transformaci

$$s(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{H(p)\frac{1}{p}\right\}$$

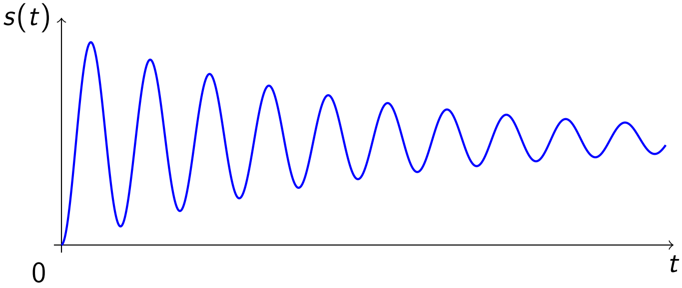
$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{p((p+a)^2+b^2)}\right) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{a^2+b^2}\left[\frac{1}{p} - \frac{p+2a}{(p+a)^2+b^2}\right]\right) =$$

$$= \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{a^2+b^2}\left[\frac{1}{p} - \frac{p+a}{(p+a)^2+b^2} - \frac{a}{(p+a)^2+b^2}\right]\right)$$

$$= \frac{1}{a^2+b^2}\left[1 - \mathrm{e}^{-at}\cos bt - \frac{a}{b}\mathrm{e}^{-at}\sin bt\right].$$

# Obecné řešení diferenciální rovnice druhého řádu

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{a^2+b^2}\left[\frac{1}{p}-\frac{p+2a}{(p+a)^2+b^2}\right]\right\} =$$
$$= \frac{1}{a^2+b^2}\left[1-\mathrm{e}^{-at}\cos bt-\frac{a}{b}\mathrm{e}^{-at}\sin bt\right]$$



# Obsah přednášky

# Přenosová funkce a vnitřní popis

Přenosová funkce vnitřního popisu je určena opět jako

$$H(p) = \frac{Y(p)}{U(p)},$$

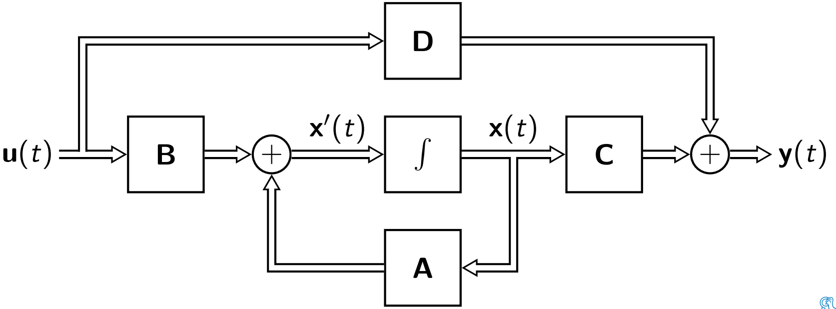
ovšem $Y(p)$ nyní závisí na stavových proměnných.

# Přenosová funkce a vnitřní popis

## Původní soustava

Mějme spojitý lineární časově invariantního systém

$$\mathbf{x}'(t) = \mathbf{A}\,\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\,\mathbf{u}(t),$$
$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\,\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\,\mathbf{u}(t).$$



# Přenosová funkce a vnitřní popis

## Laplaceova transformace

Stavový popis převedeme pomocí Laplaceovy transformace na algebraické rovnice tvaru

$$\begin{aligned} pX(p) - \mathbf{x}(0) &= \mathbf{A}\, X(p) + \mathbf{B}\, U(p) \\ Y(p) &= \mathbf{C}\, X(p) + \mathbf{D}\, U(p) \end{aligned}$$

a upravíme na

$$(p\mathbf{I} - \mathbf{A})\ X(p) = \mathbf{x}(0) + \mathbf{B}\, U(p)$$

a vypočítáme

$$X(p) = (p\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\ \mathbf{x}(0) + (p\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\ \mathbf{B}\, U(p).$$

# Přenosová funkce a vnitřní popis

Přenosová funkce je definována pro nulovou počáteční podmínku $\mathbf{x}(0) = 0$. Po dosazení dostáváme

