$\mathcal{Z}$-transformace

Modelování systémů a procesů (11MSP)

Bohumil Kovář, Jan Přikryl, Miroslav Vlček

Ústav aplikované matematiky
ČVUT v Praze, Fakulta dopravní

8. přednáška 11MSP
čtvrtek 12. dubna 2018

verze: 2018-04-11 09:44

Obsah přednášky

1 Matematické nářadí

Motivace

Použití

2 $\mathcal{Z}$-transformace

Matematické nářadí
Motivace

Chceme analyzovat chování nějakého systému, případně navrhnout systém, který má přesně specifikované parametry.

Opíráme se o

- **fyzikální model**, založený na fyzikálních zákonech
- **black-box model**, založený na pozorování, identifikaci

Analýza chování reálného systému je složitý proces (model představuje jedna či více diferenciálních či diferenčních rovnic vyššího řádu) $\Rightarrow$ numerické řešení.

Jak analýzu zjednodušit?

Matematické nářadí

Použití

Analýza či návrh systému v **časové oblasti** (vstupy a výstupy jsou funkcí času) jsou velmi pracné.

Převod do **frekvenční oblasti** (vstupy a výstupy jsou funkcí komplexní proměnné nazývané *úhlová frekvence*) nám

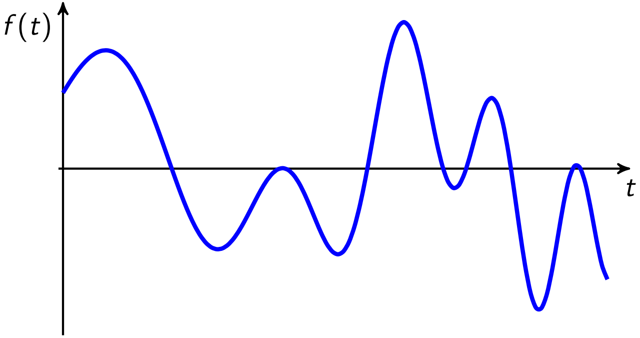
- poskytuje fundamentálně odlišný nástroj k pochopení funkce systému,
- často drasticky sníží složitost matematických výpočtů potřebných pro analýzu systému.

Obsah přednášky

1. Matematické nářadí
2. $\mathcal{Z}$-transformace
   - O původu diskrétní transformace
   - Definice
   - Vlastnosti
   - Tabulka obrazů

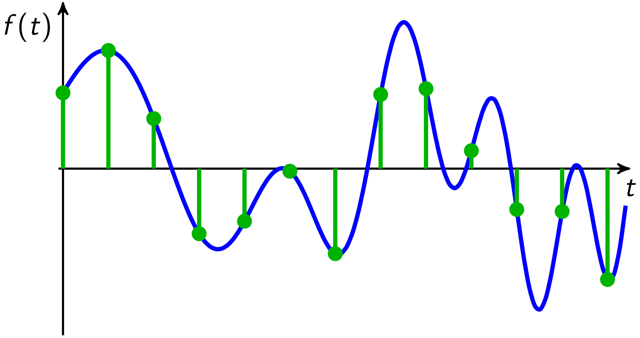
O původu diskrétní transformace

Jak se ze spojitého systému stane systém diskrétní



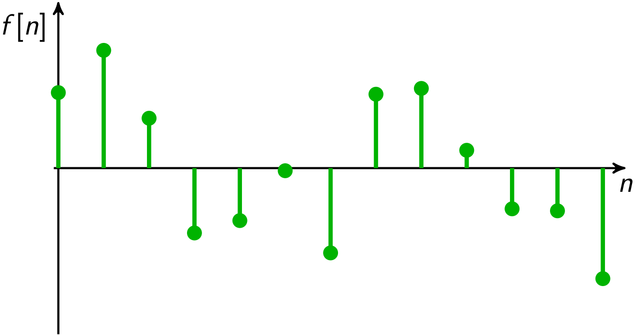
O původu diskrétní transformace

Jak se ze spojitého systému stane systém diskrétní



O původu diskrétní transformace

Jak se ze spojitého systému stane systém diskrétní



O původu diskrétní transformace
Vzorkování signálu

Vztah mezi spojitou funkcí $f(t)$ a ideálně vzorkovanou funkcí $f^*(t)$ lze formálně zapsat jako

$$
\begin{aligned}
f^*(t) &= \sum_{n=0}^{\infty} f(t) * \delta(t - nT) = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \cdot \delta(t - nT - \tau)\, \mathrm{d}\tau \\
&= f(nT)\delta(t - nT) \equiv \{f_n\}_{n=0}^{\infty},
\end{aligned}
$$

kde T je vzorkovací perioda signálu.