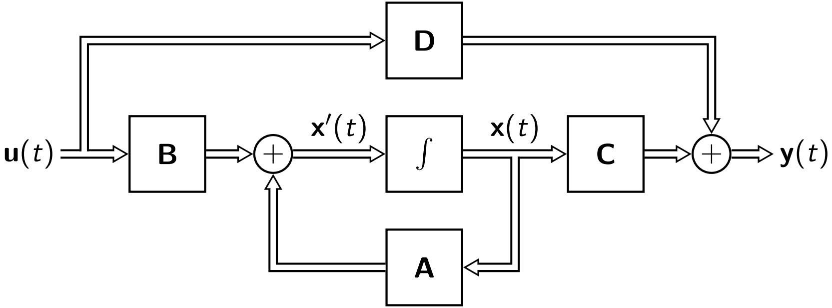
$$\begin{aligned} Y(p) &= \mathbf{C}\,(p\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\,\mathbf{B}\,U(p) + \mathbf{D}\,U(p) \\ &= \left[\mathbf{C}\,(p\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\,\mathbf{B} + \mathbf{D}\right] U(p) \end{aligned}$$

a přenosová funkce je

$$\boxed{H(p) = \mathbf{C}\,(p\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\,\mathbf{B} + \mathbf{D}}$$

# Přenosová funkce a vnitřní popis

$$H(p) = \mathbf{C}\left(p\mathbf{I} - \mathbf{A}\right)^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D}$$



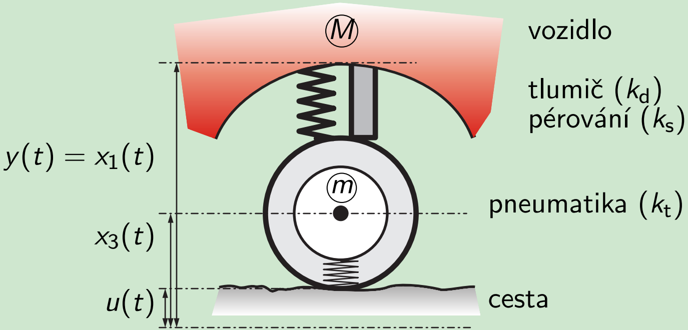
# Přenosová funkce a vnitřní popis

Pokud se jedná o ryzí systém, který nemá žádnou přímou vazbu ze vstupu na výstup a tedy $\mathbf{D} = \mathbf{0}$, potom

$$\boxed{H(p) = \mathbf{C}\left(p\mathbf{I} - \mathbf{A}\right)^{-1}\mathbf{B} = \mathbf{C}\,\frac{\operatorname{adj}\left(p\mathbf{I} - \mathbf{A}\right)}{\det\left(p\mathbf{I} - \mathbf{A}\right)}\,\mathbf{B}}$$

# Přenosová funkce a vnitřní popis – příklad I

## Example (Odpružení kola)




Na obrázku je model zavěšení kola vozidla a jeho odpružení s koeficienty tuhosti $k_t$, $k_s$ a $k_d$.

# Přenosová funkce a vnitřní popis – příklad II

**Example (Odpružení kola)**

Jestliže platí pohybové rovnice

$$M x_3''(t) + k_t \left[x_3(t) - u(t)\right] - \\ - k_s \left[x_1(t) - x_3(t)\right] - k_d \left[x_1'(t) - x_3'(t)\right] = 0$$

$$m x_1''(t) + k_s \left[x_1(t) - x_3(t)\right] + k_d \left[x_1'(t) - x_3'(t)\right] = 0$$

nalezněte stavový popis s použitím vektoru stavových proměnných $\mathbf{x} = [x_1(t), x_2(t), x_3(t), x_4(t)]^\mathsf{T}$.
Nalezněte přenosovou funkci $H(p) = Y(p)/U(p)$, která charakterizuje chování vozidla v závislosti na povrchu vozovky.

# Přenosová funkce a vnitřní popis – příklad III

## Example (Odpružení kola)

Zvolíme

$$
\begin{aligned}
x_1(t) &= y(t), & x_1'(t) &= x_2(t) \\
x_3(t), & & x_3'(t) &= x_4(t)
\end{aligned}
$$

a dostáváme soustavu rovnic

$$
\begin{aligned}
x_1'(t) &= x_2(t), \\
x_2'(t) &= -\frac{k_\mathrm{s}}{m}\left[x_1(t) - x_3(t)\right] - \frac{k_\mathrm{d}}{m}\left[x_1'(t) - x_3'(t)\right] \\
x_3'(t) &= x_4(t) \\
x_4'(t) &= -\frac{k_\mathrm{t}}{M}\left[x_3(t) - u(t)\right] + \frac{k_\mathrm{s}}{M}\left[x_1(t) - x_3(t)\right] + \frac{k_\mathrm{d}}{M}\left[x_1'(t) - x_3'(t)\right]
\end{aligned}
$$

# Přenosová funkce a vnitřní popis – příklad IV

## Example (Odpružení kola)

Rovnice převedeme na stavový popis

$$\begin{bmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \\ x_3'(t) \\ x_4'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\dfrac{k_s}{m} & -\dfrac{k_d}{m} & \dfrac{k_s}{m} & \dfrac{k_d}{m} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \dfrac{k_s}{M} & \dfrac{k_d}{M} & -\dfrac{k_s+k_t}{M} & -\dfrac{k_d}{M} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \dfrac{k_t}{M} \end{bmatrix} u(t)$$

a

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \end{bmatrix}.$$

# Přenosová funkce a vnitřní popis – příklad V

## Example (Odpružení kola)

Máme matice stavového popisu ve tvaru

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{k_s}{m} & -\frac{k_d}{m} & \frac{k_s}{m} & \frac{k_d}{m} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{k_s}{M} & \frac{k_d}{M} & -\frac{k_s + k_t}{M} & -\frac{k_d}{M} \end{bmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{k_t}{M} \end{bmatrix}$$

a

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

# Přenosová funkce a vnitřní popis – příklad VI

## Example (Odpružení kola)

a platí $H(p) = \mathbf{C}\,(p\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}$, t.j.

$$H(p) = \frac{1}{\Delta}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix} * & * & * & -\Delta_{41} \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\0\\0\\ \frac{k_t}{M}\end{bmatrix} =$$

$$= \frac{(k_d\, p + k_s)\, k_t}{(M\,p^2 + k_t)(m\,p^2 + k_d\, p + k_s) + m\,(k_d\, p + k_s)\, p^2},$$

kde $*$ označuje prvky inverzní matice, které nemusíme pro přenosovou funkci počítat a $\Delta = \det(p\mathbf{I} - \mathbf{A})$.

# Obsah přednášky

1. Zpětná Laplaceova transformace – dokončení
2. Přenosová funkce a vnitřní popis
3. Vyšetřování stability spojitých systémů
4. Vnější popis
5. Vnitřní popis

# Definice stability

## BIBO stabilita systému

BIBO stabilita – bounded input bounded output

Odezva na omezený vstupní signál musí být vždy omezená – systém je BIBO stabilní.

Odezva systému je kombinací

- odezvy na vstupní signál
- odezvy na počáteční podmínky

# Obsah přednášky

V případě přenosové funkce dané rovnicí

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}y(t) + 2a\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}y(t) + (a^2 + b^2)y(t) = u(t)$$

jsou póly přenosové funkce komplexní čísla ve tvaru

$$p_1 = -a + bi,$$
$$p_2 = -a - bi.$$

Pro stabilitu systému jsou rozhodující hodnoty $\Re(p_1)$ a $\Re(p_2)$. Jedná se o póly komplexně sdružené (jiné ani u LTI systémů být nemohou), platí proto $\Re(p_1) = \Re(p_2) = -a$ a pro stabilitu systému je proto rozhodující pouze hodnota parametru $a$.

# Stabilní spojitý LTI systém

**Theorem (Stabilní spojitý LTI systém)**

*Reálná část všech pólů přenosové funkce $H(p)$ stabilního systému leží v levé části $p$-roviny.*

**Example (Přenos spojitého LTI 2. řádu – jednoduché póly)**

Spojitý systém 2. řádu má přenosovou funkci

$$H(p) = \frac{1}{p^2 + 4p + 3} = \frac{1}{(p+1)(p+3)}.$$

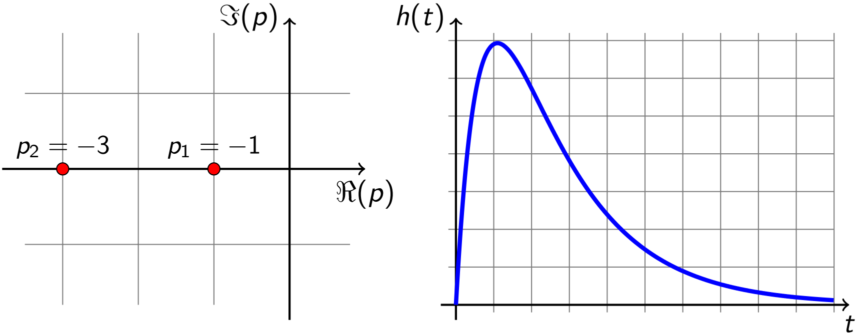
Póly přenosové funkce $p_1 = -1$ a $p_2 = -3$ leží v levé části $p$-roviny a jedná se proto o stabilní systém. Připomeňme, že

$$h(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{H(p)\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{k_1}{p+1} + \frac{k_2}{p+3}\right\} = \frac{1}{2}e^{-t} - \frac{1}{2}e^{-3t}.$$