Ze spojité funkce $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ se tak stane **posloupnost** reálných hodnot $f_n : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$.

U této posloupnosti je zvykem neuvádět vzorkovací periodu signálu. Značíme ji $f[n]$ a platí

$$
f[n] = \{f(nT)\}_{n=0}^{\infty}.
$$

O původu diskrétní transformace
Vzorkování signálu

Jestliže budeme hledat Laplaceovu transformaci funkce $f^*(t)$, dostaneme

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\left\{f^*(t)\right\} &= \int_0^\infty f^*(t)\, e^{-pt} dt \\ &= \int_0^\infty \sum_{n=0}^\infty f(t)\, \delta(t - nT)\, e^{-pt} dt \\ &= \sum_{n=0}^\infty \int_0^\infty \delta(t - nT)\, f(t)\, e^{-pt} dt \\ &= \sum_{n=0}^\infty f(nT) e^{-pnT} \equiv \sum_{n=0}^\infty f[n] z^{-n},\end{aligned}$$

kde jsme zavedli komplexní proměnnou $z = e^{pT}$ a $f[n]$ označuje n-tý vzorek příslušné spojité funkce vzorkované s periodou T.

$\mathcal{Z}$-transformace

Definice

Definition (Jednostranná $\mathcal{Z}$-transformace)

Jednostranná $\mathcal{Z}$-transformace posloupnosti $f[n]$ je definována nekonečnou řadou

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f[n] z^{-n},$$

kterou často označujeme $F(z) = \mathcal{Z}\{f[n]\}$.

Zpětná $\mathcal{Z}$-transformace má tvar integrálu podél uzavřené křivky $\mathcal{C}$, jež obsahuje všechny singulární body funkce $F(z)$. Pro všechna $n = 0, 1, \ldots, \infty$ platí

$$f[n] = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\mathcal{C}} F(z) z^{n-1} \, \mathrm{d}z \equiv \mathcal{Z}^{-1}\{F(z)\}.$$

Vlastnosti $\mathcal{Z}$-transformace

Linearita

Theorem (Linearita)

$\mathcal{Z}$-transformace je lineární:

$$\mathcal{Z}\left\{\sum_k a_k f_k[n]\right\} = \sum_k a_k \mathcal{Z}\left\{f_k[n]\right\}$$

$$\mathcal{Z}^{-1}\left\{\sum_m b_m F_m(z)\right\} = \sum_m b_m \mathcal{Z}^{-1}\left\{F_m(z)\right\}$$

Vlastnosti $\mathcal{Z}$-transformace

Změna měřítka

Theorem (O změně měřítka)

Pro $F(z) = \mathcal{Z}\{f[n]\}$ *je*

$$a^{-n} f[n] = \mathcal{Z}^{-1}\{F(az)\}$$

$$F(a^{-1}z) = \mathcal{Z}\{a^n f[n]\}$$

Vlastnosti $\mathcal{Z}$-transformace

Posunutí

Věty o posunutí jsou velmi důležité pro transformaci diferenčních rovnic na algebraické rovnice v $\mathcal{Z}$-rovině, podobně, jako je tomu u spojitých systémů s větami o obrazu derivací v Laplaceově transformaci.

$$\mathcal{Z}\left\{f[n-m]\right\} = z^{-m}\mathcal{Z}\left\{f[n]\right\} = z^{-m}F(z)\,\Big|_{\forall n-m<0:\ f[n-m]=0}$$

$$\mathcal{Z}\left\{f[n+m]\right\} = z^{m}\left[\mathcal{Z}\left\{f[n]\right\} - \sum_{\nu=0}^{m-1} f[\nu]z^{-\nu}\right]$$

$$= z^{m}\left[F(z) - \sum_{\nu=0}^{m-1} f[\nu]z^{-\nu}\right]$$

Vlastnosti $\mathcal{Z}$-transformace

Transformace částečné sumy

Theorem (Transformace částečného součtu)