# Stabilní spojitý LTI systém

**Theorem (Stabilní spojitý LTI systém)**

*Reálná část všech pólů přenosové funkce $H(p)$ stabilního systému leží v levé části p-roviny.*



# Stabilní spojitý LTI systém

## Theorem (Stabilní spojitý LTI systém)

*Reálná část všech pólů přenosové funkce $H(p)$ stabilního systému leží v levé části p-roviny.*

## Example (Přenos spojitého LTI 2. řádu – komplexně sdružené póly)

Spojitý systém 2. řádu má přenosovou funkci

$$H(p) = \frac{1}{p^2 + 4p + 20}.$$

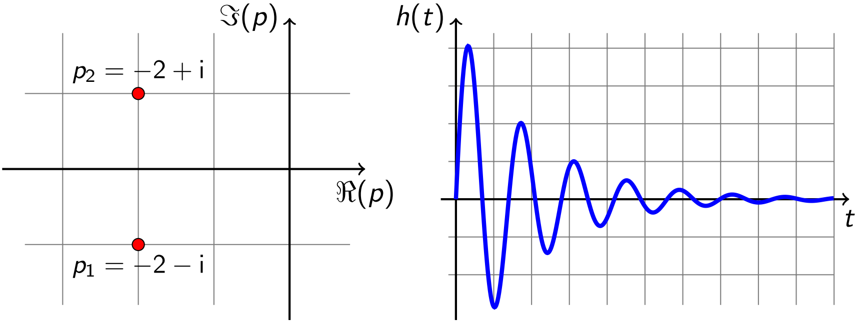
Dva komplexně sdružené póly v levé části $p$-roviny. Jedná se tedy o stabilní systém. Připomeňme, že

$$h(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{4}\frac{4}{(p+2)^2+16}\right\} = \frac{1}{4}\mathrm{e}^{-2t}\sin(4t).$$

# Stabilní spojitý LTI systém

**Theorem (Stabilní spojitý LTI systém)**

*Reálná část všech pólů přenosové funkce $H(p)$ stabilního systému leží v levé části p-roviny.*



# Nestabilní spojitý LTI systém

## Theorem (Nestabilní spojitý LTI systém)

*Reálná část alespoň jednoho pólu přenosové funkce $H(p)$ nestabilního spojitého LTI systému leží (i) v pravé části p-roviny, případně (ii) má takový systém násobný pól $H(p)$ na imaginární ose.*

## Example (Nestabilní spojitý LTI 2. řádu – reálné póly)

Spojitý LTI systém 2. řádu má přenosovou funkci

$$H(p) = \frac{1}{p^2 + p - 2} = \frac{1}{(p+2)(p-1)}.$$

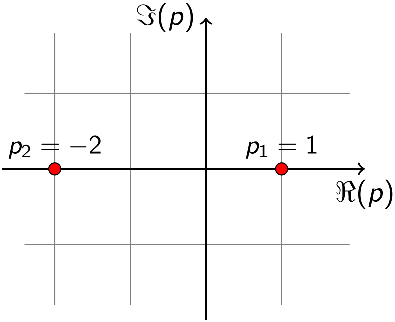
Jeden z pólů přenosové funkce, $p_2 = 1$, leží v pravé části $p$-roviny a jedná se proto o nestabilní systém. Připomeňme, že

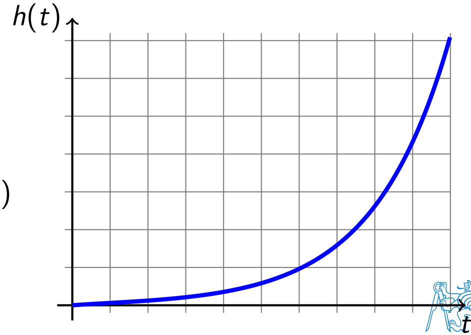
$$h(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{H(p)\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{k_1}{p+2} + \frac{k_2}{p-1}\right\} = -\frac{1}{3}\mathrm{e}^{-2t} + \frac{1}{3}\mathrm{e}^{t}.$$

# Nestabilní spojitý LTI systém

**Theorem (Nestabilní spojitý LTI systém)**

*Reálná část alespoň jednoho pólu přenosové funkce $H(p)$ nestabilního spojitého LTI systému leží (i) v pravé části p-roviny, případně (ii) má takový systém násobný pól $H(p)$ na imaginární ose.*



# Nestabilní spojitý LTI systém

## Theorem (Nestabilní spojitý LTI systém)

*Reálná část alespoň jednoho pólu přenosové funkce $H(p)$ nestabilního spojitého LTI systému leží (i) v pravé části p-roviny, případně (ii) má takový systém násobný pól $H(p)$ na imaginární ose.*

## Example (Nestabilní spojitý LTI 2. řádu – násobný pól)

Spojitý LTI systém 2. řádu má přenosovou funkci

$$H(p) = \frac{1}{(p^2+1)^2}.$$

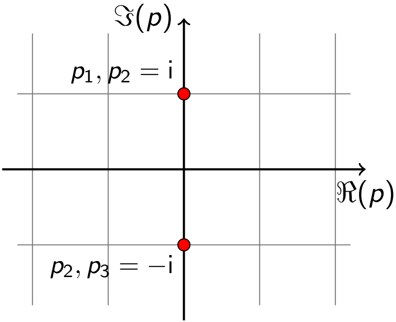
Dvojnásobný pól přenosové funkce $p_\infty = \pm\mathrm{i}$ leží na imagirnární ose $p$-roviny a jedná se proto o nestabilní systém. Připomeňme, že

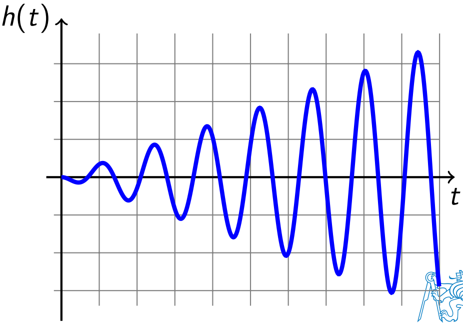
$$h(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{H(p)\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(p^2+1)^2}\right\} = t\,\sin(t).$$

# Nestabilní spojitý LTI systém

## Theorem (Nestabilní spojitý LTI systém)

*Reálná část alespoň jednoho pólu přenosové funkce $H(p)$ nestabilního spojitého LTI systému leží (i) v pravé části p-roviny, případně (ii) má takový systém násobný pól $H(p)$ na imaginární ose.*



# Spojitý LTI systém na mezi stability

**Theorem (Spojitý LTI systém na mezi stability)**

*Reálná část pólů přenosové funkce $H(p)$ spojitého LTI systému na mezi stability je rovna nule a póly nejsou násobné.*

**Example (Spojitý LTI 1. řádu na mezi stability – jednoduchý pól)**

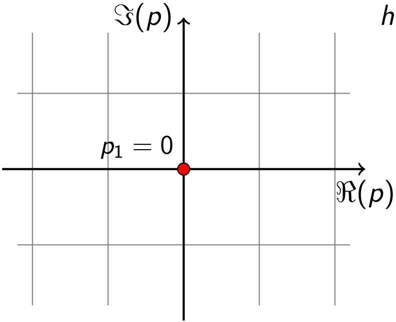
Spojitý LTI systém 1. řádu má přenosovou funkci

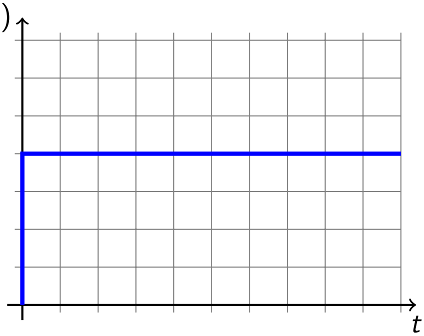
$$H(p) = \frac{1}{p}.$$

# Spojitý LTI systém na mezi stability

**Theorem (Spojitý LTI systém na mezi stability)**

*Reálná část pólů přenosové funkce $H(p)$ spojitého LTI systému na mezi stability je rovna nule a póly nejsou násobné.*



# Spojitý LTI systém na mezi stability

**Theorem (Spojitý LTI systém na mezi stability)**

*Reálná část pólů přenosové funkce $H(p)$ spojitého LTI systému na mezi stability je rovna nule a póly nejsou násobné.*