Částečnou sumu posloupnosti $f[n]$ lze transformovat jako

$$\mathcal{Z}\left\{\sum_{\nu=0}^{n} f[\nu]\right\} = \frac{z}{z-1}F(z)$$

$$\mathcal{Z}\left\{\sum_{\nu=0}^{n-1} f[\nu]\right\} = \frac{1}{z-1}F(z)$$

Vlastnosti $\mathcal{Z}$-transformace

Transformace diferencí

Pro $m = 1, 2, \ldots, \infty$ a diference m-tého řádu

$$\begin{aligned}
\Delta^0 f[n] &= f[n], \\
\Delta^1 f[n] &= f[n+1] - f[n], \\
\Delta^2 f[n] &= \Delta^1\left[\Delta^1 f[n]\right] = f[n+2] - 2f[n+1] + f[n] \\
\Delta^m f[n] &= \Delta^1\left[\Delta^{m-1} f[n]\right]
\end{aligned}$$

platí tato věta o transformaci diferencí:

$$\begin{aligned}
\mathcal{Z}\left\{\Delta^1 f[n]\right\} &= (z-1)F(z) - f[0]z \\
\mathcal{Z}\left\{\Delta^2 f[n]\right\} &= (z-1)^2 F(z) - f[0]\,z(z-1) + \Delta^1 f[0]z
\end{aligned}$$

Vlastnosti $\mathcal{Z}$-transformace

Obraz konvoluce

Theorem (O konvoluci)

Je-li $F(z) = \mathcal{Z}\{f[n]\}$ a $G(z) = \mathcal{Z}\{g[n]\}$, pak pro diskrétní kovoluci obou posloupností platí

$$\mathcal{Z}\{f[n] * g[n]\} = \mathcal{Z}\left\{\sum_{m=0}^{\infty} f[n-m] \cdot g[m]\right\} = F(z) \cdot G(z)$$

Vlastnosti $\mathcal{Z}$-transformace

Derivace obrazu

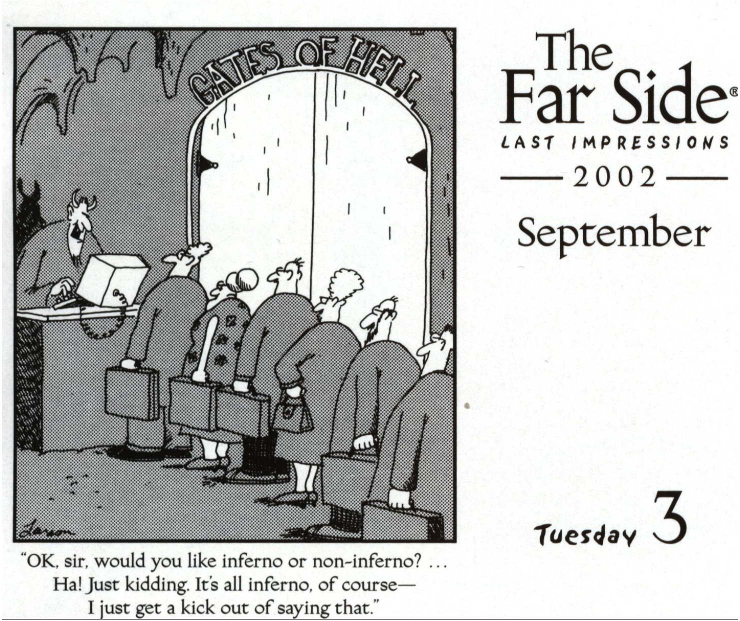
Theorem (O derivaci obrazu)

Jednoduchá derivace obrazu $F(z)$ se na vzoru $f[n]$ projeví jako násobení proměnnou n:

$$\mathcal{Z}\{nf[n]\} = -z\frac{dF(z)}{dz}$$

Tabulka $\mathcal{Z}$-transformace

$f[n] = \mathcal{Z}^{-1}\{F(z)\}$	$F(z) = \mathcal{Z}\{f[n]\}$
$\delta[n]$	1
$\mathbf{1}[n]$	$\dfrac{1}{1 - z^{-1}}$
a^n	$\dfrac{1}{1 - a \cdot z^{-1}}$
n	$\dfrac{z^{-1}}{(1 - z^{-1})^2}$
$n \cdot a^{n-1}$	$\dfrac{z^{-1}}{(1 - az^{-1})^2}$


GATES OF HELL
“OK, sir, would you like inferno or non-inferno? … Ha! Just kidding. It’s all inferno, of course— I just get a kick out of saying that.”
The Far Side®
LAST IMPRESSIONS
2002
September
Tuesday 3