**Example (Spojitý LTI 2. řádu na mezi stability – komplexně sdružený pól)**

Spojitý LTI systém 2. řádu má přenosovou funkci

$$H(p) = \frac{1}{p^2 + 4}.$$

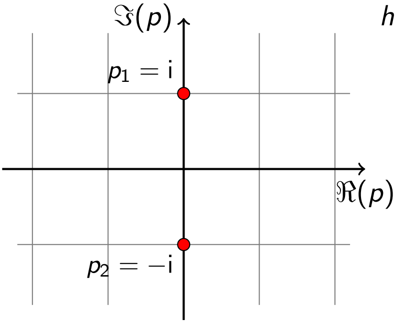
Připomeňme, že

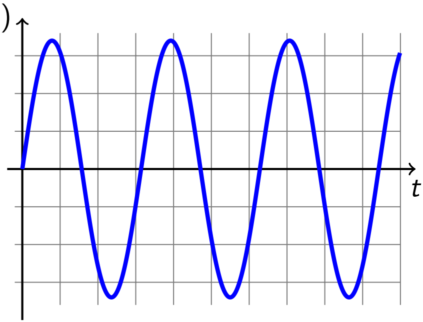
$$h(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{H(p)\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{2}\frac{2}{p^2 + 2^2}\right\} = \frac{1}{2}\sin(2t).$$

# Spojitý LTI systém na mezi stability

**Theorem (Spojitý LTI systém na mezi stability)**

*Reálná část pólů přenosové funkce $H(p)$ spojitého LTI systému na mezi stability je rovna nule a póly nejsou násobné.*



# Kritérium stability

## Shrnutí

**Stabilní systém**

- $\lim_{t\to\infty} h(t) = 0$
- Všechny póly přenosové funkce $H(p)$ leží v levé polorovině komplexní roviny, $\Re(p_\infty) < 0$.

**Nestabilní systém**

- $\lim_{t\to\infty} h(t) = \infty$
- Alespoň jeden pól přenosové funkce $H(p)$ leží v pravé polorovině komplexní roviny, $\Re(p_\infty) > 0$ nebo alespoň jeden násobný pól leží na imaginární ose.

**Mez stability**

- $\lim_{t\to\infty} h(t) = c \neq 0$ nebo neexistuje
- Alespoň jeden jednoduchý pól leží na imaginární ose a žádný pól neleží v pravé polorovině komplexní roviny. Případné násobné póly leží v levé polorovině.

# Obsah přednášky

# Stabilita vnitřního popisu

Stabilitu určujeme opět na základě polohy pólů přenosové funkce $H(p)$ v $p$-rovině. V případě vnitřního popisu je přenosová funkce definována vztahem

$$H(p) = \mathbf{C}\,(p\,\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D}.$$

**Theorem (Stabilita vnitřního popisu)**

*Pro stabilitu systému je rozhodující matice* $\mathbf{A}$, *respektive*

$$\det(p\,\mathbf{I} - \mathbf{A}).$$

*odpovídající jmenovateli přenosové funkce.*

Další postup je identický s vyšetřováním stability vnějšího popisu.

# Přenosová funkce vnitřního popisu spojitého LTI systému I

**Example (Přenosová funkce vnitřního popisu spojitého LTI systému)**

Vnějšímu popisu spojitého LTI systému z Příkladu **??** odpovídá diferenciální rovnice 2. řádu

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}y(t) + 4\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}y(t) + 20\,y(t) = u(t).$$

Přenosová funkce je

$$H(p) = \frac{1}{p^2 + 4p + 20}.$$

# Přenosová funkce vnitřního popisu spojitého LTI systému II

**Example (Přenosová funkce vnitřního popisu spojitého LTI systému)**

Pokud při převodu do vnitřního popisu zavedeme stavy

$$x_1(t) = y(t),$$
$$x_2(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} y(t),$$

bude matice vývoje stavu $\mathbf{A}$, výraz $(p\,\mathbf{I} - \mathbf{A})$ a jeho determinant rovny

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -20 & -4 \end{bmatrix},$$
$$p\mathbf{I} - \mathbf{A} = \begin{bmatrix} p & -1 \\ 20 & p+4 \end{bmatrix},$$
$$\det(p\,\mathbf{I} - \mathbf{A}) = p^2 + 4p + 20.$$

# Přenosová funkce vnitřního popisu spojitého LTI systému III

**Example (Přenosová funkce vnitřního popisu spojitého LTI systému)**

Polynom $p^2 + 4p + 20$ je charakteristický polynom systému a jeho kořeny jsou póly přenosové funkce.

Další rozhodování o stabilitě vnitřního popisu systému je shodné s kritérii stability vnějšího popisu.


Testing whether or not animals "kiss"